Reel sayılar kümesinin bir alt kümesi A olsun.

F fonksiyonu

$F:A \rightarrow R$ olsun

$x \in A$ olmak üzere,çok küçük bir delta(δ) sayısı için

$|x-a|<\delta$*** koşulu sağlanıyorsa A kümesinin içindeki a sayısı yığılma noktası kabul edilir.

*** denkleminin anlamı $x \neq a$ olmak üzere,x ile a arasındaki uzaklık verilen çok küçük δ değerinden de küçük olur mantığını taşır.Bu ise x sayılarının a noktasına yığılabileceğini tanımlar.

Bu bizim bildiğimiz diziledeki ε komşuluk kavramı ile aynı mantığı taşır. Komşuluk dışındaki terim sayılarını buluyorduk.(şimdi liselerde bu konuların ruhuna fatiha okundu)

Neyse konumuza devam edelim.

Örneğin reel sayı ekseninde 2 nin komşuluğunu δ ile inceleyelim

$|x-2|<\delta$ ifadesinde $\delta=1$ için komşuluk yaratalım

$|x-2|<1$ ise $-1<x<3$ aralığını bulunuruz.

δ yu küçültelim $\delta=0,1$ alalım

$|x-2|<0,1$ ise $1,9<x<2,1$ olur

δ yu küçültelim $\delta=0,001$ alalım

$|x-2|<0,001$ olsun

$1,999<x<2,001$

δ yu daha da küçültelim

$\delta=0,00001$ alalım

$|x-2|<0,00001$

$1,99999<x<2,00001$ şeklinde uzar gider.

Peki δ küçüldükçe ne göreceğiz??

$x \neq 2$ olmak üzere 2 nin hemen altı hemen üstünde sayılar kümesi elde edeceğiz.Peki bunun anlamı nedir?

Reel sayılar kümesinde 2 sayısının erafına δ nun küçülmesine bağlı olarak 2 ye çok yakın sayıları altan ve üstten yığabileceğimizdir yada 2 nin bir yığılma noktası olduğudur.Bunun bir başka anlamı vardır. $\lim_{x \rightarrow 2^+}$ veya $\lim_{x \rightarrow 2^-}$ yaklaşma ile anlatılır.

Fonksiyon limit kavramı

y ekseninde sayılar L gibi bir noktaya yığılıyorsa I$F(x)$-LI<ε olabiliyorsa

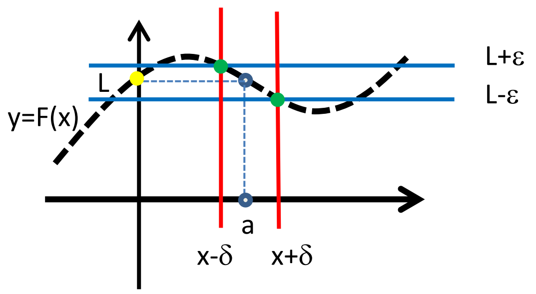
x sayıları ε bağlı x eksenindeki bir a noktasına ε bağlı bir δ değerine bağlı olarak Ix-aI<δ şeklinde yığılabiliyorsa

$\lim_{x\to a}F(a)=L$ denir.

Not

Burada tanımlanan ε ve δ değerleri çok küçük sayılardır.

Kısaca y ekseninde yığılma bandına(mavi bant) karşılık x ekseninde de yığılma bandını(kırmızı bant) gösterebiliyorsak x sayılarının limitsel yaklaşımı mevcuttur deriz.



Şekildeki yeşil noktaların ordinatlarını fonksiyonda ε bağlı bulup bu değerleri fonksiyonda yazıp bulduğumuz x değerleri yani $x\pm\delta$ değerleri ε bağlı olarak hesaplanabilir.

Örnekleyelim

$F(x)=3x+2$ fonksiyonunun x=2 deki limitinin 8 olduğunu ispatlayalım

Fonksiyonun mavi bandı $8+\varepsilon$ ve $8-\varepsilon$ dur.mavi bantlardan kırmızı bantlara yeşil noktalarla geçelim.

$8+\varepsilon=3x+2$(ki buradaki x değeri şekildende görüldüğü gibi $x+\delta$ demektir)

$$x=\frac{6+\varepsilon}{2}$$

$8-\varepsilon=3x+2$ (ki buradaki x değeri şekilden görüldüğü gibi $x-\delta$ demektir.)

$$x=\frac{6-\varepsilon}{2}$$

y eksenindeki ε bağlı olan $(8+\varepsilon,8-\varepsilon)$ aralığındaki yığılmayı δ yu ε bağlı olarak aşağıdaki gibi gösteririz

$$\left(2+\frac{\varepsilon}{2},2-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

y eksenindeki yığılmayı x eksenindeki yığılma noktasına sıkıştırdık.Kısaca x=2 noktasında ε bağlı yığılma elde ettik ve x=2 için limitini olduğunu bu limitinde y eksenindeki 8 noktası cıvarındaki yığılmaya denk olduğunu ispatladık

Sonuç

$\lim_{x\to 2} f(x)=8$ diyebiliriz

örnek

$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{2}$ olduğunu ε-δ metodu ile gösteriniz.

Mavi bant aralığı

$\left(\frac{1}{2}+\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon\right)$ dır.

$$\varepsilon+\frac{1}{2}=\frac{1}{x+1}$$
$$\frac{2\varepsilon+1}{2}=\frac{1}{x+1}$$
$$x+1=\frac{2}{2\varepsilon+1}\Rightarrow x=-1+\frac{2}{1+2\varepsilon}=\delta(\varepsilon_1)$$
$$\frac{1}{2}-\varepsilon=\frac{1}{x+1}\Rightarrow\frac{1-2\varepsilon}{2}=\frac{1}{x+1}$$
$$x+1=\frac{2}{1-2\varepsilon}\Rightarrow x=-1+\frac{2}{1-2\varepsilon}=\delta(\varepsilon_2)$$

ε değeri y ekseninde 0 değerine yaklaşırken mavi bandı sıkıştırırken x eksenindeki değerler kırmızı bant x=1 noktasında yığılma gösterir.Bu da bize fonksiyonun x=1 noktasındaki yığılmasının y ekseninde ½ noktasındaki yığılmaya karşılık geleceğini gösterir.