4.9 – Sayıların Mutlak Değerleri

4.9.1 – Mutlak Değerin Tanımı

Tam sayılar sisteminde bir tam sayının **mutlak değeri**ni tanımlamıştık. Aynı kavram gerçek sayılar sisteminde de tanımlanır.

Tanım – 4.67

$a \in R$ olmak üzere,

$$|\mathbf{a}| = \begin{cases} \mathbf{a} \ , & \mathbf{a} \geq \mathbf{0} \ \text{ise} \\ -\mathbf{a} \ , & \mathbf{a} < \mathbf{0} \ \text{ise} \end{cases}$$

*ile tanımlanan $|\mathbf{a}|$ sayısına **a'nın mutlak değeri** denir.*

Örneğin;

$|3| = 3,$

$|-5| = -(-5) = 5,$

$|-\sqrt{7}| = -(-\sqrt{7}) = \sqrt{7},$

$|2-\sqrt{3}| = 2-\sqrt{3},$

$|1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$ dir.

Teorem – 4.109

$a \in R$ olmak üzere;

1. $|\mathbf{a}| \geq \mathbf{0}$ *dır.*
2. $|-\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|$ *dir.*
3. $|\mathbf{a}^2| = |\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}^2$ *dir.*
4. $-|\mathbf{a}| \leq \mathbf{a} \leq |\mathbf{a}|$ *dir.*

Örneğin;

$|-4| > 0,$

$|-\sqrt{2}| = |\sqrt{2}|,$

$|(-3)^2| = |-3|^2 = (-3)^2,$

$-|-2| = -2 < |-2|$ dir.

Etkinlik – 4.229

Teorem-4.109'u ispatlayınız.

Teorem – 4.110

Her $a \in R$ için, $\sqrt{\mathbf{a}^2} = |\mathbf{a}|$ dır.

Örneğin;

$\sqrt{3^2} = |3| = 3, \quad \sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$ tir.

Etkinlik – 4.230

Teorem-4.110'u ispatlayınız.

Örnek – 4.137

$\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2}$ sayısını en sade biçimde yazalım:

$\sqrt{3}-2 < 0$ ve $2\sqrt{3}-3 > 0$ dır.

Buna göre;

$$\begin{aligned} \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(2\sqrt{3}-3)^2} &= |\sqrt{3}-2| + |2\sqrt{3}-3| \\ &= -(\sqrt{3}-2) + (2\sqrt{3}-3) \\ &= -\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}-3 \\ &= \sqrt{3}-1 \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

Örnek – 4.138

$x < 2$ olduğuna göre, $\sqrt{x^2-4x+4}$ ifadesini en sade biçimde yazalım:

$x < 2$ ise $x-2 < 0$ dır.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-4x+4} &= \sqrt{(x-2)^2} \\ &= |x-2| \\ &= -(x-2) \\ &= 2-x \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

Etkinlik – 4.231

Aşağıdaki ifadeleri, verilen koşullarda mutlak değer sembolü kullanmadan yazınız.

a. $|2a-b| - |a-2b| + |-a| - |-b|$ **;** $a < 0 < b$

b. $\sqrt{4a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt{a^2+b^2-2ab}$ **;** $a < b < 0$

c. $|-4x - |3-x|| - x$ **;** $-1 < x < 3$

d. $\sqrt{(-6)^2} + |-2\sqrt{7}| - |2\sqrt{7}-6|$

Teorem – 4.111

a, b $\in R$ *olmak üzere;*

1. $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|$ *dir.*

2. $\left|\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right| = \dfrac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}$ *dir.* $(b\neq 0)$

3. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$ *dir.*

4. $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$ *dir.*

İspat

1. $|a\cdot b| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^2} = |a|\cdot|b|$

2. Siz yapınız.

3. $|a+b| = \sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{a^2+2ab+b^2}$

$\Rightarrow |a+b| = \sqrt{|a|^2+2ab+|b|^2}$

$\Rightarrow |a+b| \le \sqrt{|a|^2+2|a|\cdot|b|+|b|^2}$

$\Rightarrow |a+b| \le \sqrt{(|a|+|b|)^2}$

$\Rightarrow |a+b| \le |a|+|b|$

4. $|a-b| = |a+(-b)| = \sqrt{[a+(-b)]^2}$

$\Rightarrow |a-b| = \sqrt{a^2+2a(-b)+(-b)^2}$

$\Rightarrow |a-b| = \sqrt{|a|^2+2a(-b)+|b|^2}$

$\Rightarrow |a-b| \le \sqrt{|a|^2+2|a|\cdot|b|+|b|^2}$

$\Rightarrow |a-b| \le \sqrt{(|a|+|b|)^2}$

$\Rightarrow |a-b| \le |a|+|b|$

4.9.2 – Mutlak Değerli Terimler İçeren Denklemler ve Eşitsizlikler

Teorem-4.112 ve Teorem-4.113 denklem ve eşitsizlik çözümlerinde, -özel durumlarda– çözüm kolaylığı sağlarlar.

Teorem – 4.112

a, x, y $\in R$ *olmak üzere;*

1. $|\mathbf{x}| = \mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{x} = -\mathbf{a}$ *veya* $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ *dır.*

2. $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| \Leftrightarrow \mathbf{x} = -\mathbf{y}$ *veya* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ *dir.*

Etkinlik – 4.232

Teorem-4.112'yi ispatlayınız.

Örnek – 4.139

Aşağıdaki denklemlerin R'deki çözüm kümelerini bulunuz.

a. $|3x-7| = -2$

b. $|2x+5| = 11$

c. $|5x-1| = |x-5|$

d. $|2x-3|+3x = 2$

Çözüm

a. Bir gerçek sayının mutlak değeri negatif olamaz. $Ç = \varnothing$

b. $|x| = a \Rightarrow x = -a$ veya $x = a$ dır.

Buna göre;

$|2x+5| = 11 \Rightarrow 2x+5 = -11$ veya $2x+5 = 11$

$\Rightarrow x = -8$ veya $x = 3$ olur.

$Ç = \{-8, 3\}$ dir.

c. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = -y$ veya $x = y$ dir.

Buna göre;

$|5x-1| = |x-5| \Leftrightarrow 5x-1 = -(x-5)$ veya $5x-1 = x-5$

$\Leftrightarrow x = 1$ veya $x = -1$ olur.

$Ç = \{-1, 1\}$ dir.

d. $|2x-3|+3x = 2 \Rightarrow |2x-3| = 2-3x$ olur.

$2-3x \ge 0$ olmak koşuluyla,

$|2x-3| = 2-3x$

$\Rightarrow 2x-3 = -(2-3x)$ veya $2x-3 = 2-3x$

$\Rightarrow 2x-3 = 3x-2$ veya $5x = 5$

$\Rightarrow x = -1$ veya $x = 1$ bulunur.

$x = 1$ değeri $2-3x \ge 0$ koşulunu sağlamaz.

$Ç = \{-1\}$ dir.

Etkinlik – 4.233

Aşağıdaki denklemlerin R'deki çözüm kümelerini bulunuz.

a. $|5x+4| = 1$

b. $|7-2x| = 3$

c. $|4-x^2| = 5$

d. $|2x-1| = |3x-4|$

e. $|2x-3| = 6-x$

f. $|6-3x| = 3x-6$

Teorem – 4.113

a, b, x, y $\in R$ *olmak üzere;*

1. $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$ *dır.* $(a \ge 0)$

2. $|x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a$ *veya* $x \ge a$ *dır.* $(a \ge 0)$

3. $a \le |x| \le b \Leftrightarrow a \le x \le b$ *veya* $-b \le x \le -a$ $(0 \le a \le b)$

Etkinlik – 4.234

Teorem-4.113'ü ispatlayınız.

Örnek – 4.140

Aşağıdaki eşitsizliklerin R'deki çözüm kümelerini bulunuz.

a. $|3x+2| \le 4$

b. $|2x-5| > 3$

c. $3 \le |2x+3| < 7$

Çözüm

a. $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$ dır.

$|3x+2| \le 4$

$\Leftrightarrow -4 \le 3x+2 \le 4$

$\Leftrightarrow -6 \le 3x \le 2$

$\Leftrightarrow -2 \le x \le \frac{2}{3}$ olur.

$Ç = \left[-2, \frac{2}{3}\right]$ dır.

b. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ veya $x > a$ dır.

$|2x-5| > 3$

$\Leftrightarrow 2x-5 < -3$ veya $2x-5 > 3$

$\Leftrightarrow x < 1$ veya $x > 4$ olur.

$Ç = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$ dır.

c. $a \le |x| \le b \Leftrightarrow a \le x \le b$ veya $-b \le x \le -a$ dır.

$3 \le |2x+3| < 7$

$\Leftrightarrow 3 \le 2x+3 < 7$ veya $-7 < 2x+3 \le -3$

$\Leftrightarrow 0 \le 2x < 4$ veya $-10 < 2x \le -6$

$\Leftrightarrow 0 \le x < 2$ veya $-5 < x \le -3$ olur.

$Ç = [0;2) \cup (-5;-3]$ dır.

Etkinlik – 4.235

Aşağıdaki eşitsizliklerin R'deki çözüm kümelerini bulunuz.

a. $|3-4x| < 5$

b. $|3x-7| \ge 1$

c. $2 < |5x-3| \le 7$

+ Denklem ve eşitsizliklerde, mutlak değerli terimlerin dışında da bilinmeyenli terimlerin bulunması durumunda Teorem-4.112 veya Teorem-4.113'ü uygulamak zorlaşır. Böyle durumlarda, mutlak değer sembolleri içindeki ifadelerin işaretleri belirlenerek, ifadeler mutlak değer sembolü kullanılmadan yazılır.

Mutlak değer sembollerinin içlerindeki ifadelerin pozitif ya da negatif olduğu aralıkların uç değerlerine **kritik değer**ler adı verilir. Çarpım biçimindeki ifadelerde çarpanların kökleri, kesirlerde pay ve paydaların kökleri kritik değerlerdir. Mutlak değerli terimler içeren denklem ya da eşitsizlikler, bu kritik değerlerin ayırdığı gerçek sayı aralıklarında mutlak değer sembolü kullanılmadan yazılabilir.

Her aralıktaki çözüm kümeleri ayrı ayrı bulunur. Bu kümelerin birleşimleri denklem ya da eşitsizliklerin gerçek sayılardaki çözüm kümelerini verir.

Örnek – 4.141

$|3x-1| + 2x = 4$ denklemini çözelim:

$3x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ kritik değerdir.

$x < \frac{1}{3}$ ise;

$3x-1 < 0$ ve $|3x-1| = -(3x-1)$ olur.

$|3x-1|+2x=4$
$\Rightarrow -(3x-1)+2x=4$
$\Rightarrow x=-3$ bulunur.
$x=-3$ değeri $x<\frac{1}{3}$ aralığındadır.
$Ç_1=\{-3\}$ olur.
$x\geq\frac{1}{3}$ ise;
$3x-1\geq 0$ ve $|3x-1|=3x-1$ olur.
$|3x-1|+2x=4$
$\Rightarrow 3x-1+2x=4$
$\Rightarrow x=1$ bulunur.
$x=1$ değeri $x\geq\frac{1}{3}$ aralığındadır.
$Ç_2=\{1\}$ olur.
Denklemin çözüm kümesi,
$Ç=Ç_1\cup Ç_2 \Rightarrow Ç=\{-3,1\}$ dir.

Örnek – 4.142

$2|x-2|=|x+1|+2x+8$ denklemini çözelim:

$x-2=0 \Rightarrow x=2$ ve $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ kritik değerleri $x<-1$, $-1\leq x<2$ ve $x\geq 2$ aralıklarını ayırır.

$x<-1$ ise;
$x<2$, $x-2<0$, $|x-2|=-(x-2)$ ve
$x+1<0$, $|x+1|=-(x+1)$ olur.
$2|x-2|=|x+1|+2x+8$
$\Rightarrow 2(-x+2)=-x-1+2x+8$
$\Rightarrow x=-1$ bulunur.
$x=-1$ değeri $x<-1$ aralığında değildir.
$Ç_1=\varnothing$ dir.

$-1\leq x<2$ ise;
$x-2<0$, $|x-2|=-x+2$ ve
$x+1\geq 0$, $|x+1|=x+1$ olur.
$2|x-2|=|x+1|+2x+8$
$\Rightarrow 2(-x+2)=x+1+2x+8$
$\Rightarrow x=-1$ bulunur.
$x=-1$ değeri $-1\leq x<2$ aralığındadır.
$Ç_2=\{-1\}$ dir.

$x\geq 2$ ise;
$x-2\geq 0$, $|x-2|=x-2$ ve
$x+1>0$, $|x+1|=x+1$ olur.
$2|x-2|=|x+1|+2x+8$
$\Rightarrow 2(x-2)=x+1+2x+8$
$\Rightarrow x=-13$ bulunur.
$x=-13$ değeri $x\geq 2$ aralığında değildir.
$Ç_3=\varnothing$ dir.
$Ç=Ç_1\cup Ç_2\cup Ç_3 \Rightarrow Ç=\{-1\}$ olur.

Etkinlik – 4.236

Aşağıdaki denklemlerin R'deki çözüm kümelerini bulunuz.

a. $3x-|2x-3|=5$

b. $|x+3|=|x|-1$

c. $|(x-2)(x+1)|-3|x-2|=0$

d. $x^2-2|x|-3=0$

e. $\dfrac{|x|-2}{|x-2|}=2$

f. $\dfrac{|x-|x-4||}{|x|-2}=2$

Örnek – 4.143

$|2x-3|+x\leq 6$ eşitsizliğini çözelim:

$2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ kritik değerdir.

$x<\frac{3}{2}$ ise;
$2x-3<0$ ve $|2x-3|=-2x+3$ olur.
$|2x-3|+x\leq 6$
$\Rightarrow -2x+3+x\leq 6$
$\Rightarrow x\geq -3$ bulunur.
$x\geq -3$ ve $x<\frac{3}{2}$ aralıklarının kesişimi, $x<\frac{3}{2}$ aralığındaki çözümdür.
$Ç_1=\left\{x \mid -3\leq x<\frac{3}{2},\ x\in R\right\}$ dir.

$x \geq \frac{3}{2}$ ise;

$2x-3 \geq 0$ ve $|2x-3| = 2x-3$ olur.

$|2x-3| + x \leq 6$

$\Rightarrow 2x-3+x \leq 6$

$\Rightarrow x \leq 3$ bulunur.

$x \leq 3$ ve $x \geq \frac{3}{2}$ aralıklarının kesişimi, $x \geq \frac{3}{2}$ aralığındaki çözümdür.

$Ç_2 = \left\{x \middle| \frac{3}{2} \leq x \leq 3;\ x \in R\right\}$ olur.

Eşitsizliğin çözüm kümesi;

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 \Rightarrow Ç = \{x \mid -3 \leq x \leq 3;\ x \in R\}$ dir.

Örnek – 4.144

$\left|\frac{2x-3}{x+1}\right| > 2$ eşitsizliğini çözelim:

$\left|\frac{2x-3}{x+1}\right| > 2 \Rightarrow \frac{|2x-3|}{|x+1|} > 2$ dir.

$\frac{|2x-3|}{|x+1|} > 2$ ve $x \neq -1$

$\Rightarrow |2x-3| > 2|x+1|$ olur.

$2x-3=0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ ve $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ kritik değerlerdir.

$x < -1$ ise;

$|2x-3| > 2|x+1|$

$\Rightarrow -2x+3 > -2x-2$

$\Rightarrow 3 > -2$ bulunur.

$x < -1$ iken eşitsizlik sağlanır.

$Ç_1 = \{x \mid x < -1,\ x \in R\}$ olur.

$-1 < x < \frac{3}{2}$ ise

$|2x-3| > 2|x+1|$

$\Rightarrow -2x+3 > 2x+2$

$\Rightarrow x < \frac{1}{4}$ bulunur.

$x < \frac{1}{4}$ ve $-1 < x < \frac{3}{2}$ aralıklarının kesişimi,

$-1 < x < \frac{3}{2}$ aralığındaki çözümdür.

$Ç_2 = \left\{x \middle| -1 < x < \frac{1}{4};\ x \in R\right\}$ olur.

$x \geq \frac{3}{2}$ ise;

$|2x-3| > 2|x+1|$

$\Rightarrow 2x-3 > 2x+2$

$\Rightarrow -3 > 2$ bulunur.

$x \geq \frac{3}{2}$ aralığında eşitsizlik sağlanmaz.

$Ç_3 = \varnothing$ dir.

Eşitsizliğin çözüm kümesi;

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 \cup Ç_3 \Rightarrow Ç = (-\infty, -1) \cup \left(-1; \frac{1}{4}\right)$ olur.

Etkinlik – 4.237

Aşağıdaki eşitsizliklerin R'deki çözüm kümelerini bulunuz.

a. $|3x-1| + 2x - 4 \leq 0$

b. $|x-2| + |2x+4| \leq 8$

c. $\left|2x - |x-3|\right| \leq x+7$

d. $\left|\frac{x}{x+2}\right| \geq 1$

e. $\frac{|x-2|}{x+2} > 1$

f. $\frac{|x-1| + 2x}{|x| - 1} < 2$

4.9.3 – Sayı Doğrusunda Uzaklık

Tanım – 4.68

*Sayı doğrusunda koordinatları **a** ve **b** gerçek sayıları olan A ve B noktaları arasındaki uzaklık,*

$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ *dir.*

Örneğin; $A(-3)$ ve $B(+2)$ ise

$|AB| = |-3-2| = 5$ tir.

P(x) noktasının başlangıç noktasına uzaklığı $|\mathbf{x}|$ tir.

Örnek – 4.145

$A(-3)$ noktasına uzaklığı $B(12)$ noktasına uzaklığının 2 katına eşit olan noktaların koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

I. yol (Cebirsel yol)

Verilen koşula uyan nokta P(x) olsun.

$|PA| = 2|PB|$

$\Rightarrow |x-(-3)| = 2|x-12|$

$\Rightarrow |x+3| = 2|x-12|$ dir.

Kritik değerler -3 ve 12 olur.

$x < -3$ ise;

$|x+3| = 2|x-12|$

$\Rightarrow -x-3 = -2x+24$

$\Rightarrow x = 27$ bulunur.

$Ç_1 = \varnothing$ dir.

$-3 \le x < 12$ ise

$|x+3| = 2|x-12|$

$\Rightarrow x+3 = -2x+24$

$\Rightarrow 3x = 21$

$\Rightarrow x = 7$ bulunur.

$Ç_2 = \{7\}$ dir.

$x \ge 12$ ise;

$|x+3| = 2|x-12|$

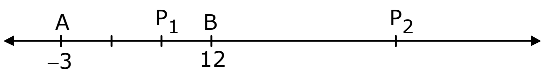
$\Rightarrow x+3 = 2x-24$

$\Rightarrow x = 27$ bulunur.

$Ç_3 = \{27\}$ dir.

Verilen koşula uyan noktalar $P_1(7)$ ve $P_2(27)$ olur.

II. yol (Geometrik yol)



$|AB| = |-3-12| = 15$ tir.

Verilen koşula uyan $P_1(x_1)$ ve $P_2(x_2)$ noktaları için;

$|AP_1| = \frac{2}{3}|AB| \Rightarrow |-3-x_1| = 10 \Rightarrow x_1 = 7$ ve

$|AP_2| = 2|AB| \Rightarrow |-3-x_2| = 2 \cdot 15 \Rightarrow x_2 = 27$ olur.

$P_1(7)$ ve $P_2(27)$ dir.

Örnek – 4.146

$x \in R$ olmak üzere, $|x+2| + |x-6|$ toplamının en küçük değerini bulunuz.

Çözüm

I. yol (Cebirsel yol)

$f(x) = |x+2| + |x-6|$ olsun.

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)-(x-6) & x < -2 \text{ ise} \\ x+2-(x-6) & -2 \le x < 6 \text{ ise} \\ x+2+x-6 & x \ge 6 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x+4 & x < -2 \text{ ise} \\ 8 & -2 \le x < 6 \text{ ise} \\ 2x-4 & x \ge 6 \text{ ise} \end{cases}$$

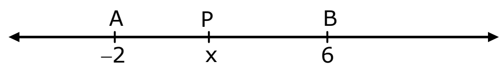
elde edilir.

$x < -2$ ise $f(x) > 8$;

$-2 \le x < 6$ ise $f(x) = 8$;

$x \ge 6$ ise $f(x) > 8$ olacağından $f(x)$ 'in en küçük değeri 8'dir.

II. yol (Geometrik yol)



$|x+2|$, $P(x)$in $A(-2)$ noktasına uzaklığı ve

$|x-6|$, $P(x)$in $B(6)$ noktasına uzaklığıdır.

$|PA| + |PB| = |x+2| + |x-6|$ toplamının en küçük olması için $P(x)$in $[AB]$ üzerinde olması gerekir.

Bu durumda;

$|PA| + |PB| = |AB| = |-2-6| = 8$ olur.

Etkinlik – 4.238

Aşağıdaki denklemleri hem cebirsel yolla hem de geometrik yolla çözünüz.

a. $|x-2| = |x+6|$

b. $|x+1| = 2|x-5|$

c. $|x+3| = 2|x-7| - 2$

d. $|x+3| + |x-2| = 8$

e. $|x+2| - |x-7| = 3$

f. $|x+4| - 2|x-7| = 5$

Etkinlik – 4.239

Aşağıdaki fonksiyonların en küçük değerlerini bulunuz.

a. $f : R \to R,\ f(x) = |x-4| + |x+3|$

b. $f : R \to R,\ f(x) = |x-3| + |x-1| + |x+5|$

c. $f : R \to R,\ f(x) = |x-1| + 2|x+4|$

d. $f : R \to R,\ f(x) = 3|x-2| + 5|x+1|$

Etkinlik – 4.240

Aşağıdaki fonksiyonları parçalı biçimde yazınız. Grafiklerini çiziniz.

a. $f : R \to R,\ f(x) = |x|$

b. $f : R \to R,\ f(x) = |x-2| + x$

c. $f : R \to R,\ f(x) = |x| + |x+2| - 2$

d. $f : R \to R,\ f(x) = |2x - |x-3||$

Alıştırmalar ve Problemler – 4.10

1. Aşağıdaki sayıları, mutlak değer sembolü kullanmadan yazınız.

a. $|23|$ **b.** $|-25|$ **c.** $|-\sqrt{3}|$ **d.** $|\sqrt{5}|$

e. $|2-\sqrt{3}|$ **f.** $|\sqrt{3}-4|$ **g.** $|4-3\sqrt{2}|$

h. $|4\sqrt{3}-5\sqrt{2}|$

2. Aşağıdaki ifadeleri, verilen koşullara göre sadeleştiriniz.

a. $|a-b| + |a+b| + |2a-b|$ **;** $a < b < 0$

b. $|-a| + |-b| + |a-b| - |a-2b|$**;** $a < 0 < b$

c. $|ab-ac| - |ac+bc| - |ab-bc|$; $a < b < c < 0$

d. $\dfrac{|a-b| - |a+b|}{|b-a| - |b|}$**;** $|a| < -b$ ve $a \neq 0$

e. $\dfrac{|a(a+b)| - |b(a+b)|}{a|a| - b|b|}$;

$a \neq b,\ a^n \cdot b^{n+1} < 0,\ a^{n+1} \cdot b^{n+2} < 0,\ n \in N^+$

3. Aşağıdaki ifadeleri, verilen koşullara göre sadeleştiriniz.

a. $|2x-5| + |-x|$; $0 < x < 2$

b. $|x-1| + |x+1| - |2-x| + |-x|$; $x < -1$

c. $|2x - |x-3|| - |2-2x|$; $x < 1$

d. $\sqrt{x^2+y^2-2xy} - \sqrt{x^2-4x+4}$

$-\sqrt{(-x)^2} - \sqrt{(-y)^2}$; $x < 0 < y$

4. Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların, istenen değerlerini bulunuz.

a. $f(x) = 1 - |1-x| - |2x-3|$; $f(-1)$

b. $f(x) = ||x-3| - 4| - |-3-x|$; $f(-2)$

c. $f(x,y) = \dfrac{|x-2y| - |x|}{|x-y| + |y|}$; $f\left(-2, -\sqrt{2}\right)$

5. Aşağıdaki denklemlerin R'deki çözüm kümelerini bulunuz.

a. $|3x-4| = -2$ **b.** $|2x-1| = 0$

c. $|5x-6| = 4$ **d.** $\left|\dfrac{4}{x-2}\right| = 2$

e. $|(x+1)(2x-1)| = 0$ **f.** $|3x+5| = |2x-5|$

g. $|x-1| = 2|x+2|$ **h.** $|x^2-4| = 2|x+2|$

i. $\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right| = 2$ **j.** $\dfrac{|x|+2}{|x|-2} = 3$

k. $|7-|x-3|| = 5$ **l.** $||3x-3|-3| = 3$

6. Aşağıdaki eşitsizliklerin R'deki çözüm kümelerini bulunuz.

a. $|5x-1| \le 0$ **b.** $|3x+1| \le 5$

c. $|3-4x| < 5$ **d.** $|x+4| > 2$

e. $|3-5x| \ge 7$ **f.** $\left|\dfrac{5}{2x-1}\right| < 1$

g. $3 < |2x-5| \le 5$ **h.** $1 < \left|\dfrac{6}{x-3}\right| \le 2$

i. $|x^2-1| \le 2|x+1|$ **j.** $\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right| < |2-x|$

k. $|5-|x-1|| \le 3$ **l.** $||2x-1|-5| \ge 4$

7. a, b, c $\in$R olmak üzere, aşağıda belirtilen aralıkları $|ax+b| \le c$ ya da $|ax+b| \ge c$ biçiminde gösteriniz.

a. $-3 \le x \le 7$ **b.** $-1 < 2x-3 < 5$

c. $x < -5$ veya $x > 3$

d. $2x-5 \le 3$ veya $x \ge 8$

8. Aşağıdaki denklemlerin R'deki çözüm kümele-rini bulunuz.

a. $|x-2|+2x+4=0$ **b.** $|3x-5|-2x=10$

c. $|x-2|-x+2=0$ **d.** $|x+3|+x+3=0$

e. $|2+x|+3=|1-x|$ **f.** $|x-3|+|x|=5$

g. $|2x-3|-|x+1|=6$ **h.** $|x+3|=3|x-3|$

i. $|x-3|+|x+6|=3x$ **j.** $|2x-|x-6||=3$

k. $|5-|2x-1||=x+2$ **l.** $|2x-|x-1||=|x-1|$

m. $|(x+2)(x-3)|-4|x-3|=0$

n. $|(x-1)(x+2)|+2(x-1)=0$

o. $|3x-|x-4||=|8-|x+2||$

p. $\dfrac{|x-6|}{|x|+2}=2$ **r.** $\dfrac{|x-2|}{|x|+1}=\dfrac{x}{x+1}$ **s.** $x^2-|x|=2$

9. Aşağıdaki eşitsizliklerin R'deki çözüm kümelerini bulunuz.

a. $|2x-5| \le x-1$ **b.** $|x+2| \le x+2$

c. $|2-3x| > 3x-2$ **d.** $|x-3|+|x| > 5$

e. $|2-x|+3 \ge |3-x|$ **f.** $|x-3| \le |2x+6|$

g. $|x-2|+|x+1|+3x-6 \le 0$

h. $|2x-1| \le |x+1|+x-1$ **i.** $|x-|2x-3|| \le 6$

j. $|3-|x-2|| > 2x+1$ **k.** $|x+2|(x+1) \ge 0$

l. $x|x+2| \ge |(x-4)(x+2)|$

m. $\left|\dfrac{x-5}{x+3}\right| > 2$ **n.** $1 < \left|\dfrac{5}{2x-1}\right| \le 2$

o. $\dfrac{|x-4|}{|x|+2} < 2$ **p.** $\dfrac{|x-4|}{|x|-2} < 2$

r. $\dfrac{|2x-1|}{x+2} \ge 1$ **s.** $|2x-|x-2|| > |6-|x+2||$

10. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $x+y \ne 0$ ise $\forall x, y \in R;\ \dfrac{|x|-|y|}{|x+y|} \le 1$

b. $x+y \ne 0$ ise $\forall x, y \in R;\ \dfrac{|x|+|y|}{|x+y|} \ge 1$

11. Aşağıdaki denklemleri sağlayan (x,y) ikililerini bulunuz.

a. $\sqrt{x^2+4y^2-4xy}+|x+y-6|=0$

b. $|2x-y-3|+\sqrt{x+2y-4}=0$

c. $|3x+2y+4|+|x-3y+5|=0$

d. $|x-2|+|x^2-2xy-8|=0$

12. $f:R \to R;\ f(x)=|x-a|+|x-b|$ fonksiyonunun en küçük değerinin $f(a)=f(b)$ olduğunu gösteriniz.

13. $f:R \to R;\ f(x)=|x-a|-|x-b|$ fonksiyonunun en küçük değerinin $f(a)$; en büyük değerinin $f(b)$ olduğunu gösteriniz.

14. $a<b<c$ olmak üzere;

$f:R \to R;\ f(x)=|x-a|+|x-b|+|x-c|$ fonksiyonunun en küçük değerinin $f(b)$ olduğunu gösteriniz.

15. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ dizisinin medyanı a_k olmak üzere;

$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n$ ise

$f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \ldots + |x - a_n|$ fonksiyonunun en küçük değerinin $f(a_k)$ olduğunu gösteriniz.

Bundan yararlanarak, aşağıdaki ifadelerin en küçük değerlerini bulunuz.

a. $|x-2| + |x+5|$ **b.** $|x| + |x-8|$

c. $|x| + |x-3| + |x+4|$ **d.** $2|x| + |x-4|$

e. $|x+2| + 2|x-1| + 3|x-5|$

f. $|2x-1| + |3x+2| + |x-3|$

16. $f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| + \ldots + |x - a_n|$
$\qquad - |x - b_1| - |x - b_2| - |x - b_3| - \ldots - |x - b_n|$

fonksiyonunun en küçük ve en büyük değerlerinin bulunduğunu gösteriniz.

Bundan yararlanarak, aşağıdaki fonksiyonların en küçük ve en büyük değerlerini bulunuz.

a. $|x-3| - |x+5|$

b. $|x-5| + |x-6| - |x+3| - |x-8|$

c. $2|x-3| - |x+1| - |x-4|$

d. $|x+3| + 2|x-2| - 3|x+1|$

17. Aşağıda verilen fonksiyonları parçalı biçimde yazınız. Bu fonksiyonların en küçük değerleri ile en büyük değerlerini bulunuz.

a. $f : [-3; 4] \to R, \quad f(x) = |x|$

b. $f : [-8; 8] \to R, \quad f(x) = 2x + |x-5|$

c. $f : [-4; 5] \to R, \quad f(x) = |x| - 2|3-x|$

d. $f : [-2; 4] \to R, \quad f(x) = |x-2| + 2|x+5|$

18. Aşağıdaki denklem ve eşitsizlikleri hem cebirsel yolla hem geometrik yolla çözünüz.

a. $|x| + |x+3| = 7$ **b.** $|x-3| + |x+1| = 4$

c. $|x-1| - |x+4| = 5$ **d.** $|x+2| - |x-5| = 3$

e. $2|x| + |x-2| = 10$ **f.** $|x-4| + |x+2| < 8$

g. $|x-3| + 2|x+1| \ge 10$ **h.** $|x-5| - |x+1| > 4$

19. Aşağıdaki koşulları sağlayan y değerlerinin kümelerini bulunuz.

a. $|x| < 2$ ve $2x + y = 4$

b. $|x - 2y| \le 1$ ve $x + y = 3$

c. $|x + 2y| = 5$ ve $2x - y = 3$

d. $|x + y| = 5$ ve $|x - y| = 3$

20. Aşağıdaki eşitsizlik sistemlerinin R'deki çözüm kümelerini bulunuz.

a. $\left.\begin{array}{l} |x| > 1 \\ |x-2| \ge 2 \end{array}\right\}$ **b.** $\left.\begin{array}{l} |2x-3| \ge 5 \\ |x+1| < 5 \end{array}\right\}$