Örnek -1

$n \in N^{+}$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$\sqrt[n]{1+n} = 1 + f(n)$ olsun.

$f(n) \geq 0$ olacağı açıktır.

$\sqrt[n]{1+n} = 1 + f(n) \Rightarrow 1 + n = \left[1 + f(n)\right]^{n}$

sağ tarafı Binom Teoremine göre açalım:

$$1 + n = 1 + n \cdot f(n) + \frac{n(n+1)}{2} \cdot \left[f(n)\right]^{2} + ...$$

$$\Rightarrow 1 + n \geq 1 + \frac{n(n+1)}{2} \cdot \left[f(n)\right]^{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left[f(n)\right]^{2} \leq \frac{2n}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(0) \leq \lim_{n\to\infty}\left[f(n)\right]^{2} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty}\left[f(n)\right]^{2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[f(n)\right]^{2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(n) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+n} = 1$$

bulunur.

Bu sonucu problemimizin çözümünde kullanalım:

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{1+n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1} \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+n}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

elde edilir.

Örnek -2

$x \in R^{+}$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to\infty} x^{\left(\frac{1}{x}\right)} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$n \in N^{+}$ olmak üzere,

$n \leq x \leq n+1$ olsun.

Her n değeri için,

$\sqrt[n]{n} > 1$ ve $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$ olması,

en azından n'nin büyük değerleri için,

$(n+1)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \leq x^{\frac{1}{x}} \leq n^{\left(\frac{1}{n}\right)}$

sıralamasını yapmamıza olanak verir.

$$(n+1)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \leq x^{\frac{1}{x}} \leq n^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(n+1)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \leq \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} \leq \lim_{n\to\infty} n^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

elde edilir.

Örnek -3

$x \in R^{+}$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to 0^{+}} x^{x}$$

değerini bulunuz.

Çözüm

$x = \frac{1}{t}$ dönüşümü yapalım.

x, 0'a sağdan yaklaşırken
t, $+\infty$'a ıraksayacaktır.

$$\lim_{x\to 0^{+}} x^{x} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{t}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^{+}} x^{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\left(\frac{1}{t}\right)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^{+}} x^{x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty} t^{\left(\frac{1}{t}\right)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^{+}} x^{x} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^{+}} x^{x} = 1$$

elde edilir.

Örnek -4

$x \in R^{+}$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to 0^{+}} \frac{\ln x}{x}$$

değerini bulunuz.

Çözüm

$x = \frac{1}{t}$ dönüşümü yapalım.

x, 0'a sağdan yaklaşırken
t, $+\infty$'a ıraksayacaktır.

$$\lim_{x\to 0^{+}} \frac{\ln x}{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^{+}} \frac{\ln x}{x} = \lim_{t\to\infty} \left(-t \cdot \ln t\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^{+}} \frac{\ln x}{x} = \lim_{t\to\infty} \left[-\ln\left(t^{t}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^{+}} \frac{\ln x}{x} = -\ln\left[\lim_{t\to\infty} \left(t^{t}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^{+}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

elde edilir.

Örnek -5

$x \in R^{+}$ olmak üzere,

$$\lim_{x\to 0^{+}} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$$

değerini bulunuz.

Çözüm

$$\lim_{x\to 0^{+}} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) = \lim_{x\to 0^{+}} \left(\frac{1 + x \cdot \ln x}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^{+}} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) = \lim_{x\to 0^{+}} \left(\frac{1 + \ln\left(x^{x}\right)}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^{+}} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) = +\infty$$

bulunur.

Örnek -6

$\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\cdot \ln\left(x^2-1\right)$ değerini bulunuz.

Çözüm

$x-1=t$ dönüşümü yapalım:

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\ln\left(x^2-1\right)$$
$$=\lim_{t\to 0^+} t\cdot \ln\left(t^2+2t\right)$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\ln\left[t^t\cdot(t+2)^t\right]$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\ln t^t+\lim_{x\to 0^+}\ln(t+2)^t$$
$$=\ln\left(\lim_{x\to 0^+}t^t\right)+\ln\left(\lim_{x\to 0^+}(t+2)^t\right)$$
$$=0$$

bulunur.

Örnek -7

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{2x^2}$ değerini bulunuz.

Çözüm

$\cos x=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$ diyelim:

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2x^2}}$$

$2\sin^2\dfrac{x}{2}=t$ dönüşümü yaparsak,

$x=2\cdot \operatorname{Arc}\sin\sqrt{\dfrac{t}{2}}$ olur.

$$L=\lim_{x\to 0}\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2x^2}}$$
$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\ln(1-t)^{\frac{1}{8\cdot\left(\operatorname{Arc}\sin\sqrt{\frac{t}{2}}\right)^2}}$$
$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\ln\left[(1-t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{t}{8\cdot\left(\operatorname{Arc}\sin\sqrt{\frac{t}{2}}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\ln\left[(1-t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{t}{8\cdot\left(\operatorname{Arc}\sin\sqrt{\frac{t}{2}}\right)^2}}$$
$$\Rightarrow L=\lim_{t\to 0}\frac{t}{8\cdot\left(\operatorname{Arc}\sin\sqrt{\frac{t}{2}}\right)^2}\cdot\lim_{t\to 0}\ln\left[(1-t)^{\frac{1}{t}}\right]$$

Soldaki limit için $u=\operatorname{Arc}\sin\sqrt{\dfrac{t}{2}}$ dönüşümü yaparsak, $t=2\sin^2 u$ olur.

$$\Rightarrow L=\lim_{u\to 0}\frac{2\sin^2 u}{8\cdot u^2}\cdot\ln\lim_{t\to 0}\left[(1-t)^{\frac{1}{t}}\right]$$
$$\Rightarrow L=\frac{1}{4}\cdot\ln\left(e^{-1}\right)$$
$$\Rightarrow L=-\frac{1}{4}\qquad\text{bulunur.}$$