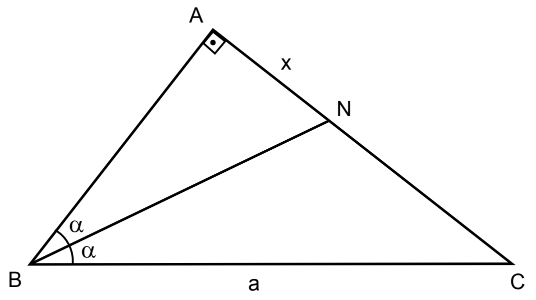
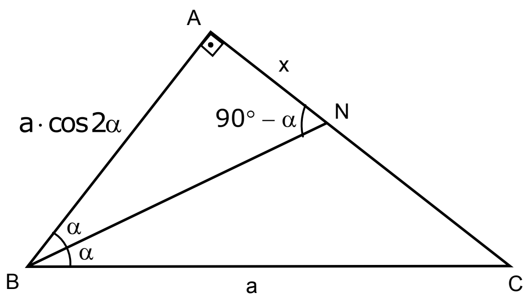
ÖRNEK PROBLEM



ABC dik üçgeninde; $m(\sphericalangle A) = 90°$ ve $|BC| = a$ olup $[BN]$ açıortaydır.

$|AN| = x$ uzunluğunun en büyük değerini **a** türünden bulunuz.

ÇÖZÜM



ABC dik üçgeninde;

$$\cos(\sphericalangle B) = \frac{|AB|}{|BC|} \quad \Rightarrow \quad \cos 2\alpha = \frac{|AB|}{a}$$

$$\Rightarrow |AB| = a \cdot \cos 2\alpha$$

ve $m(\sphericalangle ANB) = 90° - \alpha$ deyip ABN dik üçgeninde sinüs teoremi uygulanırsa,

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{a \cdot \cos 2\alpha}{\sin(90° - \alpha)} \Rightarrow \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{a \cdot \cos 2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a \cdot \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow x = a \cdot \tan\alpha \cdot \cos 2\alpha$$

bulunur.

x uzunluğu, $0° < \alpha < 90°$ olmak üzere, α değişkenine bağlı olarak değişmektedir. $x = f(\alpha)$ fonksiyonunun en büyük değeri ya α'nın sınır değerlerinde, ya da x'in α'ya göre türevinin sıfır olduğu α değerlerinde elde edilebilecektir. Sınır değerlerde x'in küçük kalacağı kolayca görülür.

Öyleyse; $x = f(\alpha)$ fonksiyonunun türevini, belirtilen aralıkta sıfır yapan α değeri için x uzunluğu en büyük olacaktır.

x'in α'ya göre türevi,

$$x = a \cdot \tan\alpha \cdot \cos 2\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\alpha} = a \cdot (1 + \tan^2\alpha) \cdot \cos 2\alpha - 2a \cdot \tan\alpha \cdot \sin 2\alpha$$

olur.

$$\frac{dx}{d\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow a \cdot (1 + \tan^2\alpha) \cdot \cos 2\alpha - 2a \cdot \tan\alpha \cdot \sin 2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \tan^2\alpha}{\tan\alpha} = 2 \cdot \tan 2\alpha = \frac{4 \cdot \tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan^4\alpha + 4 \cdot \tan^2\alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha = \sqrt{5} - 2$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$$

bulunur.

Burada, denklemin diğer kökü olan $\tan\alpha = \sqrt{\sqrt{5} + 2}$ değeri, değişim aralığının dışında kaldığı için dikkate alınmamıştır.

$$\tan\alpha = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$$

$$\Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan\alpha - 1}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{2 \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{3 - \sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}{2} \quad \text{olur.}$$

Bu değerler, $x = a \cdot \tan\alpha \cdot \cos 2\alpha$ ifadesinde yerlerine konulursa, x'in a türünden en büyük değeri,

$$x = \frac{\sqrt{10\sqrt{5} - 22}}{2} \cdot a$$

olarak bulunur.