

Soru

$P(x) = x^{51} + 51$ polinomunun $x - 2$ ile bölünmesinde elde edilen bölüm $Q(x)$ 'tir.

Buna göre; $H(x) = Q(x) + x^{25}$ polinomunun $x - 4$ ile bölünmesinde kalan kaçtır?

$$\begin{aligned} H(4) &= 4^{50} + 2 \cdot 4^{49} + 2^2 \cdot 4^{48} + \dots + 2^{49} \cdot 4 + 2^{50} + 4^{25} \\ \Rightarrow H(4) &= 2^{100} + 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^{51} + 2^{50} + 2^{50} \\ \Rightarrow H(4) &= 2^{100} + 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^{51} + 2^{51} \\ \Rightarrow H(4) &= 2^{100} + 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^{52} \\ \Rightarrow H(4) &= 2^{101} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Çözüm-I

$P(x)$ polinomunu Horner Yöntemi ile $x - 2$ 'ye bölelim:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 51 \\ 2 & & 2 & 4 & \dots & 2^{50} & 2^{51} \\ \hline & 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{50} & 2^{51} + 51 \end{array}$$

$Q(x) = x^{50} + 2x^{49} + 2^2x^{48} + \dots + 2^{49}x + 2^{50}$ ve
 $H(x) = x^{50} + 2x^{49} + 2^2x^{48} + \dots + 2^{49}x + 2^{50} + x^{25}$ olur.

$H(x)$ 'in $x-4$ ile bölünmesinde kalan $H(4)$ 'tür.
 $H(4) = 4^{50} + 2 \cdot 4^{49} + 2^2 \cdot 4^{48} + \dots + 2^{49} \cdot 4 + 2^{50} + 4^{25}$
 $\Rightarrow H(4) = 2^{100} + 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^{51} + 2^{50} + 2^{50}$
 $\Rightarrow H(4) = 2^{100} + 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^{51} + 2^{51}$
 $\Rightarrow H(4) = 2^{100} + 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^{52}$
 $\Rightarrow H(4) = 2^{101}$ bulunur.

Çözüm-II
Yalçın Yılmaz Hocamın Çözümü

$P(x)$ polinomunun $x - 2$ ile bölünmesinde kalan $P(2)$ 'dir.

$P(2) = 2^{51} + 51$ olur.
 $P(x) - P(2)$, $x-2$ ile tam bölünür.
 $P(x) - P(2) = x^{51} + 51 - 2^{51} - 51$
 $\Rightarrow P(x) - P(2) = x^{51} - 2^{51}$
 $\Rightarrow Q(x) = \frac{P(x) - P(2)}{x - 2} = \frac{x^{51} - 2^{51}}{x - 2}$
 $\Rightarrow Q(x) = x^{50} + 2 \cdot x^{49} + 2^2 \cdot x^{48} + \dots + 2^{50}$
 $\Rightarrow H(x) = x^{50} + 2x^{49} + 2^2x^{48} + \dots + 2^{49}x + 2^{50} + x^{25}$
 olur.

$H(x)$ 'in $x-4$ ile bölünmesinde kalan $H(4)$ 'tür.