Problem – 1

a. R'den R'ye f ve g fonksiyonları,

$$f(x)=\begin{cases}2x-4 & x<3 \text{ ise}\\ x+2 & x\ge 3 \text{ ise}\end{cases} \quad \text{ve}$$

$$g(x)=\begin{cases}x-1 & x\le 1 \text{ ise}\\ x+1 & x>1 \text{ ise}\end{cases}$$

kuralları ile verildiğinde,

R'den R'ye $g\text{o}f$ fonksiyonunun kuralı

$$(g\text{o}f)(x)=\begin{cases}2x-5 & x\le 5/2 \text{ ise}\\ 2x-3 & 5/2<x<3 \text{ ise}\\ x+3 & x\ge 3 \text{ ise}\end{cases}$$

olarak bulunur.

Bunu siz de bulunuz.

b. R'den R'ye f ve $g\text{o}f$ fonksiyonları

$$f(x)=\begin{cases}2x-4 & x<3 \text{ ise}\\ x+2 & x\ge 3 \text{ ise}\end{cases} \quad \text{ve}$$

$$(g\text{o}f)(x)=\begin{cases}2x-5 & x\le 5/2 \text{ ise}\\ 2x-3 & 5/2<x<3 \text{ ise}\\ x+3 & x\ge 3 \text{ ise}\end{cases}$$

kuralları ile verilerek g fonksiyonu istendiğinde,

$$g:R\to R;\quad g(x)=\begin{cases}x-1 & x\le 1 \text{ ise}\\ x+1 & 1<x<2 \text{ ise}\\ x+1 & x\ge 5 \text{ ise}\end{cases}$$

bulunur.

Bunu siz de bulunuz.

c. Demek ki;
bir f fonksiyonunun farklı g fonksiyonları ile bileşkeleri aynı $g\text{o}f$ fonksiyonunu verebilir.

Bu problem üzerinde çalışarak bunun nedenini araştırınız.

Verdiğimiz f ve $g\text{o}f$ fonksiyonlarının kurallarını sağlayan, istenilen sayıda g fonksiyonlarının tanımlanabileceğini gösteriniz.

Siz de, farklı g fonksiyonları tanımlayınız.

Çözüm

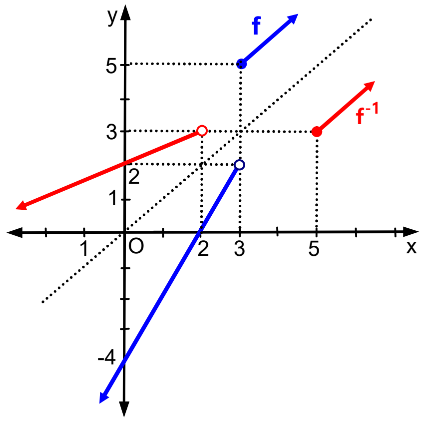
a.

$$(g\text{o}f)(x)=g(x)\ \text{o}\ f(x)$$

$$\Rightarrow (g\text{o}f)(x)=\begin{cases}x-1 & x\le 1\\ x+1 & x>1\end{cases}\ \text{o}\ \begin{cases}2x-4 & x<3\\ x+2 & x\ge 3\end{cases}$$

$$\Rightarrow (g\text{o}f)(x)=\begin{cases}(2x-4)-1 & x\le 5/2\\ (2x-4)+1 & 5/2<x<3\\ (x+2)+1 & x\ge 3\end{cases}$$

b.



$$f(x)=\begin{cases}2x-4 & x<3\\ x+2 & x\ge 3\end{cases}\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x+4}{2} & x<2\\ x-2 & x\ge 5\end{cases}$$

$$g(x)=(g\text{o}f)(x)\ \text{o}\ f^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases}2x-5 & x\le 5/2\\ 2x-3 & 5/2<x<3\\ x+3 & x\ge 3\end{cases}\ \text{o}\ \begin{cases}\dfrac{x+4}{2} & x<2\\ x-2 & x\ge 5\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases}x-1 & x\le 1\\ x+1 & 1<x<2\\ x+1 & x\ge 5\end{cases}$$

c. Dikkat edilirse; f^{-1} fonksiyonunun $[2,5)$ aralığında görüntüsü yoktur. g fonksiyonunun $[2,5)$ aralığındaki farklı tanımları $g\text{o}f$ fonksiyonunun tanımını değiştirmez.

g fonksiyonu, örneğin;

$$g:R\to R;\quad g(x)=\begin{cases}x-1 & x\le 1 \text{ ise}\\ x+1 & 1<x<2 \text{ ise}\\ 2x & 2\le x<5 \text{ ise}\\ x+1 & x\ge 5 \text{ ise}\end{cases}$$

olarak tanımlanabilir.

Siz Çözünüz – I

R'den R'ye f ve $g\circ f$ fonksiyonları

$$f(x)=\begin{cases} x-2 & x<1 \text{ ise} \\ x+3 & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases} \quad \text{ve}$$

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\leq 2 \text{ ise} \\ x+1 & x>2 \text{ ise}\end{cases}$$

kuralları ile verilmiştir.

a. Bu koşulları sağlayan, R'den R'ye bir g fonksiyonu tanımlayınız.

b. Verdiğimiz f fonksiyonu ile tanımladığınız g fonksiyonunu kullanarak, $g\circ f$ fonksiyonunun kuralını siz elde ediniz.

Problem – 2

a. R'den R'ye f ve g fonksiyonları,

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & x<2 \text{ ise} \\ x-1 & x\geq 2 \text{ ise}\end{cases} \quad \text{ve}$$

$$g(x)=\begin{cases} x-2 & x<1 \text{ ise} \\ x+4 & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases}$$

kuralları ile verildiğinde,

R'den R'ye $g\circ f$ fonksiyonunun kuralı

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases} x+1 & x<-2 \text{ ise} \\ x+7 & -2\leq x<2 \text{ ise} \\ x+3 & x\geq 2 \text{ ise}\end{cases}$$

olarak bulunur.

Bunu siz de bulunuz.

b. R'den R'ye f ve $g\circ f$ fonksiyonları

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & x<2 \text{ ise} \\ x-1 & x\geq 2 \text{ ise}\end{cases} \quad \text{ve}$$

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases} x+1 & x<-2 \text{ ise} \\ x+7 & -2\leq x<2 \text{ ise} \\ x+3 & x\geq 2 \text{ ise}\end{cases}$$

olarak verildiğinde, koşulları sağlayan bir g fonksiyonu tanımlayınız.

Çözüm

a.

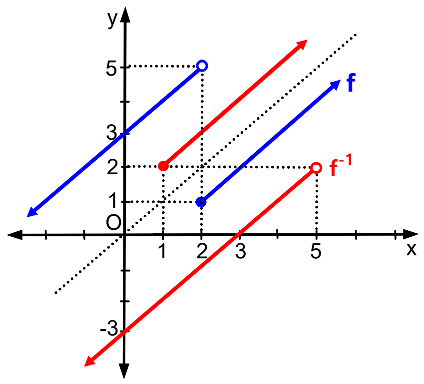
$$(g\circ f)(x)=g(x)\circ f(x)$$

$$\Rightarrow (g\circ f)(x)=\begin{cases} x-2 & x<1 \\ x+4 & x\geq 1\end{cases} \circ \begin{cases} x+3 & x<2 \\ x-1 & x\geq 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow (g\circ f)(x)=\begin{cases} (x+3)-2 & x\leq -2 \\ (x+3)+4 & -2<x<2 \\ (x-1)+4 & x\geq 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow (g\circ f)(x)=\begin{cases} x+1 & x\leq -2 \\ x+7 & -2<x<2 \\ x+3 & x\geq 2\end{cases}$$

b.



$$f(x)=\begin{cases} x+3 & x<2 \\ x-1 & x\geq 2\end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases} x-3 & x<5 \\ x+1 & x\geq 1\end{cases}$$

$y=f^{-1}(x)$ eşitliğinin bir fonksiyona değil, bir bağıntıya karşılık geldiğine dikkat ediniz.

$$g(x)=(g\circ f)(x)\circ f^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases} x+1 & x<-2 \\ x+7 & -2\leq x<2 \\ x+3 & x\geq 2\end{cases} \circ \begin{cases} x-3 & x<5 \\ x+1 & x\geq 1\end{cases}$$

Bu bileşke işleminde, f^{-1} bağıntısının tanım kümesinin $[1,5)$ alt kümesinin her a elemanı için $f^{-1}(a)$ değerleri farklı olsa da, $g(a)$ değerlerinin eşit olduğuna dikkat ediniz:

Örneğin;

$f^{-1}(2)=-1$ ve $f^{-1}(2)=3$ olup $g(2)=6$ olur.

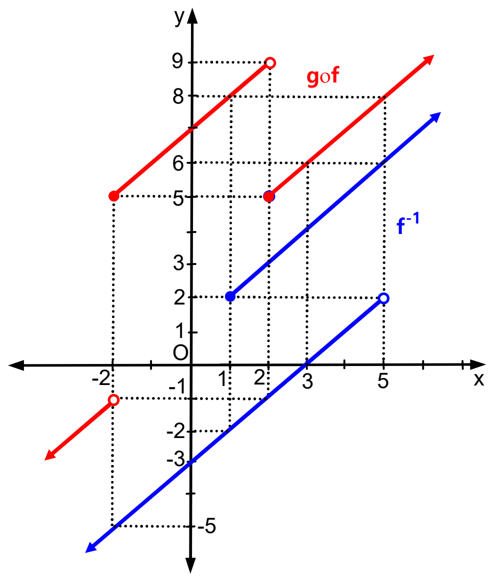
$f^{-1}(3)=0$ ve $f^{-1}(3)=4$ olup $g(3)=7$ olur.

$f^{-1}(4)=1$ ve $f^{-1}(4)=5$ olup $g(4)=8$ olur.

Bir de şöyle açıklayalım:

$$g(x) = (g \circ f)(x) \circ f^{-1}(x)$$
$$\Rightarrow g(a) = (g \circ f)(x) \circ f^{-1}(a)$$
$$\Rightarrow g(a) = (g \circ f)\left(f^{-1}(a)\right) \Rightarrow g(a) = g\left(f\left(f^{-1}(a)\right)\right)$$
$$\Rightarrow g(a) = g(a)$$

$f^{-1}(a)$ değerleri farklı olsa da, $f\left(f^{-1}(a)\right) = a$ olmaktadır.



✦ Bu bulgularımız bizi şu sonuca götürür:

$g(x) = (g \circ f)(x) \circ f^{-1}(x)$ işleminde, f^{-1} bağıntısının $[1,5)$ aralığındaki görüntülerinden yalnız birini seçerek, bağıntıyı bir fonksiyona dönüştürebiliriz. Görüntü seçimlerini $[1,5)$ aralığının alt aralıklarında da yapabiliriz. Her seçimimiz bize aynı g fonksiyonunu verecektir.

g fonksiyonunu bulmak için,

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-3 & x<5 \\ x+1 & x \geq 1 \end{cases}$$ bağıntısı yerine,

örneğin;

$$f_1^{-1}(x) = \begin{cases} x-3 & x<1 \\ x+1 & 1 \leq x < 5 \\ x+1 & x \geq 5 \end{cases} = \begin{cases} x-3 & x<1 \\ x+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu konulabilir.

Birkaç fonksiyon örneği daha verelim:

$$f_2^{-1}(x) = \begin{cases} x-3 & x<2 \\ x+1 & 2 \leq x < 5 \\ x+1 & x \geq 5 \end{cases} = \begin{cases} x-3 & x<2 \\ x+1 & x \geq 2 \end{cases};$$

$$f_3^{-1}(x) = \begin{cases} x-3 & x<3 \\ x+1 & x \geq 3 \end{cases};$$

$$f_4^{-1}(x) = \begin{cases} x-3 & x<4 \\ x+1 & x \geq 4 \end{cases};$$

$$f_5^{-1}(x) = \begin{cases} x-3 & x<1 \\ x+1 & 1 \leq x < 3 \\ x-3 & 3 \leq x < 5 \\ x+1 & x \geq 5 \end{cases}; \ldots$$

Siz de böyle fonksiyonlar tanımlayınız.

$$g(x) = (g \circ f)(x) \circ f^{-1}(x)$$
$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} x+1 & x<-2 \\ x+7 & -2 \leq x < 2 \\ x+3 & x \geq 2 \end{cases} \circ f^{-1}(x)$$

işleminde $f^{-1}(x)$ bağıntısı yerine, önerdiğimiz fonksiyonları koyarak aynı g fonksiyonunu elde edeceğinizi görünüz.

Siz Çözünüz – II

R'den R'ye f ve $g \circ f$ fonksiyonları

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<2 \text{ ise} \\ x-2 & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$ ve

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x+4 & x \leq 0 \text{ ise} \\ 4x-1 & 0 < x \leq 2 \text{ ise} \\ x+1 & 2 < x \leq 3 \text{ ise} \\ 2x-7 & x > 3 \text{ ise} \end{cases}$$

kuralları ile verilmiştir.

a. g fonksiyonunun kuralını bulunuz.

b. Verdiğimiz f fonksiyonu ile bulduğunuz g fonksiyonunun $g \circ f$ bileşkesini siz elde ediniz.

Problem – 3

R'den R'ye f ve $f\circ g$ fonksiyonları

$$f(x)=\begin{cases}x+5 & x<1 \text{ ise}\\ x-1 & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases} \text{ ve}$$

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}x+8 & x\leq -2 \text{ ise}\\ x+2 & -2\leq x\leq 3 \text{ ise}\\ x-3 & x>3 \text{ ise}\end{cases}$$

kuralları ile verilmiştir.

Bu koşulları sağlayan değişik g fonksiyonları tanımlayınız.

Çözüm

$$f(x)=\begin{cases}x+5 & x<1\\ x-1 & x\geq 1\end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}x-5 & x<6\\ x+1 & x\geq 0\end{cases}$$

$y=f^{-1}(x)$ eşitliğinin bir fonksiyona değil, bir bağıntıya karşılık geldiğine dikkat ediniz.

$$g(x)=f^{-1}(x)\ \circ\ (f\circ g)(x)$$

$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases}x-5 & x<6\\ x+1 & x\geq 0\end{cases} \circ \begin{cases}x+8 & x<-2\\ x+2 & -2\leq x\leq 3\\ x-3 & x>3\end{cases}$$

Bu bileşke işleminde, bir a gerçel sayısının $(f\circ g)(a)$ görüntüsü f^{-1} bağıntısının tanım kümesinin $[0,6)$ alt kümesinde ise, farklı iki $g(a)$ değeri elde edilecektir. g bir fonksiyon olduğuna göre, bu olamaz; Farklı iki değerden birinin seçilmesi gerekir. Böylece, f^{-1} bağıntısı bir fonksiyona dönüştürülmüş olur.

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x-5 & x<6 \text{ ise}\\ x+1 & x\geq 0 \text{ ise}\end{cases}$$

bağıntısı istenilen sayıda değişik fonksiyonlara dönüştürülebilir:

Örneğin;

$$f_1^{-1}(x)=\begin{cases}x-5 & x<0\\ x+1 & 0\leq x<6\\ x+1 & x\geq 6\end{cases} = \begin{cases}x-5 & x<0\\ x+1 & x\geq 0\end{cases},$$

$$f_2^{-1}(x)=\begin{cases}x-5 & x<2\\ x+1 & 2\leq x<6\\ x+1 & x\geq 6\end{cases} = \begin{cases}x-5 & x<2\\ x+1 & x\geq 2\end{cases},$$

$$f_3^{-1}(x)=\begin{cases}x-5 & x<3\\ x+1 & x\geq 3\end{cases},$$

$$f_4^{-1}(x)=\begin{cases}x-5 & x<1\\ x+1 & 1\leq x<3\\ x-5 & 3\leq x<5\\ x+1 & x\geq 5\end{cases} \quad \text{gibi.}$$

Bu fonksiyonların her biri için farklı bir g fonksiyonu elde edilir. Ancak; her farklı g'nin f ile bileşkesi aynı $f\circ g$ fonksiyonu olur:

$$g_1(x)=f_1^{-1}(x)\ \circ\ (f\circ g)(x)$$

$$\Rightarrow g_1(x)=\begin{cases}x-5 & x<0\\ x+1 & x\geq 0\end{cases} \circ \begin{cases}x+8 & x<-2\\ x+2 & -2\leq x\leq 3\\ x-3 & x>3\end{cases}$$

$$\Rightarrow g_1(x)=\begin{cases}(x+8)-5 & x<-8\\ (x+8)+1 & -8\leq x<-2\\ (x+2)+1 & -2\leq x\leq 3\\ (x-3)+1 & x>3\end{cases}$$

$$\Rightarrow g_1(x)=\begin{cases}x+3 & x<-8\\ x+9 & -8\leq x<-2\\ x+3 & -2\leq x\leq 3\\ x-2 & x>3\end{cases}$$

f ve g_1 ile, $f\circ g$ fonksiyonunu bulalım:

$$(f\circ g)(x)=f(x)\ \circ\ g_1(x)$$

$$=\begin{cases}x+5 & x<1\\ x-1 & x\geq 1\end{cases} \circ \begin{cases}x+3 & x<-8\\ x+9 & -8\leq x<-2\\ x+3 & -2\leq x\leq 3\\ x-2 & x\geq 3\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(x+3)+5 & x<-8\\ (x+9)-1 & -8\leq x<-2\\ (x+3)-1 & -2\leq x\leq 3\\ (x-2)-1 & x>3\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x+8 & x<-2\\ x+2 & -2\leq x\leq 3\\ x-3 & x>3\end{cases}$$

Siz de, bulacağınız farklı g fonksiyonları ile $f\circ g$ fonksiyonunu elde ediniz.

Siz Çözünüz – III

R'den R'ye f ve $f\circ g$ fonksiyonları

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & x<1 \text{ ise} \\ 2x-3 & x\geq 1 \text{ ise}\end{cases} \text{ ve}$$

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases} 2x+4 & x\leq 0 \text{ ise} \\ 4x-1 & 0<x\leq 2 \text{ ise} \\ 2x-5 & x>2 \text{ ise}\end{cases}$$

kuralları ile verilmiştir.

a. Bu koşulları sağlayan değişik g fonksiyonları tanımlayınız.

b. Verdiğimiz f fonksiyonu ile tanımladığınız g fonksiyonlarının $f\circ g$ bileşkelerini siz elde ediniz.

Problem – 4

R'den R'ye f ve $g\circ f$ fonksiyonları

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<3 \text{ ise} \\ 5-x & x\geq 3 \text{ ise}\end{cases} \text{ ve}$$

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases} 2x-1 & x<1 \text{ ise} \\ x-3 & 1\leq x<3 \text{ ise} \\ 3-x & 3\leq x\leq 5 \text{ ise} \\ 11-2x & x>5 \text{ ise}\end{cases}$$

kuralları ile verilmiştir.

Bu koşulları sağlayan, R'den R'ye, değişik g fonksiyonları tanımlayınız.

Çözüm

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<3 \\ 5-x & x\geq 3\end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases} x+1 & x<2 \\ 5-x & x\leq 2\end{cases}$$

$y=f^{-1}(x)$ eşitliği bir bağıntıya karşılık gelir.

$$g(x)=(g\circ f)(x)\ \text{o}\ f^{-1}(x)$$

$$=\begin{cases} 2x-1 & x<1 \\ x-3 & 1\leq x<3 \\ 3-x & 3\leq x\leq 5 \\ 11-2x & x>5\end{cases} \text{ o } \begin{cases} x+1 & x<2 \\ 5-x & x\leq 2\end{cases}$$

Bileşke işleminde, f^{-1} bağıntısının yerine, aynı elemanın farklı iki görüntüsünü bire indiren seçimlerle elde edilen fonksiyonlar konulabileceğini öğrenmiştik.

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x+1 & x<2 \\ 5-x & x\leq 2\end{cases} \text{ bağıntısının yerine}$$

$f_1^{-1}:(-\infty,2]\to R;\ f_1^{-1}(x)=x+1,$

$f_2^{-1}:(-\infty,2]\to R;\ f_2^{-1}(x)=5-x,$

$$f_3^{-1}(x)=\begin{cases} x+1 & x<0 \\ 5-x & 0\leq x\leq 2\end{cases}$$

gibi fonksiyonlar konulabilir.

$$g(x)=(g\circ f)(x)\ \text{o}\ f^{-1}(x)$$

$$=\begin{cases} 2x-1 & x<1 \\ x-3 & 1\leq x<3 \\ 3-x & 3\leq x\leq 5 \\ 11-2x & x>5\end{cases} \text{ o } \{x+1 \quad x\leq 2$$

$$\Rightarrow g(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ x-2 & 0\leq x\leq 2\end{cases} \text{ bulunur.}$$

Tanımlayacağınız diğer f^{-1} fonksiyonları ile de aynı g fonksiyonlarının bulunacağını görünüz. Birkaç örnek veriniz.

Ancak; g fonksiyonları R'de de tanımlı olabilir. Bizden istenen g fonksiyonları da R'de tanımlı olanlardır.

Bileşke işleminde, g'nin $(2,\infty)$ aralığındaki değerleri kullanılmamaktadır.

Öyleyse; g fonksiyonlarını $(2,\infty)$ aralığında istediğimiz gibi tanımlayabiliriz.

Örneğin;

$$g(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ x-2 & 0\leq x\leq 2 \\ 3x-1 & x>2\end{cases}$$

olarak tanımlanabilir.

Siz de böyle g fonksiyonları tanımlayarak, f ve g ile, aynı $g\circ f$ fonksiyonlarının bulunacağını gösteriniz.

Siz Çözünüz – IV

1. R'den R'ye f ve gof fonksiyonları

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x\le 2 \text{ ise} \\ 5-x & x>2 \text{ ise}\end{cases} \text{ ve}$$

$$(gof)(x)=\begin{cases} x-3 & x\le 2 \text{ ise} \\ 3-x & x>2 \text{ ise}\end{cases}$$

kuralları ile verilmiştir.

a. Bu koşulları sağlayan, R'den R'ye değişik g fonksiyonları tanımlayınız.

b. Verdiğimiz f fonksiyonu ile tanımladığınız g fonksiyonlarının gof bileşkelerini siz elde ediniz.

2. R'den R'ye f ve gof fonksiyonları

$$f(x)=\begin{cases} 4-2x & x\le 0 \text{ ise} \\ 2x-2 & x>0 \text{ ise}\end{cases} \text{ ve}$$

$$(gof)(x)=\begin{cases} 2-2x & x\le 0 \text{ ise} \\ 2x+2 & 0<x<2 \text{ ise} \\ 2x-4 & x\ge 2 \text{ ise}\end{cases}$$

kuralları ile verilmiştir.

a. Bu koşulları sağlayan, R'den R'ye değişik g fonksiyonları tanımlayınız.

b. Verdiğimiz f fonksiyonu ile tanımladığınız g fonksiyonlarının fog bileşkelerini siz elde ediniz.

Problem – 5

R'den R'ye f ve fog fonksiyonları

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<3 \text{ ise} \\ 5-x & x\ge 3 \text{ ise}\end{cases} \text{ ve}$$

$$(fog)(x)=\begin{cases} 2x & x<0 \text{ ise} \\ x-3 & 0\le x<5 \text{ ise} \\ 7-x & x\ge 5 \text{ ise}\end{cases}$$

kuralları ile verilmiştir.

Bu koşulları sağlayan, R'den R'ye değişik g fonksiyonları tanımlayınız.

Çözüm

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<3 \\ 5-x & x\ge 3\end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases} x+1 & x<2 \\ 5-x & x\le 2\end{cases}$$

f^{-1} bir bağıntıdır.

$$g(x)=f^{-1}(x) \circ (fog)(x)$$

$$=\begin{cases} x+1 & x<2 \\ 5-x & x\le 2\end{cases} \circ \begin{cases} 2x & x<0 \\ x-3 & 0\le x<5 \\ 7-x & x\ge 5\end{cases}$$

Bu bileşke işleminde f^{-1} bağıntısı, bir a gerçel sayısının $(fog)(a)$ görüntüsü için, farklı iki $g(a)$ değeri verecektir. g bir fonksiyon olduğuna göre, bu olamaz; Farklı iki değerden birinin seçilmesi gerekir. Demek ki; f^{-1} bağıntısı bir fonksiyona dönüştürülmelidir.

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x+1 & x<2 \text{ ise} \\ 5-x & x\le 2 \text{ ise}\end{cases}$$

bağıntısı istenilen sayıda değişik fonksiyonlara dönüştürülebilir:

$f_1^{-1}:(-\infty,2]\to R;\ f_1^{-1}(x)=x+1,$

$f_2^{-1}:(-\infty,2]\to R;\ f_2^{-1}(x)=5-x,$

$$f_3^{-1}(x)=\begin{cases} x+1 & x<-1 \\ 5-x & -1\le x\le 2\end{cases},$$

$$f_4^{-1}(x)=\begin{cases} x-5 & x<1 \\ x+1 & 1\le x<3 \\ x-5 & 3\le x<5 \\ x+1 & x\ge 5\end{cases} \text{ gibi.}$$

Bu fonksiyonların her biri için farklı bir g fonksiyonu elde edilir. Ancak; her farklı g'nin f ile bileşkesi aynı fog fonksiyonu olur:

$$g_1(x)=f_1^{-1}(x) \circ (fog)(x)$$

$$=\left(\left\{x+1 \quad x\le 2\right)\right. \circ \begin{cases} 2x & x<0 \\ x-3 & 0\le x<5 \\ 7-x & x\ge 5\end{cases}$$

$$\Rightarrow g_1(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ x-2 & 0\le x<5 \\ 8-x & x\ge 5\end{cases} \text{ bulunur.}$$

f ve g_1 ile, fog_1 fonksiyonunu bulalım:

$$(fog_1)(x) = f(x) \circ g_1(x)$$

$$= \begin{cases} x-1 & x<3 \\ 5-x & x\geq 3 \end{cases} \circ \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ x-2 & 0\leq x<5 \\ 8-x & x\geq 5 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x & x<0 \\ x-3 & 0\leq x<5 \\ 2 & x=5 \\ 7-x & x>5 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x & x<0 \\ x-3 & 0\leq x<5 \\ 7-x & x\geq 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow (fog_1)(x) = (fog)(x)$ olduğu görülür.

Siz de, bulacağınız farklı g fonksiyonları ile fog fonksiyonunu elde ediniz.

Siz Çözünüz – V

1. R'den R'ye f ve fog fonksiyonları

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x\leq 1 \text{ ise} \\ 2-x & x>1 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve}$$

$$(fog)(x) = \begin{cases} 2x+6 & x\leq -1 \text{ ise} \\ -2x-1 & -1<x<0 \text{ ise} \\ x-1 & 0\leq x\leq 5 \text{ ise} \\ 6-x & x>5 \text{ ise} \end{cases}$$

kuralları ile verilmiştir.

a. Bu koşulları sağlayan, R'den R'ye değişik g fonksiyonları tanımlayınız.

b. Verdiğimiz f fonksiyonu ile tanımladığınız g fonksiyonlarının gof bileşkelerini siz elde ediniz.

2. R'den R'ye f ve gof fonksiyonları

$$f(x) = \begin{cases} 4-2x & x\leq 0 \text{ ise} \\ 2x-2 & x>0 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve}$$

$$(fog)(x) = \begin{cases} 2-2x & x\leq 0 \text{ ise} \\ 2x+2 & 0<x<2 \text{ ise} \\ 2x-4 & x\geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

kuralları ile verilmiştir.

a. Bu koşulları sağlayan, R'den R'ye değişik g fonksiyonları tanımlayınız.

b. Verdiğimiz f fonksiyonu ile tanımladığınız g fonksiyonlarının fog bileşkelerini siz elde ediniz.