$$y = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

1. $f(x) = a \quad (a \in R) \quad$ ise $\quad f'(x) = ?$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a-a}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0$$

2. $f(x) = x \quad$ ise $\quad f'(x) = ?$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1$$

3. $f(x) = ax^n \quad (n \in N^+) \quad$ ise $\quad f'(x) = ?$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^n - ax^n}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = a\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = a\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)\left[(x+h)^{n-1}+\dots\right]}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = a\cdot\lim_{h\to 0}\Big[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}\cdot x$$
$$+(x+h)^{n-3}\cdot x^2+\dots+x^{n-1}\Big]$$

$$\Rightarrow f'(x) = a\cdot n\cdot x^{n-1}$$

4. $f(x) = \frac{1}{x} \quad$ ise $\quad f'(x) = ?$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

5. $f(x) = \sqrt{x} \quad$ ise $\quad f'(x) = ?$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

6. $F(x) = f(x)+g(x) \quad$ ise $\quad F'(x) = ?$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{h}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\Rightarrow F'(x) = f'(x)+g'(x)$$

7. $F(x) = f(x)\cdot g(x) \quad$ ise $\quad F'(x) = ?$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x+h)\cdot g(x+h)\right]-\left[f(x)\cdot g(x)\right]}{h}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \lim_{h\to 0}\Big[\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$
$$+\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x+h)\cdot g(x)}{h}\Big]$$

$$\Rightarrow F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)$$
$$+\lim_{h\to 0}f(x+h)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\Rightarrow F'(x) = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

8. $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ise $F'(x)=?$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$\Rightarrow F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$\Rightarrow F'(x)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}+\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}\right]$$

$$\Rightarrow F'(x)=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\left[f(x+h)-f(x)\right]\cdot g(x)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}-\frac{f(x)\cdot\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}\right\}$$

$$\Rightarrow F'(x)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)-f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$\Rightarrow F'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

9. $f(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ ise $f'(x)=?$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{g(x+h)}-\dfrac{1}{g(x)}}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\left[-\frac{g(x+h)-g(x)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}\right]$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{\left[g(x)\right]^2}\cdot g'(x)\qquad\Rightarrow f'(x)=\frac{-g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

10. $f(x)=\ln x$ ise $f'(x)=?$

$e=\lim\limits_{h\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{h}\right)^h$ ya da $e=\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$

tanımını kullanacağız.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

$\dfrac{h}{x}=t$ diyelim.

$\dfrac{1}{h}=\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{1}{x}$ ve $h\to 0$ iken $t\to 0$ olur.

$$\Rightarrow f'(x)=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\cdot\ln e\qquad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$$

11. $f(x)=e^x$ ise $f'(x)=?$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=e^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

$e^h-1=t$ diyelim.

$h=\ln(t+1)$ ve $h\to 0$ iken $t\to 0$ olur.

$$\Rightarrow f'(x)=e^x\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}$$

$$\Rightarrow f'(x)=e^x\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\cdot\ln(t+1)}$$

$$\Rightarrow f'(x)=e^x\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=e^x\cdot\frac{1}{\ln\lim\limits_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=e^x\cdot\frac{1}{\ln e}$$

$$\Rightarrow f'(x)=e^x$$

12. $f(x)=a^x$ ise $f'(x)=?$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=a^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$a^h-1=t$ diyelim.

$h=\log_a(t+1)$ ve $h\to 0$ iken $t\to 0$ olur.

$$\Rightarrow f'(x)=a^x\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)}$$

$$\Rightarrow f'(x)=a^x\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\cdot\log_a(t+1)}$$

$$\Rightarrow f'(x)=a^x\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=a^x\cdot\frac{1}{\log_a\lim\limits_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=a^x\cdot\frac{1}{\log_a e}\qquad\Rightarrow f'(x)=a^x\cdot\ln a$$

13. $f(x)=\sin x$ ise $f'(x)=?$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(\frac{x+h-x}{2})\cdot\cos(\frac{x+h+x}{2})}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cdot\cos(x+\frac{h}{2})}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{1}\cdot\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})$$

$$\Rightarrow f'(x)=\cos x$$

14. $f(x)=\cos x$ ise $f'(x)=?$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin(\frac{x+h-x}{2})\cdot\sin(\frac{x+h+x}{2})}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cdot\sin(x+\frac{h}{2})}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{1}\cdot\lim_{h\to 0}\left[-\sin(x+\frac{h}{2})\right]$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\sin x$$

15. $f(x)=\tan x$ ise $f'(x)=?$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h-x)}{h\cdot\cos(x+h)\cdot\cos x}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}}_{1}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)\cdot\cos x}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x};\qquad \text{veya}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow f'(x)=1+\tan^2 x$$

16. $F(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$ ise $F'(x) = ?$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)-f(g(x))}{h}$$

$g(x+h)-g(x) = k$ diyelim.

$g(x+h) = g(x)+k$ ve

$h \to 0$ iken $k \to 0$ olur.

$$\Rightarrow F'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(g(x)+k)-f(g(x))}{k}\cdot\frac{k}{h}\right]$$

İlk çarpanda $g(x) = u$ koyalım. Bunu, görmeyi kolaylaştırması için yapıyoruz.

$$\Rightarrow F'(x) = \underbrace{\lim_{k\to 0}\frac{f(u+k)-f(u)}{k}}_{f'(u)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

$$\Rightarrow F'(x) = f'(u)\cdot g'(x)$$

$$\Rightarrow F'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Bu son formül. "Zincir Kuralı" adıyla şöyle de ifade edilir:

$z = f(u)$, $u = g(x)$ ve x'in Δx artmasına karşılık u ve z fonksiyonlarındaki artmalar Δu ve Δz olsun.

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta z}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

u ve z türevleri var olan fonksiyonlar olarak kabul edilirse, $\Delta x \to 0$ iken $\Delta u \to 0$ olur.

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta z}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x})$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

17. $g(x) = f^{-1}(x) = y$ ise $g'(x) = ?$

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow f \circ g(x) = x \Rightarrow f(g(x)) = x$$

$$f(g(x)) = x \Rightarrow f'(g(x))\cdot g'(x) = 1$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Bu sonucu şöyle de ifade edebiliriz:

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y))}$$

18. $f(x) = \arcsin x = y$ ise $f'(x) = ?$

$$y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y$$

Zincir kuralı işimizi çok kolaylaştırır.

$$x = \sin y \Rightarrow 1 = \frac{d(\sin y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 1 = \cos y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\cos y}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aynı şekilde;

$$f(x) = \arccos x \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctan x \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \operatorname{arc}\cot x \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

bulunur. Ters fonksiyonların türevleri doğrudan doğruya türev tanımıyla da bulunabilir. Ancak bu oldukça işlemi bol bir yoldur. Buraya kadar her bilgiyi öncekinin üzerine koyarak geldiğimize göre, elde ettiğimiz bilgileri işimizi kolaylaştırmak için kullanmalıyız.

19. $f(x) = \sqrt[m]{x} = y \quad (m \in Z^+)$ ise $f'(x) = ?$

$$\sqrt[m]{x} = y \Rightarrow x = y^m \quad \Rightarrow 1 = \frac{d(y^m)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow 1 = my^{m-1} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{my^{m-1}}$$

Burada, y^{m-1} değerini x türünden bulalım.

$$y^m = x \Rightarrow y^{m-1} = \frac{x}{y} = \frac{x}{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m]{x^{m-1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{my^{m-1}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{m \cdot \sqrt[m]{x^{m-1}}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{m \cdot \sqrt[m]{x^{m-1}}}$$

20. Kapalı fonksiyonların türevlerini zincir kuralından yararlanarak alacağız.

Bunu bir örneklerle gösterelim:

a. $x^2y + xy^2 = 6 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = ?$

$$\frac{d(x^2y)}{dx} + \frac{d(xy^2)}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d(x^2)}{dx} \cdot y + x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dx}{dx} \cdot \frac{d(y^2)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2x \cdot y + x^2 \cdot y' + 1 \cdot 2y \cdot y' = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2xy}{x^2 + 2y}$$

b. $x \cdot \sin^2 y = y \cdot \sin^2 x$ ise $y' = ?$

$$1 \cdot \sin^2 y + x \cdot 2\sin y \cdot \cos y \cdot y' = y' \cdot \sin^2 x + y \cdot 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow y' \cdot x \cdot \sin 2y - y' \cdot \sin^2 x = y \cdot \sin 2x - \sin^2 y$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y \cdot \sin 2x - \sin^2 y}{x \cdot \sin 2y - \sin^2 x}$$

21. $F(x) = e^{f(x)}$ ise $F'(x) = ?$

$F'(x)$, bileşke fonksiyonun türevini alma kuralı ile,

$F'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ olarak bulunur.

Biz bunu bir de türev tanımı ile bulalım:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{f(x+h)} - e^{f(x)}}{h}$$

$f(x+h) - f(x) = k$ diyelim.

$f(x+h) = f(x) + k$ ve

$h \to 0$ iken $k \to 0$ olur.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{f(x)+k} - e^{f(x)}}{h}$$

$$\Rightarrow F'(x) = e^{f(x)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^k - 1}{h}$$

$$\Rightarrow F'(x) = e^{f(x)} \cdot \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^k - 1}{h} \cdot \frac{k}{h}\right)$$

$$\Rightarrow F'(x) = e^{f(x)} \cdot \underbrace{\lim_{k \to 0} \frac{e^k - 1}{k}}_{1(\text{soru}11)} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)}$$

$$\Rightarrow F'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

22. $f(x) = x \cdot \ln x$ ise $f'(x) = ?$

$f'(x)$, çarpımın türevi kuralı ile bulunur.

Biz türev tanımı yoluyla bulalım:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) \cdot \ln(x+h) - x \cdot \ln x}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x \cdot \ln(x+h) + h \cdot \ln(x+h) - x \cdot \ln x}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x \cdot \ln(x+h) - x \cdot \ln x}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot \ln(x+h)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}}_{\frac{1}{x}(\text{soru}-10)} + \underbrace{\lim_{h\to 0} \ln(x+h)}_{\ln x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \ln x$$

23. $f(x) = x^x$ ise $f'(x) = ?$

$f(x) = x^x \Rightarrow \ln f(x) = x \cdot \ln x \Rightarrow f(x) = e^{x\cdot \ln x}$

olur. $f(x) = e^{x\cdot\ln x}$ fonksiyonunun türevinin türev tanımı ile alınması istenirse, 21. ve 22. sorulardaki çözüm işlemleri birlikte yürütülür.
Biz, iki tarafın logaritmasını alarak zincir kuralını uygulayacağız:

$f(x) = x^x \Rightarrow \ln f(x) = x \cdot \ln x$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot (1 + \ln x)$$

$\Rightarrow f'(x) = x^x \cdot (1 + \ln x)$ bulunur.

23. $f(x) = x^{\ln x}$ ise $f'(x) = ?$

22. soruda önerilenler burada da geçer-lidir.

$f(x) = x^{\ln x} \Rightarrow \ln f(x) = \ln x \cdot \ln x = \ln^2 x$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x^{x-1} \cdot \ln x$$

24. $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$ ise $f'(x) = ?$

$f(x) = (\ln x)^{\ln x} \Rightarrow \ln f(x) = \ln x \cdot \ln(\ln x)$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot \left[\frac{1}{x}\ln(\ln x) + \frac{1}{x}\right]$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot (\ln x)^{\ln x} \cdot \left[1 + \ln(\ln x)\right]$$

25. $y^x = x^y - x - y + 6$ ise $y' = ?$

$y^x = e^{x\cdot\ln y}$ ve $x^y = e^{y\cdot\ln x}$ olduğunu düşünerek zincir kuralını uygulayacağız.

$$y^x \cdot (\ln y + \frac{1}{y} \cdot y' \cdot x) = x^y \cdot (y' \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot y') - 1 - y'$$

Parantezler açılıp y' çekilirse;

$$y' = \frac{1 + y^x \cdot \ln y}{x^y \cdot \ln x - x \cdot y^{x-1} + y^{x-1} - 1}$$ bulunur.

26. $y = \sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ ise $y' = ?$

$$\ln y = \frac{n}{m}\ln x \quad \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{x} \cdot y \quad \Rightarrow y' = \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{x} \cdot \sqrt[m]{x^n}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{n}{m} \cdot \sqrt[m]{x^{n-m}} \quad \Rightarrow y' = \frac{n}{m} \cdot x^{\frac{n}{m}-1}$$

Böylece, üssün doğal sayı olduğu durumda bulduğumuz kuralın, üssün rasyonel sayı olması durumunda da geçerli olduğu gösterilmiş olur.