Teorem -1

a ve b birer doğal sayı, c ve k birer tam sayı olmak üzere;

$a = k \cdot b + c$ ise,

$OBEB(a,b) = OBEB(b,c)$ 'dir.

İspat

$OBEB(a,b) = d$

$\Rightarrow a = d \cdot x$ ve $b = d \cdot y$ olsun.

Bu eşitliklerde, x ile y aralarında asal doğal sayılardır. $OBEB(x,y) = 1$

$a = k \cdot b + c,\quad a = d \cdot x$ ve $b = d \cdot y$

$\Rightarrow d \cdot x = k \cdot d \cdot y + c$

$\Rightarrow d \cdot (x - k \cdot y) = c$

$\Rightarrow c = d \cdot z$ ve $x - k \cdot y = z$ yazılabilir.

- y ile z, aralarında asal ise,

$OBEB(y,z) = 1,\quad b = d \cdot y$ ve $c = d \cdot z$

$\Rightarrow OBEB(b,c) = d = OBEB(a,b)$ olur.

- y ile z'nin aralarında asal olmadığını varsayarsak;

$OBEB(y,z) = d' \neq 1$ ve $x = k \cdot y + z$

$\Rightarrow y = d' \cdot m, z = d' \cdot n$

ve $x = k \cdot d' \cdot m + d' \cdot n$

$\Rightarrow x = d' \cdot (k \cdot m + n)$ ve $y = d' \cdot m$

$\Rightarrow OBEB(x,y) = d' \neq 1$ olur.

Bu da; $OBEB(x,y) = 1$ doğrusu ile çelişirdi.

Öyleyse;

$OBEB(a,b) = OBEB(b,c)$

eşitliği geçerlidir.

Örnek Problem -1

576 ve 216 sayılarının ortak doğal sayı bölenlerinin kümesini bulunuz.

Çözüm

1. yol (Öklit Algoritması ile)

576 ve 216 sayılarının ortak doğal sayı bölenlerinin kümesini $B(576, 216)$ ile gösterelim.

Teorem-1'e göre,

$576 = 216 \cdot 2 + 144$

$\Rightarrow OBEB(576, 216) = OBEB(216, 144)$

olur. Bu da,

$B(576, 216) = B(216, 144)$

olmasını gerektirir.

Bölme eşitliklerini yazalım:

$$576 = 216 \cdot 2 + 144$$
$$216 = 144 \cdot 1 + 72$$
$$144 = 72 \cdot 2 + 0$$

Bu bölme eşitliklerine göre;

$$B(576, 216) = B(216, 144) = B(144, 72) = B(72, 0)$$

eşitlikleri geçerlidir. Varılan küme, 72'nin doğal sayı bölenlerinin kümesidir.

$$B(576, 216) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

Not

Teorem -1'e göre;

a ve b birer doğal sayı, c ve k birer tam sayı olmak üzere;

$a = k \cdot b + c$

$\Rightarrow OBEB(a,b) = OBEB(b,c)$

$\Rightarrow OBEB(a,b) = OBEB(b,\ a - kb)$

yazılabilir.

Bu son eşitliğe dayanarak, Öklit algoritması aşağıdaki biçimde de ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} B(576,\ 216) &= B(576-2\cdot 216,\ 216) \\ &= B(144,\ 216) \\ &= B(144,\ 216-144) \\ &= B(144,\ 72) \\ &= B(144-2\cdot 72,\ 72) \\ &= B(0,72) \end{aligned}$$

a ile b birer doğal sayı ve k bir tam sayı iken geçerli olan

$$\mathrm{OBEB}(a,b)=\mathrm{OBEB}(b,\ a-kb)$$

eşitliği, şu eşitlikleri de yazmamıza olanak verir:

$$\begin{aligned} B(576,\ 216) &= B(576-3\cdot 216,\ 216) \\ &= B(-72,\ 216) \end{aligned}$$

"-72" ve "216" sayılarının ortak doğal sayı bölenlerinin, "72" ve "216" sayılarının da ortak doğal sayı bölenleri olacağı açıktır.

$$B(576,216)=B(-72,\ 216)=B(72,\ 216)$$

eşitlikleri de geçerlidir.

Buna göre; a ile b sayılarını doğal sayılarla sınırlamamız gerekmez.

a, b ve k birer tam sayı olmak üzere,

$\mathrm{OBEB}(a,b)=\mathrm{OBEB}(b,\ a-kb)$'dir.

2. yol (Asal çarpanlara ayırarak)

$$576 = 2^6\cdot 3^2$$

$$216 = 2^3\cdot 3^3$$

$$\mathrm{OBEB}(576,216)=2^3\cdot 3^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{OBEB}(576,216)=72$$

$$\Rightarrow B(576,216) = \{1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36,72\}$$

olur.

Alıştırma -1

5253 ve 1133 sayılarının ortak doğal sayı bölenlerinin kümesini bulunuz.

Alıştırma -2

12166 ve 45747 sayılarının ortak doğal sayı bölenlerinin kümesini bulunuz.

Örnek Problem -2

n pozitif bir tam sayı olduğuna göre, $3n+1$ ve $7n+5$ sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü en çok kaç olabilir?

n'nin en küçük hangi değeri için bu O.B.E.B. değeri elde edilir?

Çözüm

$$\begin{aligned} &B(3n+1,7n+5) \\ &\quad = B[3n+1,\ 7n+5-2\cdot(3n+1)] \\ &\quad = B(3n+1,\ n+3) \\ &\quad = B[3n+1-3\cdot(n+3),\ n+3] \\ &\quad = B(-8,\ n+3) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathrm{OBEB}(3n+1,7n+5)=8$ olur.

$3n+1$'in (ya da $7n+5'$ in) 8 ile bölündüğü en küçük n sayısı istenmektedir.

$$\begin{aligned} &3n+1 \equiv 0 \pmod 8 \\ \Rightarrow\ &9n+3 \equiv 0 \pmod 8 \\ \Rightarrow\ &n \equiv -3 \pmod 8 \\ \Rightarrow\ &n \equiv 5 \pmod 8 \end{aligned}$$

bulunur.

Alıştırma -3

n pozitif bir tam sayı olduğuna göre, $5n-3$ ve $13n+6$ sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü en çok kaç olabilir?

O.B.E.B.'lerinin en büyük değeri bulunan bu sayılardan, en küçük iki tanesini bulunuz.

Örnek Problem -3

n pozitif bir tam sayı olduğuna göre, n^2+n+3 ve $2n+5$ sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü en çok kaç olabilir?
Bu OBEB değerini veren n değerlerinden en küçük üç tanesini bulunuz.

Çözüm

1. yol

İkinci dereceden ifadenin $2n+5$ ile tam bölünebilmesini sağlayabilmek için, ilk sayıyı 4 ile çarpalım. $2n+5$ tek olduğundan, ilk sayının 4 katının alınması, bunların OBEB'lerini değiştirmez.

$$\text{OBEB}\left(n^2+n+3, 2n+5\right) = \text{OBEB}\left(4n^2+4n+12, 2n+5\right) \text{ olur.}$$

$$4n^2+4n+12=(2n+5)\cdot(2n-3)+27$$

$$\Rightarrow \text{EBOB}\left(4n^2+4n+12, 2n+5\right) = \text{EBOB}(2n+5, 27) = 27 \quad \text{bulunur.}$$

$$2n+5=0 \pmod{27}$$
$$\Rightarrow 28n+70=0 \pmod{27}$$
$$\Rightarrow n=11 \pmod{27} \quad \text{olur.}$$

İstenilen n değerleri 11, $11+27=38$ ve $11+2\cdot 27=65$ olarak bulunur.

2. yol (Öklit Algoritması ile)

$2n+5$ tek olduğundan, diğer sayının iki katının alınması ortak bölenler kümesini değiştirmez.

$$B\left(n^2+n+3, 2n+5\right) = B\left(2n^2+2n+6, 2n+5\right) \text{ olur.}$$

$$B\left(n^2+n+3, 2n+5\right)$$
$$= B\left(2n^2+2n+6,\ 2n+5\right)$$
$$= B\left[2n^2+2n+6-n(2n+5),\ 2n+5\right]$$
$$= B(6-3n,\ 2n+5)$$
$$= B(11-n,\ 2n+5)$$
$$= B(11-n,\ 27) \quad \text{bulunur.}$$
$$\text{OBEB}\left(n^2+n+3, 2n+5\right)=27 \quad \text{olur.}$$

En küçük n değerleri 1. yol'daki gibi bulunur.

Örnek Problem -4

n pozitif bir tam sayı olduğuna göre, n^2+n+2 ve $2n+6$ sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü en çok kaç olabilir?

Çözüm

1. yol

İkinci dereceden ifadenin $2n+6$ ile tam bölünebilmesini sağlayabilmek için, ilk sayıyı 2 ile çarpalım. İki sayı da çift olduğundan, yeni sayı çiftinin OBEB'i istenenden farklı olabilir:

$$2n^2+2n+4=(2n+6)\cdot(n-2)+16 \text{ olup}$$
$$B\left(2n^2+2n+4,\ 2n+6\right)=B(2n+6,\ 16)$$
$$\Rightarrow \text{OBEB}\left(2n^2+2n+4,\ 2n+6\right)=16'\text{dır.}$$

$2n+6=16\cdot k$ olmalıdır.

$k=1$ için $n=5$ ve $n^2+n+2=32$ olur.

Öyleyse;
$\text{OBEB}\left(n^2+n+2,\ 2n+6\right)=16$ eşitliği de geçerlidir.

$\text{OBEB}\left(2n^2+2n+4,\ 2n+6\right)=16$ olduğu Öklit algoritması ile de gösterilebilir.
Bunu siz yapınız.

2. yol

$2n+6=2\cdot(n+3)$ eşitliğine dayanarak; önce, $\text{OBEB}\left(n^2+n+2,\ n+3\right)$ değerini bulalım:

$$\begin{aligned} B\left(n^2+n+2,\ n+3\right) &= B\left[n^2+n+2-n(n+3),\ n+3\right] \\ &= B(2-2n,\ n+3) \\ &= B(8,\ n+3) \text{ olur.} \end{aligned}$$

$\text{OBEB}\left(n^2+n+2,\ n+3\right)=8$ bulunur.

$n+3$'ün bir böleni 8 ise $2n+6$'nın bir böleni 16 olur.

$2n+6=16\cdot k$ olmalıdır.

$k=1$ için $n=5$ ve $n^2+n+2=32$ olur.

O halde; n^2+n+2'nin de bir böleni 16'dır.

Öyleyse; $\text{OBEB}\left(n^2+n+2,\ 2n+6\right)=16$ eşitliği geçerlidir.

Alıştırma -4

n pozitif bir tam sayı olduğuna göre, n^2+n+2 ve $4n+4$ sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü en çok kaç olabilir?

OBEB'lerinin en büyük değeri bulunan bu sayılardan, en küçük iki tanesini bulunuz.

Örnek Problem -5

n pozitif bir tam sayı olduğuna göre, n^2+n+2 ve $3n+6$ sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü en çok kaç olabilir?

Çözüm

1. yol

İkinci dereceden ifadenin $3n+6$ ile tam bölünebilmesini sağlayabilmek için, ilk sayıyı 3 ile çarpalım. Yeni sayı çiftinin OBEB'i istenenden farklı olabilir:

$3n^2+3n+6=(3n+6)\cdot(n-1)+12$ olup

$$B\left(3n^2+3n+6,\ 3n+6\right)=B(3n+6,\ 12)$$

$$\Rightarrow \text{OBEB}\left(3n^2+3n+6,\ 3n+6\right)=12\text{'dir.}$$

$3n+6=12\cdot k$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} & 3n+6=12\cdot k \\ \Rightarrow\ & n=4k-2 \\ \Rightarrow\ & n^2+n+2=16k^2-12k+4 \\ \Rightarrow\ & n^2+n+2=4\left(4k^2-3k+1\right) \text{ olur.} \end{aligned}$$

$4k^2+1$ sayısı 3'ün katı olamayacağından, n^2+n+2 sayısı 12'nin katı olamaz.

$\text{OBEB}\left(n^2+n+2,\ 3n+6\right)=4$ bulunur.

2. yol

$3n+6=3\cdot(n+2)$ eşitliğine dayanarak; önce, $\text{OBEB}\left(n^2+n+2,\ n+2\right)$ değerini bulalım:

$$\begin{aligned} B\left(n^2+n+2,\ n+2\right) &= B\left[n^2+n+2-n(n+2),\ n+2\right] \\ &= B(2-n,\ n+2) \\ &= B(4,\ n+2) \text{ olur.} \end{aligned}$$

$\text{OBEB}\left(n^2+n+2,\ n+2\right)=4$ bulunur.

$n+2$'ün bir böleni 4 ise $3n+6$'nın bir böleni 12 olur.

$3n+6=12\cdot k$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} & 3n+6=12\cdot k \\ \Rightarrow\ & n=4k-2 \\ \Rightarrow\ & n^2+n+2=16k^2-12k+4 \\ \Rightarrow\ & n^2+n+2=4\left(4k^2-3k+1\right) \text{ olur.} \end{aligned}$$

$4k^2+1$ sayısı 3'ün katı olamayacağından, n^2+n+2 sayısı 12'nin katı olamaz. Ancak, 4'ün katı olduğu açıktır.

$\text{OBEB}\left(n^2+n+2,\ 3n+6\right)=4$ bulunur.