Problem -4

$$L : R^3 \to R^3, \quad L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanan;

a. L dönüşümü örten midir?

b. Görüntü kümesi, (imL), için bir taban bulunuz.

c. L'nin çekirdeğini, (çekL), bulunuz.

d. L bire bir midir?

Çözüm

a.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dönüşüm matrisinin rankı 2 olduğundan, görüntü uzayı R^3ün 2 boyutlu bir alt uzayıdır. Öyleyse; L örten değildir.

b. $L(\overrightarrow{u_1}) = (1,2,1) = v_1$,

$L(\overrightarrow{u_2}) = (3,7,4) = v_2$ ve

$L(\overrightarrow{u_3}) = (1,4,3) = v_3$ olur.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\{(1,2,1),(0,1,1)\}$ kümesi görüntü kümesinin bir tabanı olarak alınabilir.

c.

$$(\text{çekL}) = \{(u_1,u_2,u_3) \mid L(u_1,u_2,u_3) = (0,0,0)\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} u_1 + 3u_2 + u_3 &= 0 \\ u_2 + 2u_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$u_1 = m$ denirse; $u_2 = -\frac{2}{5}m$ ve $u_3 = -\frac{1}{5}m$ olur.

(çekL), $(u_1,u_2,u_3) = m \cdot \left(1, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ vektörlerinin kümesidir. Çekirdek uzayının bir tabanı, vektörler kesirden kurtarılarak $\{(5,-2,-1)\}$ kümesi olarak alınabilir.

$$(\text{çekL}) = \{m \cdot (5,-2,-1) \mid m \in R\}$$

d. Çekirdek uzayının boyutu sıfır olmadığından L bire bir değildir.