Problem – 1 (TMOZ)

$\lim\limits_{x\to\pi}\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)^{x-\pi}$ değerini bulunuz.

Çözüm

$$y=\left(\frac{1}{\sin x}\right)^{x-\pi}$$

$$\Rightarrow \ln y=(x-\pi)\cdot\ln\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi}(\ln y)=\lim_{x\to\pi}\left[(\pi-x)\cdot\ln(\sin x)\right]$$

$0\cdot\infty$ belirsizliğini $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürerek, L'Hospital Kuralını uygulayabiliriz:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}(\ln y)&=\lim_{x\to\pi}\left[(\pi-x)\cdot\ln(\sin x)\right]\\&=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\pi-x}}\right]\\&=\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{(\pi-x)^2}}\right]\\&=\lim_{x\to\pi}\left[\cos x\cdot(\pi-x)\right]\\&\qquad\cdot\lim_{x\to\pi}\left[\frac{(\pi-x)}{\sin(\pi-x)}\right]\\&=0\cdot 1\\&=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi}(y)=e^0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi}\left(\frac{1}{\sin x}\right)^{x-\pi}=1 \quad \text{bulunur.}$$

Not

$(\pi,2\pi)$ aralığında fonksiyon tanımsızdır.

Bulduğumuz değer, soldan limittir.

Problem – 2 (TMOZ)

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ değerini bulunuz.

Çözüm

$$y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \ln y=\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$\infty\cdot 0$ belirsizliğini $\dfrac{0}{0}$ belirsizliğine dönüştürerek, L'Hospital Kuralını uygulayabiliriz:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\ln y)&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}\right):\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{1}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}\right)\\&\qquad\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)}_{1}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-x\cdot\sin x-\cos x}{2x}\right)\\&=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(y)=e^0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=1 \quad \text{bulunur.}$$