Theorem

The following two limits hold:

- $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$
- $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$

Notice

$$\sin\theta \le \theta \le 2\tan\frac{\theta}{2} \le \tan\theta$$

Divide by $\sin\theta$:

$$1 \le \frac{\theta}{\sin\theta} \le \frac{1}{\cos\theta}$$

Take reciprocals:

$$1 \ge \frac{\sin\theta}{\theta} \ge \cos\theta$$

As $\theta \to 0$, the left and right sides tend to 1. So, then, must the middle expression.

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

So

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cdot\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$$
$$= 1\cdot 0 = 0.$$

Example

1. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta}{\theta}$
2. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin 2\theta}{\theta}$

Answer

1. 1
2. 2

1. Use the basic trigonometric limit and the definition of tangent.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta\cos\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos\theta} = 1\cdot\frac{1}{1} = 1.$$

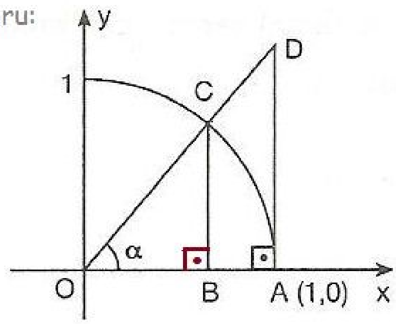
2. Change the variable:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\theta} = \lim_{2\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{2\theta\cdot\frac{1}{2}} = 2\cdot\lim_{2\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{2\theta} = 2\cdot 1 = 2$$

OR use a trigonometric identity:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\theta} = 2\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 2\cdot 1\cdot 1 = 2$$

soru:

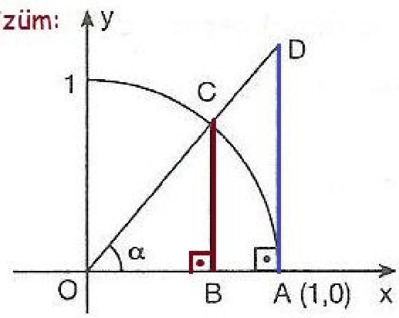


Şekildeki birim çemberin I. bölgesindeki yayı ile C noktası verilmiştir.

Buna göre, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{|AD|}{|CB|}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

çözüm:

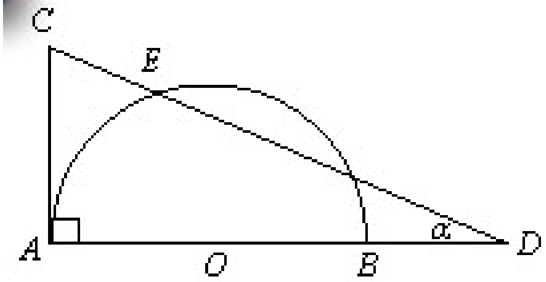


Tanım gereği AD uzunluğu $\tan\alpha$ *ve CB uzunluğu* $\sin\alpha$ *dır.*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{|AD|}{|CB|} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}$$
$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\cos\alpha}$$
$$= \frac{1}{\cos 0}$$
$$= 1$$

bhg,temmuz2010,İstanbul...

Örnek.



Şekilde $m(\overset{\frown}{AE}) = |AC|$ **ise** $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{AD}{AB} = 2$ **old.. göst.**

Çözüm. O.Ekiz

$\alpha \to 0$ için $\overset{\frown}{AE} \to |AE|$ olacaktır.

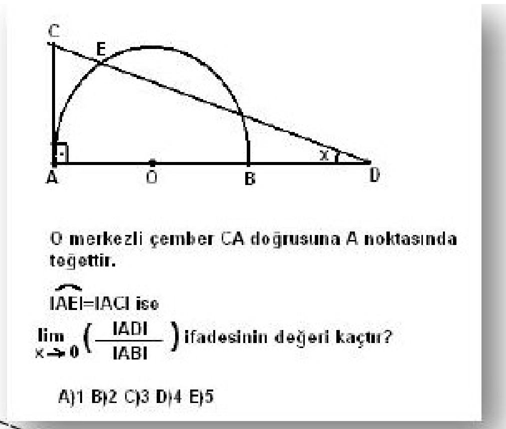
Bu durumda $\alpha \to 0$ için $|AC| = |AE|$ (*)

alabiliriz. Burdan m(ACE) = 90 - α

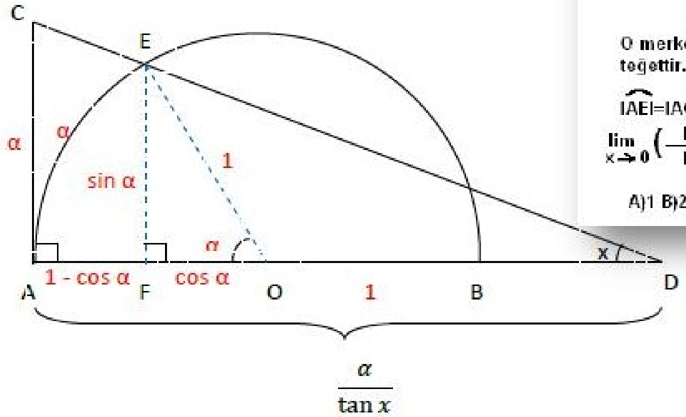
olup m(CAE)=$2\alpha = m(ABE)$*dir*.

Dolayısı ile AD= $\dfrac{AC}{\tan\alpha}$ ve AB= $\dfrac{AE}{\sin 2\alpha}$ olur.

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{AD}{AB} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{AC}{\tan\alpha}}{\frac{AE}{\sin 2\alpha}} \text{ (*)}dan = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin 2\alpha}{\tan\alpha} = 2 \text{ olur.}$$



Çözüm (Eyüp Kamil Yeşilyurt, mart 2010)

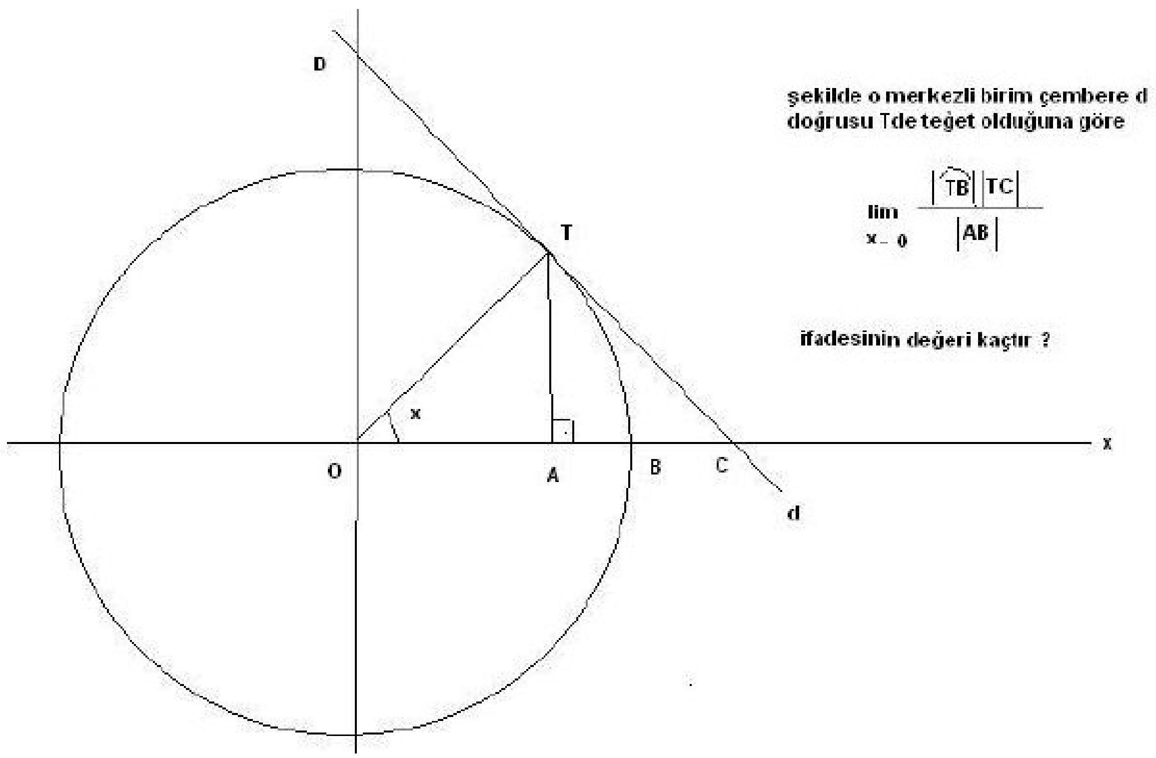


O merkezli çemberin yarıçapı 1 birim ve $m(E\hat{O}A) = \alpha$ radyan olsun. Yarıçap 1 birim olduğundan AE yayının uzunluğu α birimdir. Hipotezden $|AC| = \alpha$ birim olur. EFO dik üçgeninde; |EF|= sin α birim ve |FO|= cos α birim olduğundan |AF|= 1 − cos α birim elde edilir. CAD dik üçgeninde; $|AC| = \alpha$ birim olduğundan $|AD| = \frac{\alpha}{\tan x}$ birim olduğundan $|FD| = \frac{\alpha}{\tan x} - (1 - \cos\alpha)$ olur. EFD dik üçgeninde; $\tan x = \frac{|EF|}{|FD|}$ ise $\tan x = \frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{\tan x} - 1 + \cos\alpha}$ içler dışlar çarpımı yapılıp düzenlenirse

$\tan x = \frac{\alpha - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$ elde edilir.

$$\lim_{x\to 0}\frac{|AD|}{|AB|} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\alpha}{\tan x}}{2} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha - 2\sin\alpha} = \frac{3}{2}$$

,,



Çözüm:

Birim çember olduğundan |OA|=cosx, |AB|=1 – cosx, |TC|=tanx ve birim çemberde yay uzunluğu radyan türünden merkez açının öşçüsüne eişit olduğundan $\left|\widetilde{TB}\right| = x$ olur.

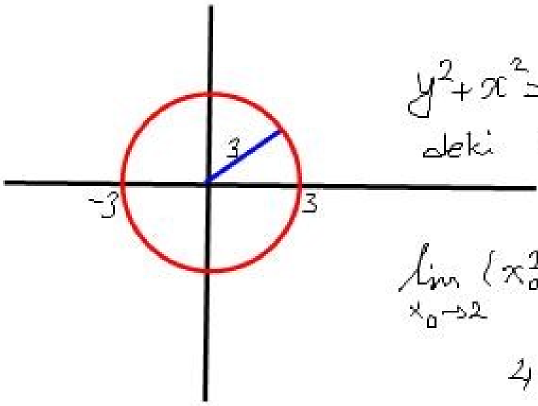
Değerler yerine yazılırsa

$$\lim_{x\to 0}\frac{xtanx}{1-cosx} = \lim_{x\to 0}\frac{xtanx(1+cosx)}{(1-cosx)(1+cosx)} = \lim_{x\to 0}\frac{xtanx(1+cosx)}{sinxsinx} =$$

$$1.1.\lim_{x\to 0}(1+cosx) = 2$$

Olarak bulunur.

limx-->2(x^2+a) değerinin başlangıç noktasına olan uzaklığı en çok 3 br olduğuna göre a nın alabileceği tamsayılar toplamı?(-28) teşekkürler



$y^2+x^2=9$ çemberi üzerindeki x noktaları aradığımız cevaptır.

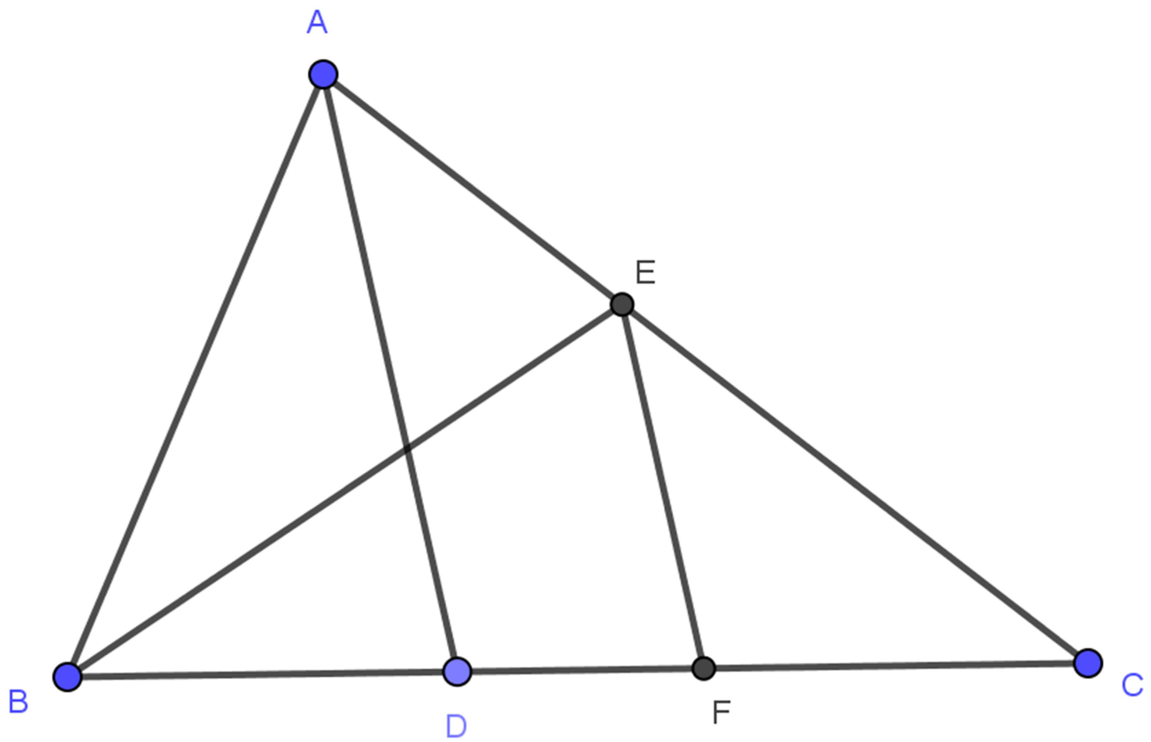
$\lim_{x_0\to 2}(x_0^2+a)=x$ ise

$4+a=x$

$-3\le 4+a\le 3$

$-7\le a\le -1$

$-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1$ toplamı -28 dir.



Yukarıdaki şekilde [BE], ABC a.ısnın açıortayı, D noktası [BC] üzerinde bir nokta ve [EF]//[AD] olmak üzere $\lim_{A\to D}\frac{|CF|}{|FD|}$ ifadesinin değeri ne olur.

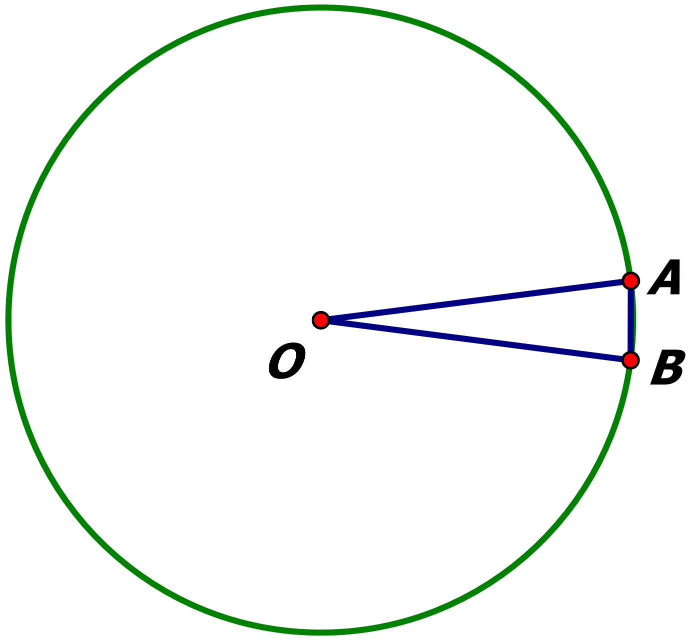
Çözüm:

[EF]//[AD] olduğundan CAD üçgeninde temel orantı kuralı gereği $\frac{|CE|}{|AE|}=\frac{|CF|}{|DF|}$ olur.

ABC üçgeninde [BE] açıortay olduğundan $\frac{|CE|}{|AE|}=\frac{|BC|}{|BA|}$ olur. Bu iki orantıdan $\frac{|BC|}{|BA|}=\frac{|CF|}{|DF|}$ olur.. $A \to D\ için\ |BA| \to |BD|$ olacaktır. Yani limit işlemi

$\lim_{A\to D}\frac{|CF|}{|FD|}=\lim_{|BA|\to|BD|}\frac{|CF|}{|FD|}=\lim_{|BA|\to|BD|}\frac{|BC|}{|BA|}=\frac{|BC|}{|BD|}$ olarak bulunur.

Çemberin Çecresi



$|OA|=|OB|=r$ ve $m(AOB)=\dfrac{2\pi}{n}$ ve $|AB|=l$ olsun.

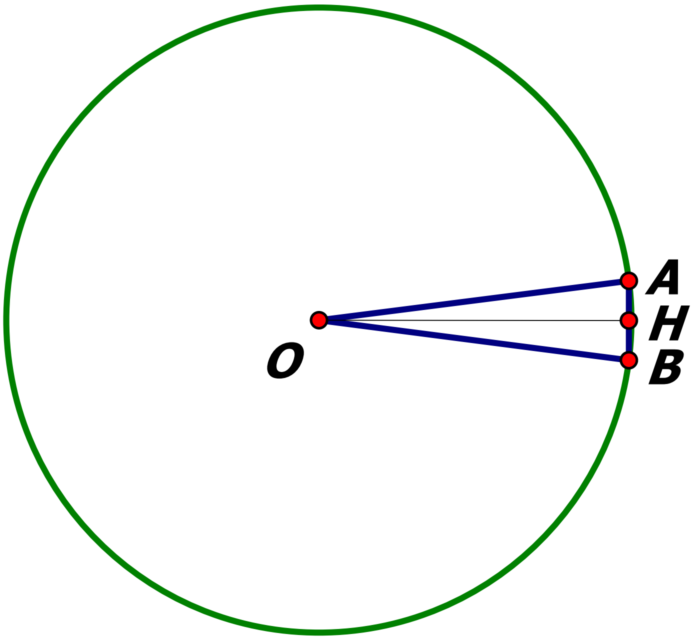
Kosinüs kuralına göre $l^2=r^2+r^2-2.r.r.\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ den

$l=r\sqrt{2\left(1-\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)\right)\overline{n}}=r\sqrt{2\left(1-1+2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right)}=2r\sin\dfrac{\pi}{n}$ olarak bulunur. Çemberin içerisine çizilecek n tane OAB içgeninden |AB| uzunluklarının toplamı n.l kadar olacaktır. Çemberin çevresi n nin sonsuza gitmesi durumunda n.l değeridir.

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot 2r\sin\frac{\pi}{n}\right)=2r\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{1}{n}}\right)=2r\cdot\pi=2\pi r$$

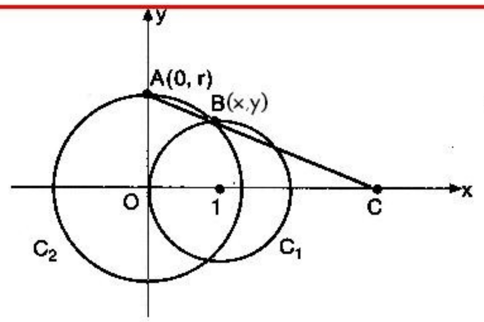
olarak bulunur.

Dairenin alanı



Şekilde $m(AOB)=\frac{2\pi}{n}$ olsun $A(AOB)=\frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ dir. Çemberin içerisine çizilecek n tane OAB içgeninin alanlarının toplamı n sonsuz olması durumunda dairenin alanına eşit olacaktır. Yan dairenin alanı $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}\right)$ olarak hesaplanır. Bu değer

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}\right)=\frac{r^2}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{1}{n}}=\frac{r^2}{2}\cdot 2\pi=\pi r^2$ olarak bulunur.



Şekilde $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1$ çemberi ve değişken $C_2 : x^2 + y^2 = r^2$ çemberleri verilmiştir.

Çemberlerin 1. bölgedeki kesim noktası B ve A dan geçen doğru x eksenini C noktasında kesmektedir. **Buna göre,**

$$\lim_{r \to 0^+} |OC|$$

limitinin değeri kaçtır?

B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çember denklemleri ortak çözülürse

$(x, y) = \left(\frac{r^2}{2}, \frac{r^2}{2}\right)$ bulunur.

$(0, r)$ ve $\left(\frac{r^2}{2}, \frac{r^2}{2}\right)$ noktalarından geçen doğru denklemi yazılırsa;

$y - r = \frac{r-2}{r} \cdot (x - 0)$ bulunur.

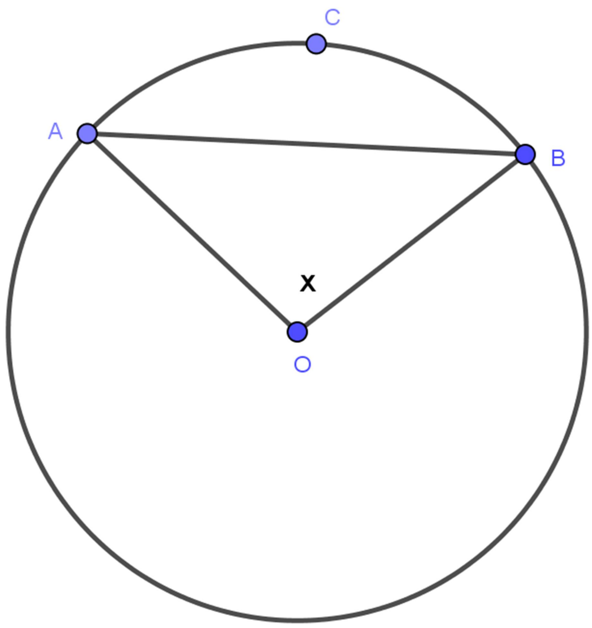
$y = 0$ için doğrunun x eksenini kestiği noktanın apsisi bulunursa;

$x = \frac{r^2}{2-r}$ elde edilir.

$\lim_{r \to 0^+} \left(\frac{r^2}{2-r}\right) = 0$ olur.

hburakyalçın
iskenderun

Soru:



Şekilde m(AOB)=x ve çemberin yarıçapı r olmak üzere $\lim_{x\to 0}\dfrac{\left|\widehat{ACB}\right|}{|AB|}$ değerini bulunuz.

Çözüm:

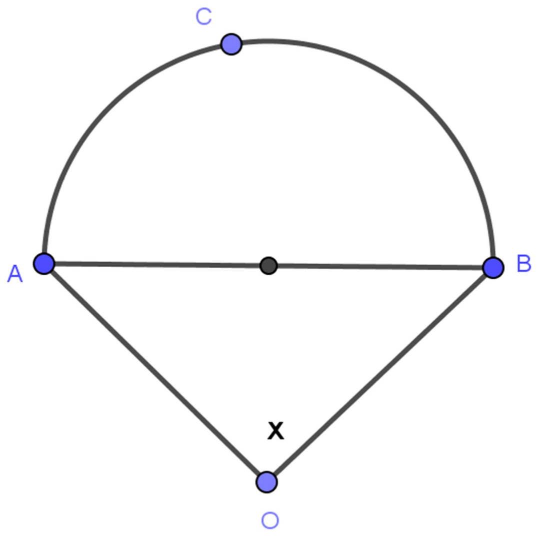
$x\, radyan\, olarak \left|\widehat{ACB}\right| = \dfrac{2\pi r x}{2\pi} = rx$ olarak bulunur.

Kosinüz teoreminden $|AB|^2 = 2r^2 - 2r^2\cos x = 2r^2(1-\cos x) = 4r^2\sin^2\dfrac{x}{2}$ ve $|AB| = 2r\sin\dfrac{x}{2}$ larak bulunur. Limitte yerine yazılırsa

$$\lim_{x\to 0}\frac{rx}{2r\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

Olarak bulunur.

Soru:



Şekil OAB ikizkenar üçgeni ile [AB] çaplı yarım daireden oluşmaktadır. |OA|=|OB|=r, m(AOB)=x olarak veriliyor. Yarım dairenin alanı A(x) ve A(AOB)=B(x) olmak üzere $\lim\limits_{x\to 0} = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ değerini bulunuz.

Çözüm:

AOB üçgeninde kosinüz teoreminden

$|AB|^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\cos x = 2r^2(1-\cos x) = 4r^2\sin^2\dfrac{x}{2}$ den $|AB| = 2r\sin\dfrac{x}{2}$ olur.

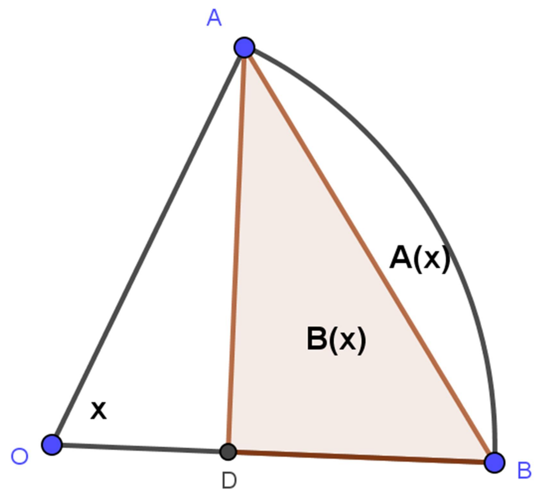
Yarım dairenin alanı $A(x) = \dfrac{\pi\left(\dfrac{|AB|}{2}\right)^2}{2} = \dfrac{\pi|AB|^2}{8} = \dfrac{\pi r^2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2}$ olarak bulunur.

AOB üçgeninde $A(AOB) = \dfrac{1}{2}r^2\sin x = \dfrac{1}{2}r^2\cdot 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = r^2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ olur.

Limitte yerine yazılırsa $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{r^2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2}}{r^2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{2\cos\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot 0 = 0$ olarak

bulunur.

Soru:



,

Şekildeki daire diliminde O merkez ve |OA|=|OB|=1, m(AOB)=x ve A(x) ile B(x) bulundukları bölgelerin alanlarını göstermektedir. Buna göre

$$\lim_{x\to 0}\frac{A(x)}{B(x)}$$

Limitinin değerini bulunuz.

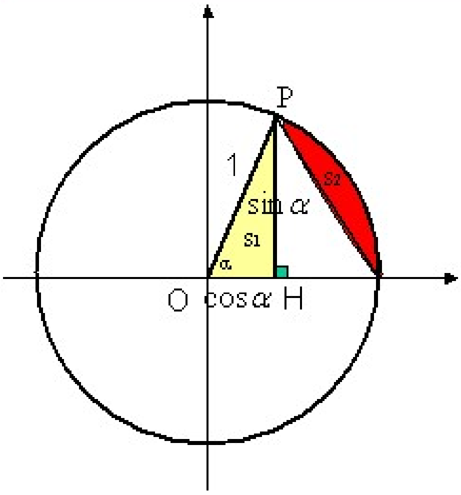
Çözüm:

AOD üçgeninde |OD|=cosx, |AD|=sinx, |DB|=1 – cosx, ve $B(x)=\dfrac{|AD|\cdot|BD|}{2}$ olur.

A(x) dire diliminin alanından AOB üçgeninin alanının farkına eşittir. Yani $A(x)=\dfrac{\pi x}{2\pi}-\dfrac{1}{2}\sin x=\dfrac{x-\sin x}{2}$ olur. Limitte yerine yazılırsa $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\sin x(1-\cos x)}$ limiti elde edilir. L'Hospital uygulanırsa

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x(1-\cos x)+\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x(1-\cos x)+\cos x\sin x+2\sin x\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x\left[1+2\cos x\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+2\cos x}=\frac{1}{3}$$

Olarak bulunur.



Şekilde P noktası r yarıçaplı çemberin I. Bölgesinde değişmektedir.
m(POH)=α
S_1 ve S_2 bulundukları bölgelerin alanları

$\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{S_2}{S_1}$ **limitinin değeri kaçtır?**

Hazırlayan: İ:K☺(2007)

|OH|= $\cos\alpha$

|PH|= $\sin\alpha$

Birim çember olduğunu varsayalım:

$$S_2 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin\alpha}{2} \quad ; \quad S_1 = \frac{\sin\alpha . \cos\alpha}{2}$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{S_2}{S_1} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha . \cos\alpha} = \frac{0}{0}$$ **ise L'Hopital;**

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1 - \cos\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{0}{1} = 0$$

Zafer Çeliköz