Problem (TMOZ)

$f: R \to R; \quad f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

fonksiyonu veriliyor.

$f(R)$ kümesini bulunuz.

Çözüm

I. yol

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} = 0$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} = 0$;

$f'(x) = \dfrac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$;

$f'(x) = 0$ ise

$x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, \quad f(x_1) = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$ ve

$x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, \quad f(x_2) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ olur.

x	$-\infty$		$\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$		$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

$f(R) = \left[\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ olur.

II. yol

Her $x \in R$ için, $a \le f(x) \le b$ olsun.

$\forall x, \ a \le f(x) \le b \Rightarrow$

$\Rightarrow a \le \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} \le b$

$\Rightarrow a \cdot \left(x^2+x+1\right) \le 2x+1 \le b \cdot \left(x^2+x+1\right)$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} ax^2+(a-2)x+a-1 \le 0 \\ bx^2+(b-2)x+b-1 \ge 0 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a<0 \text{ ve } \Delta_1 = (a-2)^2-4a(a-1) \le 0 \\ b>0 \text{ ve } \Delta_2 = (b-2)^2-4b(b-1) \le 0 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{-2\sqrt{3}}{3} \le a < 0 \\ 0 < b \le \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \dfrac{-2\sqrt{3}}{3} \le f(x) \le \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$f: R \to R; \quad f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ fonksiyonunun $\forall x \in R$ için tanımlı ve sürekli olduğu dikkate alınırsa,

$f(R) = \left[\dfrac{-2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ olduğu görülür.

$f\left(\dfrac{-1}{2}\right) = 0$ ve $f(0) = 1$ olup f fonksiyonunun grafiği şekildeki gibidir.

III. yol

En az bir $x \in R$ için, $f(x)=k$ olsun.

$$\exists x,\ f(x)=k$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x^2+x+1}=k$$

$$\Rightarrow k\cdot\left(x^2+x+1\right)=2x+1$$

$$\Rightarrow kx^2+(k-2)x+k-1=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(k-2)^2-4k(k-1)\geq 0$$

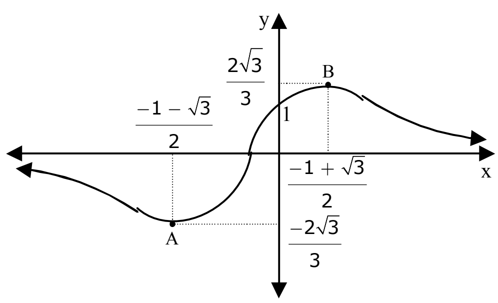
$$\Rightarrow -3k^2+4\geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2\sqrt{3}}{3}\leq k\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-2\sqrt{3}}{3}\leq f(x)\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$f(R)=\left[\frac{-2\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ olur.

$f\left(\frac{-1}{2}\right)=0$ ve $f(0)=1$ olup f fonksiyonunun grafiği şekildeki gibidir.



Alıştırma – 1

$f: R\to R;\quad f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ fonksiyonu veriliyor.

$f(R)$ kümesini bulunuz.

Alıştırma – 2

$f: R-\{1\}\to R;\quad f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ fonksiyonu veriliyor.

$f\left(R-\{1\}\right)$ kümesini bulunuz.

Alıştırma – 3

$f: R\to R;\quad f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ fonksiyonu veriliyor.

$f(R)$ kümesini bulunuz.

Alıştırma – 4

$f: R-\{-2,2\}\to R;\quad f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$

fonksiyonu veriliyor.

$f\left(R-\{-2,2\}\right)$ kümesini bulunuz.