# Parabol ve İkinci Dereceden Denklem
# -Denklemin Köklerinin Bir Reel Sayı ile Karşılaştırılması-

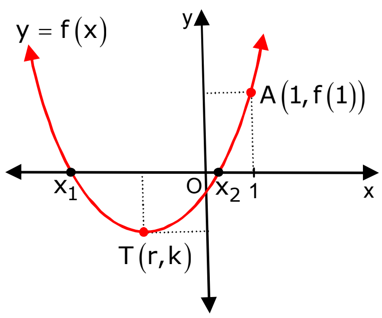
Muharrem Şahin

*2. dereceden bir denklemin gerçek köklerinin bir reel sayı ile karşılaştırılması konusu, yeni matematik programında yoktur.*
*Burada; konu, parabol kavramının uygulaması olarak ele alınmıştır.*
*Problemlerin çözümünde, önceki programların ve soru tiplerinin yönlendirdiği ezberler kesinlikle kullanılmamalıdır.*

## Örnek Problem -1

$x^2-2(m-1)x-2m=0$ denkleminin köklerinin 1'den küçük olması için, m parametresinin değer alabileceği en geniş aralığı bulunuz.

## Çözüm




$x^2-2(m-1)x-2m=0$ denkleminin kökleri, $f(x)=x^2-2(m-1)x-2m$ parabolünün x eksenini kestiği noktaların apsisleridir. $x^2$'nin kat sayısı pozitif olduğu için, parabolün kolları $+y$ yönündedir.
Parabolün tepe noktasının apsisi,
$r=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{-b}{2a}=m-1$'dir.

Belirtilen koşullara göre;

$$\left.\begin{array}{l} f(1)>0 \\ r<1 \\ f(r)\le 0 \end{array}\right\} \text{ olmalıdır.}$$

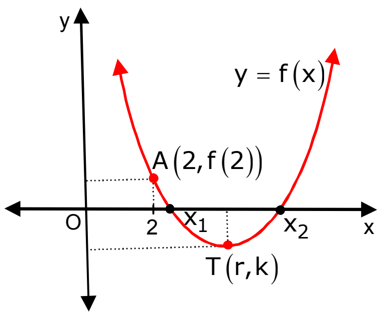
$$f(1)>0 \Rightarrow -4m+3>0 \qquad (1)$$
$$r<1 \Rightarrow m-1<1 \qquad (2)$$
$$f(r)\le 0 \Rightarrow -m^2-1\le 0 \qquad (3)$$

$(1)$, $(2)$ ve $(3)$'ten $m<\dfrac{3}{4}$ bulunur.

## Örnek Problem -2

$x^2-2mx+9=0$ denkleminin köklerinin 2'den büyük olması için, m parametresinin değer alabileceği en geniş aralığı bulunuz.

## Çözüm




$f(x)=x^2-2mx+9$ olmak üzere, belirtilen koşullara göre;

$$\left.\begin{array}{l} f(2)>0 \\ r>2 \\ f(r)\le 0 \end{array}\right\} \text{ olmalıdır.}$$

$f(2) > 0 \Rightarrow -4m + 13 > 0 \qquad (1)$

$r > 2 \Rightarrow m > 2 \qquad (2)$

$f(r) \le 0 \Rightarrow -m^2 + 9 \le 0 \qquad (3)$

$(1)$, $(2)$ ve $(3)$'ten $3 \le m < \dfrac{13}{4}$ bulunur.

## Örnek Problem -3

$mx^2 - 3(m-2)x - m + 1 = 0$ denkleminin $x_1 < 2 < x_2$ koşuluna uyan iki kökünün olması için, m parametresinin değer alabileceği en geniş aralığı bulunuz.

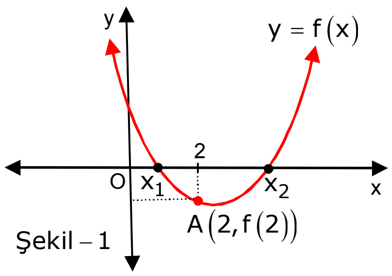
## Çözüm

$f(x) = mx^2 - 3(m-2)x - m + 1$ olmak üzere, belirtilen koşullara göre;

**I.** $m > 0$ ve $f(2) < 0$ veya $\quad$ (Şekil – 1)

**II.** $m < 0$ ve $f(2) > 0$ olmalıdır. (Şekil – 2)

**I.**



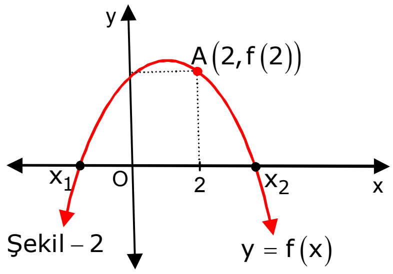

Şekil – 1

$m > 0$ ve $f(2) < 0$

$\Rightarrow m > 0$ ve $-3m + 13 < 0$

$\Rightarrow m > \dfrac{13}{3} \qquad (1)$

**II.**




Şekil – 2

$m < 0$ ve $f(2) > 0$

$\Rightarrow m < 0$ ve $-3m + 13 > 0$

$\Rightarrow m < 0 \qquad (2)$

$(1)$ ve $(2)$'den, $m \in R - \left[0, \dfrac{13}{3}\right]$ bulunur.

## Örnek Problem -4

$(m-3)x^2 + 3x + 2m = 0$ denkleminin $-1 < x_1 < 1 < x_2$ koşuluna uyan iki kökünün olması için, m parametresi-nin değer alabileceği en geniş aralığı bulunuz.

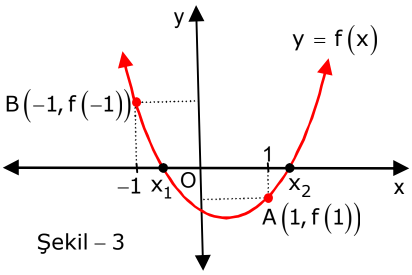
## Çözüm

$f(x) = (m-3)x^2 + 3x + 2m$ olmak üzere, belirtilen koşullara göre;

**I.** $m - 3 > 0$, $f(-1) > 0$ ve $f(1) < 0$ veya (Şekil – 3)

**II.** $m - 3 > 0$, $f(-1) > 0$ ve $f(1) < 0$ olmalıdır. (Şekil – 4)

**I.**



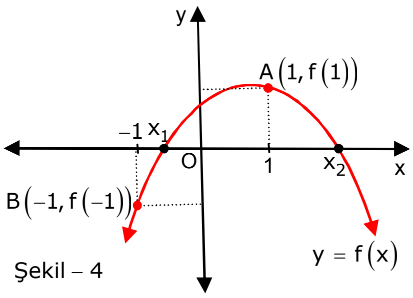

Şekil – 3

$m-3>0,\ f(-1)>0$ ve $f(1)<0$

$\Rightarrow m>3,\ 3m-6<0$ ve $3m<0$

$\Rightarrow m\in\varnothing$ $\qquad (1)$

**II.**




Şekil – 4

$m-3<0,\ f(-1)<0$ ve $f(1)>0$

$\Rightarrow m<3,\ 3m-6>0$ ve $3m>0$

$\Rightarrow 2<m<3$ $\qquad (2)$

$(1)$ ve $(2)$'den, $m\in(2,3)$ bulunur.

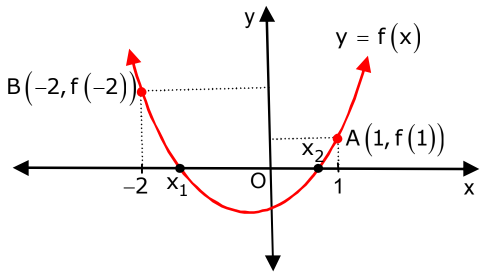
## Örnek Problem -5

$x^2-2mx+m+2=0$ denkleminin $-2<x_1<x_2<1$ koşuluna uyan iki kökünün olması için, m parametresinin değer alabileceği en geniş aralığı bulunuz.

## Çözüm

$f(x)=x^2-2mx+m+2$ olmak üzere, belirtilen koşullara göre;

$f(-2)>0,\ \ \Delta>0$ ve $f(1)>0$ olmalıdır.




$f(-2)>0,\ \ \Delta>0$ ve $f(1)>0$

$\Rightarrow 5m+6>0,\ m^2-m-2>0$ ve $-m+3>0$

$\Rightarrow m>\dfrac{-6}{5},\ (m<-1$ veya $m>2)$ ve $m<3$

$\Rightarrow 2<m<3$

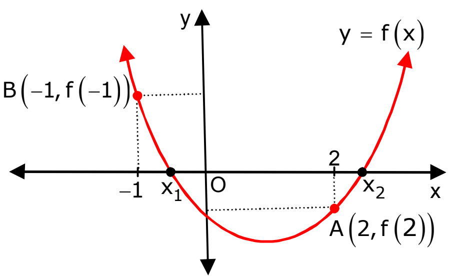
$\Rightarrow m\in(2,3)$ bulunur.

## Örnek Problem -6

$f(x)=x^2+mx+n=0$ denkleminde $f(2)<0$ ve $f(2)\cdot f(-1)<0$ olduğuna göre; denklemin köklerini $-1$ ve $2$ sayıları ile karşılaştırınız.

## Çözüm

$f(2) < 0$ ve $f(2) \cdot f(-1) > 0$
$\Rightarrow f(-1) > 0$ ve $f(2) > 0$ olur.




Verilen koşullar, ancak şekilde belirtilen durumda sağlanabilir.

$-1 < x_1 < 2 < x_2$ olur.

## Örnek Problem -7

$x^2 - 6(m+1)x + 12m + 5 = 0$ denkleminde $m > 0$ olduğuna göre, denklemin köklerini 1 ve 2 sayıları ile karşılaştırınız.

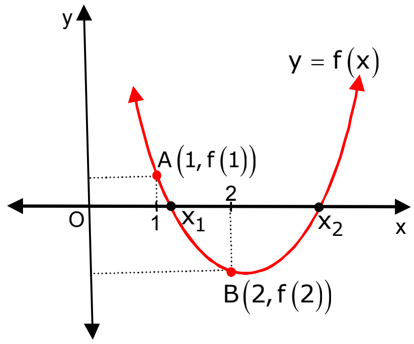
## Çözüm

$f(x) = x^2 - 6(m+1)x + 12m + 5$ olmak üzere;
$m > 0$ koşuluyla $f(1)$, $f(2)$ ve $\Delta$ değerlerini incelemeliyiz.

$$m > 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} f(1) &= 6m + 4 > 0 \\ f(2) &= -3 < 0 \end{aligned}\right\}$$

Bu durumda, $\Delta$'nın incelenmesine gerek kalmaz. $\Delta > 0$ olur.

$f(1) > 0$ ve $f(2) < 0$ olduğuna göre
$1 < x_1 < 2 < x_2$ olduğu görülür.




## Örnek Problem -8

$x^2 - mx + m + 2 = 0$ denkleminin köklerinden biri 2'den büyüktür.
Buna göre; diğer kökün bulunabileceği en geniş aralığı bulunuz.

## Çözüm

Denklemin gerçek kökleri $x_1$ ve $x_2$ olsun.

$x_1 + x_2 = m \qquad (1)$
$x_1 \cdot x_2 = m + 2 \qquad (2)$
$x_1 > 2 \qquad (3)$

$(1)$, $(2)$ ve $(3)$'ten,

$$x_1 = \frac{x_2 + 2}{x_2 - 1} > 2$$

$\Rightarrow 1 < x_2 < 4$

bulunur.

## Örnek Problem -9

$x^2 + ax + b = 0$ denkleminin kökleri $0 < x_1 < x_2$ koşulunu sağlamaktadır. $ay^2 + by + 1 = 0$ denkleminin kökleri $y_1$ ile $y_2$ ve $|y_1| < |y_2|$ olduğuna göre, bu kökleri 0 sayısı ile karşılaştırınız.

## Çözüm

$x_1 + x_2 = -a > 0 \Rightarrow a < 0$ ve $x_1 \cdot x_2 = b > 0$ olmalıdır.

$y_1 \cdot y_2 = \frac{1}{a} < 0$ olduğundan, kökler ters işaretlidir.

$y_1 + y_2 = -\frac{b}{a} > 0$ olduğundan, mutlak değerce büyük olan kök pozitiftir.

$|y_1| < |y_2| \Rightarrow y_1 < 0 < y_2$

## Örnek Problem -10

$(m+1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ denkleminin ters işaretli iki gerçek kökü vardır. Kökler $-2$'den büyük olduğuna göre, m parametresinin değer alabileceği en geniş aralığı bulunuz.

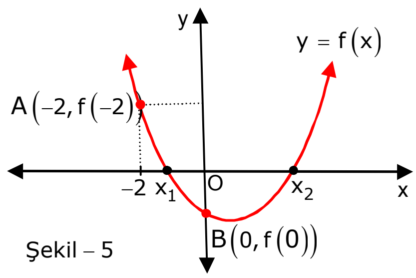
## Çözüm

$f(x) = (m+1)x^2 - 2mx + m + 3$ olmak üzere, belirtilen koşullara göre;

**I.** $m+1 > 0,\ f(-2) > 0$ ve $f(0) < 0$ veya (Şekil – 5)

**II.** $m+1 < 0,\ f(-2) < 0$ ve $f(0) > 0$ olmalıdır. (Şekil – 6)

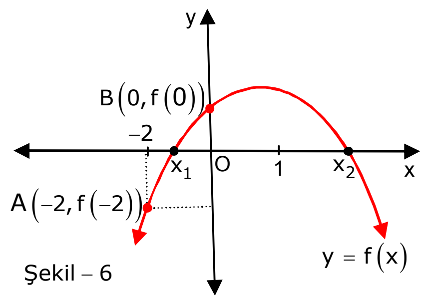
**I.**




Şekil – 5

$m+1 > 0,\ f(-2) > 0$ ve $f(0) < 0$
$\Rightarrow m > -1,\ 9m + 7 > 0$ ve $m + 3 < 0$
$\Rightarrow m \in \varnothing$ (1)

**II.**




Şekil – 6

$m+1 < 0,\ f(-2) < 0$ ve $f(0) > 0$
$\Rightarrow m < -1,\ 9m + 7 < 0$ ve $m + 3 > 0$
$\Rightarrow -3 < m < -1$ (2)

(1) ve (2)'den, $m \in (-3, -1)$ bulunur.