

Örnek Problem - 1

"Ali çalışırsa derslerinde başarılı olur;
çalışmazsa gününü gün eder.
Ama;
derslerinde başarılı olmazsa, gününü gün
edemez.
O halde;
Ali derslerinde başarılı olur."

çıkarmının geçerli olup olmadığını
denetleyiniz.

Açıklama

Eldeki yargılardan, usa vurma ile, bir **sonuca** varılmasına **çıkarm** denir. Veri durumundaki önermelerden oluşan eldeki yargılara çıkarmın **öncülleri** adı verilir. Bir çıkarmda sonuç **o hâlde, demek ki, buna göre**, ... gibi sözlerle öncüllere bağlanır.

Örneğin;
A: $p \wedge q \Rightarrow r$
B: $p \vee q$
O hâlde,
C: $p \Rightarrow r$

biçimindeki bir **akıl yürütme** (usa vurma) bir **çıkarm**dır. Bu çıkarmda, önermeler sembolleştirilmiş olduğu için buna, **sembolik çıkarm** denir.

Bu çıkarmda, A ve B önermeleri **öncüller**, C önermesi **sonuçtur**.

Bu öncüllerden bu sonuca varılması doğru mudur?

Bu sorunun yanıtının araştırılmasına **çıkarmın geçerliliğinin denetlenmesi** denir. Mantıkta bunun çeşitli yolları vardır. Biz, burada çeşitli yollara girmeyeceğiz. Çıkarımların geçerliliğini **gerektirme** kavramından yararlanarak denetleyeceğiz. Öncüllerin kesişimi sonucu gerektiriyorsa **çıkarm geçerlidir**, diyeceğiz.

Örneğimizde öncüllerin kesişimi $A \wedge B$ dir. $A \wedge B$ 'nin C'yi gerektirmesi, $A \wedge B \Rightarrow C$ önermesinin bir totoloji olması demektir.

"Ali çalışırsa derslerinde başarılı olur;
çalışmazsa gününü gün eder.
Ama;
derslerinde başarılı olmazsa, gününü gün
edemez.
O halde;
Ali derslerinde başarılı olur."

çıkarmında p, q, r, ... gibi sembolik önermeler yerine, sözlerle ifade edilmiş önermeler konulmuştur. P, q, r önermelerinin yerine sözlü önermelerin getirilmesi işlemine p, q, r önermelerinin yorumlanması denir. Buna göre; problemde verilen akıl yürütme **yorumlanmış bir çıkarm**dır.

Yorumlanmış bir çıkarmın geçerliliğini, yorumlanmış biçimiyle denetlemek, bizi yanlış sonuca götürebilir.

Yorumlanmış bir çıkarmın geçerli olması için, bir sembolik karşılığının geçerli olması gerekir.

Çözüm

Basit önermeler,

p: "Ali derslerine çalışır."

q: "Ali derslerinde başarılı olur."

r: "Ali gününü gün eder."

olarak sembolleştirilirse, verilen çıkarm,

" A: $(p \Rightarrow q) \wedge (p' \Rightarrow r)$

B: $q' \Rightarrow r'$

O hâlde,

C: q

biçiminde sembolleştirilmiş olur.

$A \wedge B \Rightarrow C$ totoloji ise çıkarm geçerlidir; totoloji değilse geçerli değildir.

$A \wedge B \Rightarrow C$

$$\equiv \underbrace{[(p \Rightarrow q) \wedge (p' \Rightarrow r)] \wedge (q' \Rightarrow r')}_{?} \Rightarrow \underbrace{q}_0$$

$q \equiv 0$ iken,

$$[(p \Rightarrow 0) \wedge (p' \Rightarrow r)] \wedge (1 \Rightarrow r')$$

$$\equiv p' \wedge (p \vee r) \wedge r' \equiv (p \vee r)' \wedge (p \vee r) \equiv 0$$

olur. O halde; $A \wedge B \Rightarrow C$ totoloji olup çıkarm geçerlidir.

Örnek Problem - 2

A: “Zeynep çalışmazsa sınıfını geçemez” önermesinin doğru olması, aşağıdaki önermelerden hangilerinin doğru olmasını gerektirir?

B: “Zeynep çalışırsa sınıfını geçer.”

C: “Zeynep sınıfını geçmişse çalışmıştır.”

D: “Zeynep sınıfını geçememişse çalışmamıştır.”

Çözüm**I. yol**

“Zeynep çalışmazsa sınıfını geçemez”

önermesi şu anlamları taşır:

- “Zeynep çalışırsa sınıfını geçebilir. Ama; geçemeyebilir de.”
- “Zeynep’in sınıfını geçmesi için çalışmaktan başka yolu yoktur.”

Buna göre; B ve D önermeleri doğru olmayabilir. C önermesi doğru olmalıdır.

Açıklama

Burada, bir A önermesi (yargı veya yargılar) verilmiş; bu önermeye dayanarak B, C ve D ile adlandırılmış yargılardan hangilerine ulaşabileceğimizi bulmamız istenmiştir. Verilen koşullu önerme ile nelerin bildirildiği doğru değerlendirildiğinde, önerilen yargılardan hangilerinin doğru olmasının gerektiği kolayca bulunabilir.

Ancak; daha karmaşık durumlarda, doğru sonuca ulaşabilmek için, önermeleri sembolleştirmek ve bu usavurmaya karşılık gelen sembolik önermenin bir totoloji olup olmadığını görmek gerekir.

II. yol

Basit önermeler,

p: “Zeynep çalışır.”

q: “Zeynep sınıfını geçer.”

olarak sembolleştirilirse,

A: $p' \Rightarrow q'$,

B: $p \Rightarrow q$,

C: $q \Rightarrow p$,

D: $q' \Rightarrow p'$

olup geçerliliğini denetleyeceğimiz çıkarımlar; $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$ ve $A \Rightarrow D$ önermelerine karşılık gelirler.

$$A \Rightarrow B \equiv (p' \Rightarrow q') \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$\equiv (p \vee q)' \vee (p' \vee q)$$

$$\equiv p' \vee q$$

olup $A \Rightarrow B$ bir totoloji değildir.

($A \Rightarrow B$ önermesinin bir totoloji olmadığı $p \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ alınarak da gösterilebilir. $p \equiv 1$ ve $q \equiv 0$ olursa $B \equiv 0$, $A \equiv 1$ ve $A \Rightarrow B \equiv 0$ olur.)

A öncülünün doğru olması, B önermesinin doğru olmasını gerektirmez.

$$A \Rightarrow C \equiv (p' \Rightarrow q') \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

$$\equiv (p \vee q)' \vee (q' \vee p)$$

$$\equiv 1$$

olup $A \Rightarrow C$ bir totolojidir.

A öncülünün doğru olması, C önermesinin doğru olmasını gerektirir.

$$A \Rightarrow D \equiv (p' \Rightarrow q') \Rightarrow (q' \Rightarrow p')$$

$$\equiv (p \vee q)' \vee (p' \vee q)$$

$$\equiv p' \vee q$$

olup $A \Rightarrow D$ bir totoloji değildir.

A öncülünün doğru olması, D önermesinin doğru olmasını gerektirmez.

Örnek Problem - 3

A: “Kar beyazdır ve kömür siyahtır.”

O hâlde,

B: “Zümrüt yeşildir.”

çıkarımının geçerliliğini denetleyiniz.

Çözüm

p: “Kar beyazdır.”,

q: “Kömür siyahtır.”,

r: “Zümrüt yeşildir” diyelim.

$A \Rightarrow B \equiv p \wedge q \Rightarrow r$ olup bunun bir totoloji olmadığı açıktır.

Öyleyse; A önermesinin doğru olması, B önermesinin doğru olmasını gerektirmez. Bu akıl yürütme doğru değildir.

Dikkat ediniz!

“Kar beyaz ve kömür siyah ise zümrüt yeşildir.” $[(1 \wedge 1) \Rightarrow 1 \equiv 1]$ önermesi doğru olduğu hâlde, bir gerektirme değildir.

Karın beyaz ve kömürün siyah olması zümrütün yeşil olmasını gerektirmez.

Örnek Problem - 4

Anıl - “Beren veya Ceren doğru söylüyorsa, Deren de doğru söylüyordur.”

Beren - “Ceren veya Deren doğru söylüyorsa, Eren yalan söylüyordur.”

Ceren - “Deren veya Eren yalan söylüyorsa, Anıl doğru söylüyordur.”

Deren - “Anıl veya Eren yalan söylüyorsa, Beren de yalan söylüyordur.”

Eren - “Anıl veya Beren doğru söylüyorsa, Ceren de doğru söylüyordur.”

Bu 5 kişiden yalnız biri doğru söylediğine göre; doğru söyleyen hangisidir?

Çözüm**I. yol**

Yalnız birinin doğru söylediği bilgisi kullanılırsa, Anıl’ın “Beren, Ceren ve Deren yalan söylüyor.” demiş olduğu görülür.

Anıl’ın söylediğini doğru saydığımızda, Ceren yalan söylüyordur.

Ceren’in yalan söylemesi, Anıl’ın yalan söylüyor olmasını gerektirir.

Demek ki; Anıl yalan söylüyor.

Öyleyse; Beren, Ceren ve Deren’den biri doğru söylemektedir.

Beren’in yalan söylüyor olması, Eren’in doğru söylüyor olmasını gerektirir.

Doğru söyleyen Beren, Ceren ve Deren’den biri olduğuna göre; Beren doğru söylemektedir.

II. yol

	I	II	III	IV	V
Anıl	1	0	0	0	0
Beren	0	1	0	0	0
Ceren	0	0	1	0	0
Deren	0	0	0	1	0
Eren	0	0	0	0	1

I, II, III, IV, V seçeneklerinden biri doğrudur.

I. seçenek

Anıl: $(0 \vee 0) \Rightarrow 0 \equiv 1$

Beren: $(0 \vee 0) \Rightarrow 0 \equiv 1$

Anıl’ın doğru söylediği durumda, Beren de doğru söylüyor.

Yalnız bir doğru olduğuna göre, Anıl doğru söylemiyor.

II. seçenek

Anıl: $(1 \vee 0) \Rightarrow 0 \equiv 0$

Beren: $(0 \vee 0) \Rightarrow 0 \equiv 1$

Ceren: $(1 \vee 1) \Rightarrow 0 \equiv 0$

Deren: $(1 \vee 1) \Rightarrow 0 \equiv 0$

Eren: $(0 \vee 1) \Rightarrow 0 \equiv 0$

Demek ki; Beren doğru söylüyor.

III. yol

- a:** "Anıl doğru söylüyor."
b: "Beren doğru söylüyor."
c: "Ceren doğru söylüyor."
d: "Deren doğru söylüyor."
e: "Eren doğru söylüyor." diyelim.

$$\begin{aligned} a &\equiv (b \vee c) \Rightarrow d, & b &\equiv (c \vee d) \Rightarrow e', \\ c &\equiv (d' \vee e') \Rightarrow a, & d &\equiv (a' \vee e') \Rightarrow b', \\ e &\equiv (a \vee b) \Rightarrow c \text{ olur.} \end{aligned}$$

$a \equiv 1$ ve $b \equiv c \equiv d \equiv e \equiv 0$ olması,
 $b \equiv (0 \vee 0) \Rightarrow 1 \equiv 1$ olmasını gerektirir.

$a \equiv 1$ olması, $b \equiv 0$ ve $b \equiv 1$ çelişmesini doğurur.

Demek ki; Anıl yalan söylüyor.

$b \equiv 1$ ve $a \equiv c \equiv d \equiv e \equiv 0$ olması, bir çelişme doğurmaz.

$$\begin{aligned} a &\equiv (1 \vee 0) \Rightarrow 0 \equiv 0, & b &\equiv (0 \vee 0) \Rightarrow 1 \equiv 1, \\ c &\equiv (1 \vee 1) \Rightarrow 0 \equiv 0, & d &\equiv (1 \vee 1) \Rightarrow 0 \equiv 0, \\ e &\equiv (0 \vee 1) \Rightarrow 0 \equiv 0 \end{aligned}$$

Demek ki; Beren doğru söylüyor.

Ceren, Deren ve Eren'in de yalan söyledikleri, aynı yolla gösterilir.

Not

Bu çözüm, önceki çözümün bir başka ifadesidir.

Siz Çözünüz

1. **p, q** ve **r** önermeleri aşağıdaki gibi farklı biçimlerde yorumlanmıştır:

I. p: "Bilge çalışmazsa sınıfını geçemez."

q: "Bilge çalışıyor."

r: "Bilge sınıfını geçer."

II. p: "Bilge çalışmazsa sınıfını geçemez."

q: "Bilge sınıfını geçemedi."

r: "Bilge çalışmadı."

III. p: "Bilge çalışırsa sınıfını geçer."

q: "Bilge sınıfını geçemedi."

r: "Bilge çalışmadı."

Bu yorumlamaların hangilerinde $p \wedge q$ önermesinin doğru olması r önerme-sinin doğru olmasını gerektirir?

2. **A** ve **B** önermeleri aşağıdaki gibi yorumlanmıştır:

A: "Ali başarılı bir öğrenci ise derslerine çalışıyordur."

B: "Ali çok televizyon seyrediyorsa derslerine çalışmaz."

$A \wedge B$ önermesinin doğru olması aşağıdaki önermelerden hangilerinin doğru olmasını gerektirir?

C: "Ali başarılı bir öğrenci ise çok televizyon seyretmiyordur."

D: "Ali başarılı bir öğrenci değilse çok televizyon seyrediyordur."

E: "Ali çok televizyon seyrediyorsa başarılı bir öğrenci değildir."

3. A: “Kar beyazdır ve kömür siyahtır.”

O hâlde,

B: “Kar beyazdır.”

çıkarmasının geçerliliğini denetleyiniz.

4. A: “Kar beyazdır veya kömür siyahtır.”

O hâlde,

B: “Kömür siyahtır.”

çıkarmasının geçerliliğini denetleyiniz.

5. A ve B önermeleri aşağıdaki gibi yorumlanmıştır:

A: “Gürbüz doğru beslenir ve spor yaparsa sağlıklı olur.”

B: “Gürbüz doğru beslenmektedir.”

$A \wedge B$ önermesinin doğru olması aşağıdaki önermelerden hangilerinin doğru olmasını gerektirir?

C: “Gürbüz sağlıklı değildir.”

D: “Gürbüz spor yapmazsa sağlıklı olmaz.”

E: “Gürbüz spor yaparsa sağlıklı olur.”

6. A, B ve C önermeleri aşağıdaki gibi yorumlanmıştır:

A: “Barış çalışır ve sınıfını geçerse tatile gider.”

B: “Barış çalışırsa sınıfını geçer.”

C: “Barış sınıfını geçmiştir.”

$A \wedge B \wedge C$ önermesinin doğru olması aşağıdaki önermelerden hangilerinin doğru olmasını gerektirir?

D: “Barış çalışmıştır.”

E: “Barış tatile gidecektir.”

F: “Barış çalışmış ise tatile gidecektir.”

7. p, q ve r önermeleri aşağıdaki gibi farklı biçimlerde yorumlanmıştır:

I. p: “Yağmur yağdıysa çamaşırlar ıslanmıştır.”

q: “Çamaşırlar ıslanmıştır.”

r: “Yağmur yağmıştır.”

II. p: “Yağmur yağdıysa çamaşırlar ıslanmıştır.”

q: “Çamaşırlar ıslanmamıştır.”

r: “Yağmur yağmamıştır.”

III. p: “Yağmur yağdıysa çamaşırlar ıslanmıştır.”

q: “Yağmur yağmamıştır.”

r: “Çamaşırlar ıslanmamıştır.”

Bu yorumlamaların hangilerinde $p \wedge q$ önermesinin doğru olması r önermesinin doğru olmasını gerektirir?

“Siz Çözünüz”ün Çözümleri

1.

I. p: “Bilge çalışmazsa sınıfını geçemez.”

q: “Bilge çalışıyor.”

r: “Bilge sınıfını geçer.”

I. yol

Bilge çalışmazsa sınıfını geçemez. Ama; çalışırsa, geçeceği kesin değildir.

$p \wedge q$ önermesinin doğru olması, r önermesinin doğru olmasını gerektirmez.

II. yol

$p \equiv q' \Rightarrow r'$ olur.

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \Rightarrow r &\equiv [(q' \Rightarrow r') \wedge q] \Rightarrow r \\ &\equiv (q \vee r')' \vee q' \vee r \\ &\equiv (q' \wedge r) \vee q' \vee r \\ &\equiv q' \vee r \end{aligned}$$

$(p \wedge q) \Rightarrow r$ önermesi bir totoloji olmadığından, $p \wedge q$ önermesinin doğru olması r önermesinin doğru olmasını gerektirmez.

II. p: “Bilge çalışmazsa sınıfını geçemez.”

q: “Bilge sınıfını geçemedi.”

r: “Bilge çalışmadı.”

I. yol

Bilge çalışmazsa sınıfını geçemez. Ama; çalışırsa, geçeceği kesin değildir.

Bilge çalışmış da olabilir.

$p \wedge q$ önermesinin doğru olması, r önermesinin doğru olmasını gerektirmez.

II. yol

$p \equiv r \Rightarrow q$ olur.

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \Rightarrow r &\equiv [(r \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow r \\ &\equiv (r' \vee q)' \vee q' \vee r \\ &\equiv (q' \wedge r) \vee q' \vee r \\ &\equiv q' \vee r \end{aligned}$$

$(p \wedge q) \Rightarrow r$ önermesi bir totoloji olmadığından, $p \wedge q$ önermesinin doğru olması r önermesinin doğru olmasını gerektirmez.

III. p: “Bilge çalışırsa sınıfını geçer.”

q: “Bilge sınıfını geçemedi.”

r: “Bilge çalışmadı.”

I. yol

Bilge çalışsaydı sınıfını geçerdi.

Geçemediğine göre çalışmamıştır.

$p \wedge q$ önermesinin doğru olması, r önermesinin doğru olmasını gerektirir.

II. yol

$p \equiv r' \Rightarrow q'$ olur.

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \Rightarrow r &\equiv [(r' \Rightarrow q') \wedge q] \Rightarrow r \\ &\equiv (r \vee q')' \vee q' \vee r \\ &\equiv 1 \end{aligned}$$

$(p \wedge q) \Rightarrow r$ önermesi bir totolojidir. $p \wedge q$ önermesinin doğru olması r önermesinin doğru olmasını gerektirir.

2. A: “Ali başarılı bir öğrenci ise derslerine çalışıyordur.”

B: “Ali çok televizyon seyrediyorsa derslerine çalışamaz.”

C: “Ali başarılı bir öğrenci ise çok televizyon seyretmiyordur.”

D: “Ali başarılı bir öğrenci değilse çok televizyon seyrediyordur.”

E: “Ali çok televizyon seyrediyorsa başarılı bir öğrenci değildir.”

p: “Ali başarılı bir öğrencidir.”

q: “Ali çok televizyon seyrediyor.”

r: “Ali derslerine çalışır.” diyelim.

$A \equiv p \Rightarrow r$, $B \equiv q \Rightarrow r'$, $C \equiv p \Rightarrow q'$,
 $D \equiv p' \Rightarrow q$, $E \equiv q \Rightarrow p'$ olur.

Geçerliliğini denetleyeceğimiz çıkarımlar; $A \wedge B \Rightarrow C$, $A \wedge B \Rightarrow D$ ve $A \wedge B \Rightarrow E$ önermelerine karşılık gelirler.

$A \wedge B \Rightarrow C$ totoloji ise $A \wedge B$ önermesinin doğru olması, C önermesinin doğru olmasını gerektirir.

$$A \wedge B \Rightarrow C \\ \equiv \underbrace{[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r')]}_{?} \Rightarrow \underbrace{(p \Rightarrow q')}_0$$

$p \Rightarrow q' \equiv 0$ iken, $p \equiv 1$, $q \equiv 1$ ve $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r') \equiv (1 \Rightarrow r) \wedge (1 \Rightarrow r') \equiv 0$ olur. O halde; $A \wedge B \Rightarrow C$ totolojidir.

$A \wedge B$ önermesinin doğru olması, C önermesinin doğru olmasını gerektirir.

$A \wedge B \Rightarrow D$ önermesinin totoloji olup olmadığını, işlem özelliklerini uygulayarak bulalım:

$$A \wedge B \Rightarrow D \equiv [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r')] \Rightarrow (p' \Rightarrow q) \\ \equiv (p' \vee r)' \vee (q' \vee r')' \vee (p \vee q) \\ \equiv (p \wedge r') \vee (q \wedge r) \vee p \vee q \\ \equiv [(p \wedge r') \vee p] \vee [(q \wedge r) \vee q] \\ \equiv p \vee q \quad \text{olur.}$$

$A \wedge B \Rightarrow D$ bir totoloji değildir.

$A \wedge B$ önermesinin doğru olması, D önermesinin doğru olmasını gerektirmez.

$A \wedge B \Rightarrow E$ önermesi bir totoloji midir?

$$A \wedge B \Rightarrow E \equiv [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r')] \Rightarrow (q \Rightarrow p') \\ \equiv (p' \vee r)' \vee (q' \vee r')' \vee (q' \vee p') \\ \equiv (p \wedge r') \vee (q \wedge r) \vee p' \vee q' \\ \equiv [(p \wedge r') \vee p'] \vee [(q \wedge r) \vee q'] \\ \equiv p' \vee r' \vee r \vee q' \\ \equiv 1 \quad \text{olur.}$$

$A \wedge B \Rightarrow E$ önermesi bir totolojidir.

$A \wedge B$ önermesinin doğru olması, E önermesinin doğru olmasını gerektirir.

3. A: “*Kar beyazdır ve kömür siyahtır.*”

O hâlde,

B: “*Kar beyazdır.*”

çıkartımının geçerliliğini denetleyelim:

p: “*Kar beyazdır.*”

q: “*Kömür siyahtır.*” diyelim.

$$A \Rightarrow B \equiv p \wedge q \Rightarrow p \\ \equiv p' \vee q' \vee p \\ \equiv 1 \quad \text{olur.}$$

$A \Rightarrow B$ önermesi bir totolojidir.

A önermesinin doğru olması, B önermesinin doğru olmasını gerektirir. Bu akıl yürütme geçerlidir.

4. A: “*Kar beyazdır veya kömür siyahtır.*”

O hâlde,

B: “*Kömür siyahtır.*”

çıkartımının geçerliliğini denetleyelim:

p: “*Kar beyazdır.*”

q: “*Kömür siyahtır.*” diyelim.

$$A \Rightarrow B \equiv p \vee q \Rightarrow p \\ \equiv (p' \wedge q') \vee p \\ \equiv p \vee q' \quad \text{olur.}$$

$A \Rightarrow B$ önermesi bir totoloji değildir.

A önermesinin doğru olması, B önermesinin doğru olmasını gerektirmez.

Bu akıl yürütme geçerli değildir.

5. A: “*Gürbüz doğru beslenir ve spor yaparsa sağlıklı olur.*”

B: “*Gürbüz doğru beslenmektedir.*”

C: “*Gürbüz sağlıklı değildir.*”

D: “*Gürbüz spor yapmazsa sağlıklı olmaz.*”

E: “*Gürbüz spor yaparsa sağlıklı olur.*”

p: "Gürbüz doğru beslenir."

q: "Gürbüz spor yapar."

r: "Gürbüz sıhhatlidir." diyelim.

$$A \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r, \quad B \equiv p, \quad C \equiv r',$$

$$D \equiv q' \Rightarrow r', \quad E \equiv q \Rightarrow r \text{ olur.}$$

Geçerliliğini denetleyeceğimiz çıkarımlar; $A \wedge B \Rightarrow C$, $A \wedge B \Rightarrow D$ ve $A \wedge B \Rightarrow E$ önermelerine karşılık gelirler.

$A \wedge B \Rightarrow C$ önermesi bir totoloji midir?

$$A \wedge B \Rightarrow C \equiv \underbrace{\{(p \wedge q) \Rightarrow r\} \wedge p}_{?} \Rightarrow \underbrace{r'}_0$$

$r' \equiv 0$ iken, $[(p \wedge q) \Rightarrow 1] \wedge p \equiv p$ olur.

O halde; $A \wedge B \Rightarrow C$ totoloji değildir.

$A \wedge B$ önermesinin doğru olması, C önermesinin doğru olmasını gerektirmez.

$A \wedge B \Rightarrow D$ önermesi bir totoloji midir?

$$A \wedge B \Rightarrow D \equiv \underbrace{\{(p \wedge q) \Rightarrow r\} \wedge p}_{?} \Rightarrow \underbrace{(q' \Rightarrow r')}_0$$

$q' \Rightarrow r' \equiv 0$ iken, $q \equiv 0$, $r \equiv 1$ ve

$$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge p \equiv (p \Rightarrow 1) \wedge (0 \Rightarrow r') \equiv 1 \text{ olur.}$$

$A \wedge B \Rightarrow D$ bir totoloji değildir.

$A \wedge B$ önermesinin doğru olması, D önermesinin doğru olmasını gerektirmez.

$A \wedge B \Rightarrow E$ önermesi bir totoloji midir?

$$A \wedge B \Rightarrow E \equiv \underbrace{\{(p \wedge q) \Rightarrow r\} \wedge p}_{?} \Rightarrow \underbrace{(q' \Rightarrow r)}_0$$

$q' \Rightarrow r \equiv 0$ iken, $q \equiv 0$, $r \equiv 0$ ve

$$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge p \equiv (0 \Rightarrow 0) \wedge p \equiv p \text{ olur.}$$

$A \wedge B \Rightarrow E$ bir totoloji değildir.

$A \wedge B$ önermesinin doğru olması, E önermesinin doğru olmasını gerektirmez.

6. A: "Barış çalışır ve sınıfını geçerse tatile gider."

B: "Barış çalışırsa sınıfını geçer."

C: "Barış sınıfını geçmiştir."

D: "Barış çalışmıştır."

E: "Barış tatile gidecektir."

F: "Barış çalışmış ise tatile gidecektir."

p: "Barış çalışır."

q: "Barış sınıfını geçer."

r: "Barış tatile gider." diyelim.

$$A \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r, \quad B \equiv p \Rightarrow q, \quad C \equiv q,$$

$$D \equiv p, \quad E \equiv r, \quad F \equiv p \Rightarrow r \text{ olur.}$$

Geçerliliğini denetleyeceğimiz çıkarımlar; $A \wedge B \wedge C \Rightarrow D$, $A \wedge B \wedge C \Rightarrow E$ ve $A \wedge B \wedge C \Rightarrow F$ önermelerine karşılık gelirler.

$$A \wedge B \wedge C \Rightarrow D$$

$$\equiv \underbrace{\{(p \wedge q) \Rightarrow r\} \wedge (p \Rightarrow q) \wedge q}_{?} \Rightarrow \underbrace{p}_0$$

$p \equiv 0$ iken,

$$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge (p \Rightarrow q) \wedge q \equiv q \text{ olur.}$$

$A \wedge B \wedge C \Rightarrow D$ totoloji değildir.

$A \wedge B \wedge C$ öncülü D sonucunu gerektirmez.

$$A \wedge B \wedge C \Rightarrow E$$

$$\equiv \underbrace{\{(p \wedge q) \Rightarrow r\} \wedge (p \Rightarrow q) \wedge q}_{?} \Rightarrow \underbrace{r}_0$$

$r \equiv 0$ iken,

$$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge (p \Rightarrow q) \wedge q$$

$$\equiv (p' \vee q') \wedge (p' \vee q) \wedge q$$

$$\equiv p' \wedge q \text{ olur.}$$

$A \wedge B \wedge C \Rightarrow E$ önermesi totoloji değildir.

$A \wedge B \wedge C$ öncülü E sonucunu gerektirmez.

$$A \wedge B \wedge C \Rightarrow F \\ \equiv \underbrace{\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge (p \Rightarrow q) \wedge q\}}_? \Rightarrow \underbrace{(p \Rightarrow r)}_0$$

$p \Rightarrow r \equiv 0$ iken, $p \equiv 1$, $r \equiv 0$ ve

$$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge (p \Rightarrow q) \wedge q \equiv q' \wedge q \wedge q \equiv 0 \text{ olur.}$$

$A \wedge B \wedge C \Rightarrow F$ önermesi totolojidir.

$A \wedge B \wedge C$ öncülü F sonucunu gerektirir.

7. I.

p: "Yağmur yağdıysa çamaşırlar ıslanmıştır."

q: "Çamaşırlar ıslanmıştır."

r: "Yağmur yağmıştır."

I. yol

Çamaşırların ıslanmış olması, yağmurun yağmış olmasını gerektirmez. Komşu, çiçekleri sularken, kaza ile ıslatmış olabilir.

$p \wedge q$ önermesinin doğru olması, r önermesinin doğru olmasını gerektirmez.

II. yol

$p \equiv r \Rightarrow q$ olur.

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv [(r \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow r \\ \equiv (r' \vee q)' \vee q' \vee r \\ \equiv (q' \wedge r) \vee q' \vee r \\ \equiv q' \vee r$$

$(p \wedge q) \Rightarrow r$ önermesi bir totoloji olmadığından, $p \wedge q$ önermesinin doğru olması r önermesinin doğru olmasını gerektirmez.

II. p: "Yağmur yağdıysa çamaşırlar ıslanmıştır."

q: "Çamaşırlar ıslanmamıştır."

r: "Yağmur yağmamıştır."

I. yol

Yağmur yağmış olsaydı, çamaşırlar ıslanırdı. Çamaşırlar ıslanmadığına göre, yağmur yağmamıştır.

$p \wedge q$ önermesinin doğru olması, r önermesinin doğru olmasını gerektirir.

II. yol

$p \equiv r' \Rightarrow q'$ olur.

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv [(r' \Rightarrow q') \wedge q] \Rightarrow r \\ \equiv (r \vee q')' \vee q' \vee r \\ \equiv (r' \wedge q) \vee q' \vee r \\ \equiv r' \vee q' \vee r \\ \equiv 1$$

$(p \wedge q) \Rightarrow r$ önermesi bir totolojidir.

$p \wedge q$ önermesinin doğru olması r önermesinin doğru olmasını gerektirir.

III. p: "Yağmur yağdıysa çamaşırlar ıslanmıştır."

q: "Yağmur yağmamıştır."

r: "Çamaşırlar ıslanmamıştır."

I. yol

Yağmur ile olmasa da, başka bir biçimde çamaşırlar ıslanmış olabilir.

$p \wedge q$ önermesinin doğru olması, r önermesinin doğru olmasını gerektirmez.

II. yol

$p \equiv q' \Rightarrow r'$ olur.

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \Rightarrow r &\equiv [(q' \Rightarrow r') \wedge q] \Rightarrow r \\ &\equiv (q \vee r')' \vee q' \vee r \\ &\equiv (q' \wedge r) \vee q' \vee r \\ &\equiv q' \vee r\end{aligned}$$

$(p \wedge q) \Rightarrow r$ önermesi totoloji değildir.

$p \wedge q$ önermesinin doğru olması r önermesinin doğru olmasını gerektirmez.