4.11 – Köklü Sayılar

4.11.1 – Köklü Sayıların Tanımı

Bu bölümde, "kök" dediğimiz sembollerle gösterilen gerçek sayıları **köklü sayılar** olarak tanıtacak ve bunların **gerçek sayıların rasyonel kuvvetleri** olduğunu göstereceğiz.

Tanım – 4.70

$a,\ x \in R^+$ ve $n \in Z^+$ olmak üzere;

*$\mathbf{x^n = a}$ eşitliğini sağlayan x sayısına **a'nın n'yinci kuvvetten pozitif kökü** denir.*

Bu x sayısı $\mathbf{\sqrt[n]{a}}$ ile gösterilir.

$a, x \in R^+$ ve $n \in Z^+$ için; $\mathbf{x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}}$ dır.

$n = 2$ için, $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ olduğunu ve $\sqrt{a}$ ya a'nın pozitif **karekök**ü denildiğini öğrenmiştiniz.

$n = 3$ için, $\sqrt[3]{a}$ ya a'nın **küpkök**ü denir.

Örneğin, $2^4 = 16 \Leftrightarrow 2 = \sqrt[4]{16}$;

$3^3 = 27 \Leftrightarrow 3 = \sqrt[3]{27}$;... dir.

Tanım – 4.71

$a,\ x \in R$ ve $n \in Z^+$ olmak üzere;

*$\mathbf{x^n = a}$ eşitliğini sağlayan x sayıları varsa, bu sayılara **a'nın n'yinci kuvvetten kökleri** denir.*

Tanımlardan şu sonuçları çıkarabiliriz:

1. $x \in R,\ n \in Z^+$ ve n çift iken; $x^n = (-x)^n = a > 0$ olacağından $a \in R^+$ sayısının n'yinci dereceden iki gerçek kökü vardır.

Bu kökler, $x^n = a \Rightarrow x_1 = \mathbf{\sqrt[n]{a}}$ ve

$(-x)^n = a \Rightarrow -x = \sqrt[n]{a} \Rightarrow x_2 = \mathbf{-\sqrt[n]{a}}$ dır.

Örneğin; $x^4 = 81$ ise $x_1 = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$ ve $x_2 = -\sqrt[4]{81} = -3$ olur.

2. Bir gerçek sayının çift kuvveti negatif olamayacağından, negatif gerçek sayıların çift kuvvetten gerçek kökü yoktur.

Örneğin; $x^2 = -4$ ise $x \notin R$ dir.

3. $a \in R,\ n \in Z^+$ ve n tek iken; $x^n = a$ eşitliğini sağlayan bir ve yalnız bir x gerçek sayısı vardır.

$a \in R$, n tek ve $x^n = a$ ise $\mathbf{x = \sqrt[n]{a}}$ dır.

Örneğin, $x^5 = -32 \Rightarrow x = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$;

$x^3 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$ tür.

Teorem – 4.119

$a, b \in R^+$ ve $m, n \in Z^+$ olmak üzere;

1. $\mathbf{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}}$ *dir.*

2. $\mathbf{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}}$ *dir.*

3. $\mathbf{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$ *dir.*

4. $m = kn + r$ ve $k, r \in Z^+$ *için*

$\mathbf{\sqrt[n]{a^m} = a^k \cdot \sqrt[n]{a^r}}$ *dir.*

5. $\mathbf{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}}$ *dır.*

6. $\mathbf{o < a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}}$ *dir.*

Etkinlik – 4.258

Teorem-4.119'u ispatlayınız.

Kök dereceleri tek iken, Teorem-4.118'in $a, b \in R^-$ için de geçerli olduğunu gösteriniz.

Örnek – 4.160

Aşağıdaki işlemleri inceleyiniz.

a. $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4 \cdot 16} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

b. $\left(\sqrt[5]{3}\right)^7 = \sqrt[5]{3^7} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 3^2} = \sqrt[5]{3^5} \cdot \sqrt[5]{3^2} = 3 \cdot \sqrt[5]{9}$

c. $\dfrac{\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt[6]{3}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^5}{3}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{\sqrt{\left(3^2\right)^2}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

d. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5^9}} = \sqrt[12]{\left(5^3\right)^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{\left(5^3\right)^3}} = \sqrt[4]{5^3} = \sqrt[4]{125}$

Etkinlik – 4.259

Aşağıdaki önermelerden hangileri doğrudur.

a. $\sqrt[3]{-4}\cdot\sqrt[3]{-16}=4$

b. $\sqrt[5]{(-5)^3}=\left(\sqrt[5]{-5}\right)^3$

c. $\sqrt[6]{(-3)^4}=\left(\sqrt[6]{-3}\right)^4$

d. $\forall a,b\in R;\ \sqrt[6]{a\cdot b}=\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[6]{b}$

e. $\forall a,b\in R;\ \sqrt[9]{a}\cdot\sqrt[9]{b}=\sqrt[9]{a\cdot b}$

f. $a\in R^+;\ m,n\in Z^+$ için, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

Teorem – 4.120

$a\in R$ *ve* $m,n,p\in Z^+$ *olmak üzere;*

$\boxed{1.}$ *p tek ise* $\sqrt[mp]{\mathbf{a}^{\mathbf{np}}}=\sqrt[m]{\mathbf{a}^{\mathbf{n}}}$ *dir.*

$\boxed{2.}$ *p çift ise* $\sqrt[mp]{\mathbf{a}^{\mathbf{np}}}=\sqrt[m]{|\mathbf{a}|^{\mathbf{n}}}$ *dir.*

Örneğin;

$\sqrt[6]{(-2)^2}=\sqrt[2\cdot3]{(-2)^{2\cdot1}}=\sqrt[3]{|-2|}=\sqrt[3]{2}$ dir.

$\sqrt[9]{(-5)^3}=\sqrt[3\cdot3]{(-5)^{3\cdot1}}=\sqrt[3]{(-5)}=-\sqrt[3]{5}$ tir.

Etkinlik – 4.260

Teorem-4.120'yi ispatlayınız.

Örnek – 4.161

$\sqrt[10]{(2x-7)^2}=\sqrt[15]{(x-2)^3}$ denkleminin R'deki çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm

$\sqrt[10]{(2x-7)^2}=\sqrt[15]{(x-2)^3}$

$\Rightarrow \sqrt[5]{|2x-7|}=\sqrt[5]{x-2}$

$\Rightarrow |2x-7|=x-2$ olur. $\left(a=b\Rightarrow a^5=b^5\right)$

$x<\dfrac{7}{2}$ ise;

$|2x-7|=x-2\Rightarrow -2x+7=x-2$

$\Rightarrow x=3$ bulunur.

$Ç_1=\{3\}$ dir.

$x\geq\dfrac{7}{2}$ ise;

$|2x-7|=x-2\Rightarrow 2x-7=x-2$

$\Rightarrow x=5$ bulunur.

$Ç_2=\{5\}$ dir.

$Ç=Ç_1\cup Ç_2\Rightarrow Ç=\{3,5\}$ olur.

Etkinlik – 4.261

Aşağıdaki denklemlerin R'deki çözüm kümelerini bulunuz.

a. $\sqrt[3]{\sqrt{(3x-4)^3}}=\sqrt{2x+1}$

b. $\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[6]{x^2+2x+3}$

c. $\sqrt[6]{x^2+4x+4}=\sqrt[9]{(2x+7)^3}$

d. $\sqrt[18]{(4x-5)^6}=\sqrt[12]{\left(x^2-2x+1\right)^2}$

4.11.2 – Köklü Sayılarla İşlemler

Teorem-4.119, köklü sayılarla **çarpma** ve **bölme** işlemlerinin nasıl yapılacağını belirtmektedir.

Toplama ve **çıkarma** işlemlerinde de, çarpmanın toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özeliğinden yararlanılır.

Paydalarında köklü sayılar bulunan kesirlerde paydaları rasyonel yapmak, işlemlerde kolaylık sağlar. Paydayı rasyonel yapmak için, şu özdeşliklerden yararlanılır:

$$\mathbf{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$$
$$\mathbf{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$
$$\mathbf{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

n tek ise;

$$\mathbf{a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})}$$
$$\mathbf{a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+...-ab^{n-2}+b^{n-1})}$$

Bunları örneklerle gösterelim:

Örnek – 4.162

Kök dışındaki sayıları kök içine alınız.

a. $3\sqrt{5}$ **b.** $2\sqrt[3]{3}$ **c.** $3\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ **d.** $(-2)\sqrt[3]{2}$

e. $\left(-\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{3}{2}}$ **f.** $2\sqrt{2\sqrt{2}}$ **g.** $2\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{3}}$ **h.** $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{3}\cdot\sqrt[3]{5}}$

Çözüm

$a\in R^+$ için, $\mathbf{a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b}}$ dir.

a. $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot 5}=\sqrt{45}$

b. $2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=\sqrt[3]{24}$

c. $3\cdot\sqrt[4]{\frac{2}{3}}=\sqrt[4]{3^4\cdot\frac{2}{3}}=\sqrt[4]{3^3\cdot 2}=\sqrt[4]{54}$

d. $(-2)\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{(-2)^3\cdot 2}=\sqrt[3]{-16}$

e. $\left(-\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{3}{2}}=-\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{3}{2}}=-\sqrt{\frac{2}{3}}$

f. $2\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt{2^2\cdot 2\sqrt{2}}=\sqrt{2^3\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{2^6\cdot 2}}=\sqrt[4]{128}$

g. $2\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{3}}=\sqrt{2^2\cdot 2\cdot\sqrt[3]{3}}=\sqrt{2^3\cdot\sqrt[3]{3}}=\sqrt{\sqrt[3]{\left(2^3\right)^3\cdot 3}}$

$=\sqrt[6]{512\cdot 3}=\sqrt[6]{1536}$

h. $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{3}\cdot\sqrt[3]{5}}=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{5}{3}\cdot\sqrt[3]{5}}=\sqrt{\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{5}}$

$=\sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot 5}}=\sqrt[6]{\frac{27}{25}}$

Etkinlik – 4.262

$a<0<b$ olduğuna göre, $a\cdot\sqrt[n]{b}$ ifadesinde a'yı aşağıdaki koşullarda kök içine alınız.

a. n tek ise **b.** n çift ise

Örnek – 4.163

Aşağıdaki sayıları, $b\in Z^+$ ve b en küçük olmak üzere, $a\sqrt[n]{b}$ biçiminde yazınız.

a. $\sqrt{54}$ **b.** $\sqrt[3]{32}$ **c.** $\sqrt[4]{48}$ **d.** $\sqrt[3]{\frac{48}{25}}$

Çözüm

a. $\sqrt{54}=\sqrt{9\cdot 6}=\sqrt{3^2\cdot 6}=3\sqrt{6}$

b. $\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{8\cdot 4}=\sqrt[3]{2^3\cdot 4}=2\cdot\sqrt[3]{4}$

c. $\sqrt[4]{48}=\sqrt[4]{16\cdot 3}=\sqrt[4]{2^4\cdot 3}=2\cdot\sqrt[4]{3}$

d. $\sqrt[3]{\frac{48}{25}}=\sqrt[3]{\frac{8\cdot 6}{5^2}}=\sqrt[3]{\frac{2^3\cdot 6\cdot 5}{5^3}}=\frac{2}{5}\sqrt[3]{30}$

Etkinlik – 4.263

$a<b<0<c$ ve $a,b,c\in Z$ dir.

Buna göre, aşağıdaki ifadeleri en sade biçimde yazınız.

a. $\sqrt{a^2b^4c}$ **b.** $\sqrt[3]{a^6b^3c^2}$ **c.** $\sqrt[4]{\frac{a^5b^3}{c^6}}$

d. $\sqrt[4]{(a-b)^6c^4}$ **e.** $\sqrt{(b-a)(a^2-b^2)}$ **f.** $\sqrt[4]{\frac{(a-b)^5}{(b-c)^7}}$

("En sade biçim" derken şunlar kastedilir:

- Kök içindeki üs, kök derecesinden küçük olmalıdır.
- Kök içindeki üsle kök derecesi aralarında asal olmalıdır.
- Kesirlerde payda rasyonel olmalıdır.
- Kök içinde kesir olmamalıdır.)

Örnek – 4.164

Aşağıdaki sayıların kök derecelerini eşitleyiniz.

a. $\sqrt{3};\ \sqrt[3]{2}$ **b.** $\sqrt[3]{5};\ \sqrt[6]{5}$

c. $\sqrt[3]{-3};\ \sqrt[4]{2}$ **d.** $\sqrt[3]{-3};\ \sqrt[5]{-5}$

Çözüm

a. $\sqrt{3} = \sqrt[3\cdot2]{3^{3\cdot1}} = \sqrt[6]{27}$; $\quad \sqrt[3]{2} = \sqrt[2\cdot3]{2^{2\cdot1}} = \sqrt[6]{4}$

b. $\sqrt[3]{5} = \sqrt[2\cdot3]{5^{2\cdot1}} = \sqrt[6]{25}$

c. $\sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3} = -\sqrt[12]{3^4} = -\sqrt[12]{81}$; $\quad \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{8}$

d. $\sqrt[3]{-3} = \sqrt[15]{(-3)^5} = -\sqrt[15]{243}$;

$\sqrt[5]{-5} = \sqrt[15]{(-5)^3} = -\sqrt[15]{125}$

Örnek – 4.165

Aşağıdaki kesirlerin paydalarını rasyonel yapınız.

a. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}$ **b.** $\dfrac{6}{\sqrt[5]{27}}$ **c.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$

d. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ **e.** $\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$ **f.** $\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}-1}$

Çözüm

a. $\sqrt[n]{a^k}\cdot\sqrt[n]{a^{n-k}} = \sqrt[n]{a^n} = a$ eşitliğinden yararlanacağız.

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{4\cdot\sqrt[3]{4}}{2} = 2\cdot\sqrt[3]{4}$$

b. $$\frac{6}{\sqrt[5]{27}} = \frac{6}{\underset{\left(\sqrt[5]{3^2}\right)}{\sqrt[5]{3^3}}} = \frac{6\cdot\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{6\cdot\sqrt[5]{9}}{3} = 2\cdot\sqrt[5]{9}$$

c. $$\frac{1}{\underset{\left(\sqrt{5}+1\right)}{\sqrt{5}-1}} = \frac{\sqrt{5}+1}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

d. $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) = a^3-b^3$ tür.

$$\frac{1}{\underset{\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+\sqrt[3]{2}+1\right]}{\sqrt[3]{2}-1}} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1} = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$$

e. $(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right) = a^3+b^3$ tür.

$$\frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1} = \frac{4}{\underset{\left(\sqrt[3]{3}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2-\sqrt[3]{3}+1}} = \frac{4\cdot\left(\sqrt[3]{3}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3+1}$$

$$= \frac{4\left(\sqrt[3]{3}+1\right)}{4} = \sqrt[3]{3}+1$$

f. $$\frac{2}{\underset{\left(\sqrt[4]{3}+1\right)}{\sqrt[4]{3}-1}} = \frac{2\left(\sqrt[4]{3}+1\right)}{\left(\sqrt[4]{3}\right)^2-1^2} = \frac{2\cdot\left(\sqrt[4]{3}+1\right)}{\underset{\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}-1}}$$

$$= \frac{\cancel{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt[4]{3}+1\right)}{\cancel{2}} = \left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt[4]{3}+1\right)$$

Etkinlik – 4.264

Aşağıdaki kesirlerin paydalarını rasyonel yapınız.

a. $\dfrac{5}{2\cdot\sqrt[4]{125}}$ **b.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}$ **c.** $\dfrac{9}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{4}}$

d. $\dfrac{25}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$ **e.** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}}$ **f.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}$

Örnek – 4.166

Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}$ **b.** $\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt[3]{2}}$ **c.** $\sqrt[3]{4\sqrt{2\sqrt{2}}}$

d. $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5\cdot\sqrt[3]{5}}$

Çözüm

Çarpma ve bölme işlemlerinde önce kök dereceleri eşitlenir.

a. $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{108}$ olur.

b. $\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt[6]{4}} = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ olur.

c. $\sqrt[3]{4\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{4^2\cdot2\sqrt{2}}} = \sqrt[6]{2^5\sqrt{2}}$

$= \sqrt[6]{\sqrt{2^{10}\cdot2}} = \sqrt[12]{2^{11}}$ olur.

d. $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5\cdot\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{5^3}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{5^4}}$

$= \sqrt[6]{5^3}\cdot\sqrt[6]{5^4} = \sqrt[6]{5^7} = 5\cdot\sqrt[6]{5}$ olur.

Örnek – 4.167

Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $4\sqrt{20}+3\sqrt{45}-2\sqrt{125}$ **b.** $\sqrt[3]{2^7}-3\sqrt[3]{54}+2\sqrt[3]{16}$

c. $\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

d. $\left(\sqrt[6]{243}-\sqrt[6]{72}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

Çözüm

a. $4\cdot\sqrt{2^2\cdot 5}+3\cdot\sqrt{3^2\cdot 5}-2\cdot\sqrt{5^2\cdot 5}$

$=4\cdot 2\cdot\sqrt{5}+3\cdot 3\cdot\sqrt{5}-2\cdot 5\cdot\sqrt{5}=7\sqrt{5}$ olur.

b. $\sqrt[3]{2^7}-3\cdot\sqrt[3]{54}+2\sqrt[3]{16}$

$=\sqrt[3]{2^6\cdot 2}-3\cdot\sqrt[3]{3^3\cdot 2}+2\cdot\sqrt[3]{2^3\cdot 2}$

$=4\cdot\sqrt[3]{2}-9\cdot\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}=-\sqrt[3]{2}$ olur.

c. $\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

$=\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[6]{36}-\sqrt[6]{9}\left(\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{27}\right)$

$=\sqrt[6]{72}-\sqrt[6]{72}-\sqrt[6]{9\cdot 27}=-\sqrt[6]{3^5}$ olur.

d. $\left(\sqrt[6]{243}-\sqrt[6]{72}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

$=\left(\sqrt[6]{3^5}-\sqrt[6]{3^2\cdot 2^3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

$=\sqrt[6]{3^2}\left(\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[6]{2^3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

$=\sqrt[3]{3}\,\underbrace{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\sqrt[3]{3}$ olur.

Örnek – 4.168

Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

b. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}-\dfrac{5\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

c. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}-1}-\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-1}$

d. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}$

Çözüm

a. $\dfrac{3\sqrt{2}}{\underset{(\sqrt{6})}{\sqrt{6}}}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{\underset{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1}}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{\underset{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}}$

$=\dfrac{3\sqrt{12}}{6}+\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}-\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$ olur.

b. $\dfrac{1}{\underset{(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}}-\dfrac{5\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)}{\underset{(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{1}-\dfrac{\cancel{5}\cdot\left(\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)}{\cancel{5}}$

$=\cancel{\sqrt[3]{9}}+\sqrt[3]{6}+\cancel{\sqrt[3]{4}}-\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4}$

$=-\sqrt[3]{6}$ olur.

c. $\dfrac{1}{\underset{(\sqrt[4]{2}+1)}{\sqrt[4]{2}-1}}-\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt[4]{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}-1}$

$=\dfrac{\sqrt[4]{2}+1-\sqrt[4]{2}}{\underset{(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}-1}}=\sqrt{2}+1$ olur.

d. $\dfrac{1}{\underset{(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})}{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}}+\dfrac{1}{\underset{(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}{\sqrt[2]{9}-2}=\dfrac{2\cdot\sqrt[3]{3}}{\underset{(\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{9}+4)}{\sqrt[3]{9}-2}}$

$=\dfrac{2\cdot\sqrt[3]{3^5}+4\cdot\sqrt[3]{3^3}+8\sqrt[3]{3}}{\left(\sqrt[3]{9}\right)^3-2^3}=12+8\cdot\sqrt[3]{3}+6\sqrt[3]{9}$ olur.

Toplama işleminde "önce paydaların rasyonel yapılacağı" kuralının bir doğa kuralı olmadığını görüyorsunuz. Duruma göre, önce paydaları eşitlemeyi de seçebiliriz.

Etkinlik – 4.265

Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$ **b.** $\dfrac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt[6]{96}}$

c. $\sqrt{2\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}}}}\cdot\sqrt{2}$ **d.** $\sqrt[3]{4\sqrt{2\sqrt{\dfrac{1}{2}}}}\cdot\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{6}$

Etkinlik – 4.266

Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\sqrt{\dfrac{1}{6}}$ **b.** $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}+\sqrt[3]{\dfrac{16}{9}}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{36}}$

c. $\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}\right)\left(3\cdot\sqrt[3]{18}+2\cdot\sqrt[3]{12}+6\right)$

d. $\dfrac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}-\dfrac{5\sqrt{3}-3}{\sqrt{12}}$

e. $\dfrac{6}{\sqrt[3]{2}+1}-\dfrac{2\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$ **f.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}$

g. $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{14}-\sqrt{21}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

h. $\dfrac{\sqrt[6]{5^5}+\sqrt[6]{5^2\cdot3^3}-\sqrt[6]{3^2\cdot5^3}-\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Örnek – 4.169

$a,b\in R^+$ olmak üzere;

$\sqrt{\mathbf{a+b\mp2\sqrt{ab}}}=\left|\sqrt{\mathbf{a}}\mp\sqrt{\mathbf{b}}\right|$ olduğunu gösteriniz.

Bundan yararlanarak; aşağıda verilen, kök için-deki köklü sayıları kök dışına çıkarınız.

a. $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ **b.** $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ **c.** $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Çözüm

$a+b\mp2\sqrt{ab}$ ifadesinin bir tamkare olduğunu gösterelim:

$$a+b\mp2\sqrt{ab}=a\mp2\sqrt{ab}+b=\left(\sqrt{a}\mp\sqrt{b}\right)$$

$\sqrt{a}$ $\sqrt{b}$

$2\sqrt{ab}$

Buna göre;

$$\sqrt{a+b\mp2\sqrt{ab}}=\sqrt{\left(\sqrt{a}\mp\sqrt{b}\right)^2}=\left|\sqrt{a}\mp\sqrt{b}\right| \text{ dir.}$$

a. $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ olur.

$2+3$ $2\cdot3$

b. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=2+\sqrt{3}$ olur.

$4+3$ $4\cdot3$

$3+1$ $3\cdot1$

c. $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ olur.

Örnek – 4.170

$\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$ işlemini yapınız.

Çözüm

Kök içindeki köklü sayılar köklerden çıkarılarak işlem yapılabilir.

Daha kullanışlı bir yol izleyelim:

$x=\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$

$\Rightarrow x^2=4-\sqrt{7}+4+\sqrt{7}-2\sqrt{\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)}$

$\Rightarrow x^2=8-2\sqrt{9}$

$\Rightarrow x^2=2$

$\Rightarrow x=-\sqrt{2}$ veya $x=\sqrt{2}$ bulunur.

Verilen sayının negatif olduğu dikkate alınırsa $x=-\sqrt{2}$ olur.

Etkinlik – 4.267

Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

b. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$

c. $\sqrt{\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}}-\sqrt{\dfrac{9}{2}-2\sqrt{2}}$

d. $\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{6-\sqrt{35}}$

e. $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$

f. $\sqrt{7-3\sqrt{5}}-\sqrt{7+3\sqrt{5}}$

g. $\left(\sqrt{2}-3\right)\cdot\sqrt{11+6\sqrt{2}}$

h. $\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{6-4\sqrt{2}}$

Örnek – 4.171

Aşağıda iç içe sonsuz sayıda köklerle belirtilen sayıları bulunuz.

a. $\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6\ldots}}}}$ **b.** $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}$

c. $\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\ldots}}}$ **d.** $\sqrt[5]{6\sqrt[5]{6\sqrt[5]{6\ldots}}}$

Çözüm

a. $\sqrt{6\underbrace{\sqrt{6\sqrt{6\ldots}}}_{x}} = x$ olsun.

$\Rightarrow \sqrt{6x} = x \Rightarrow x = 6$ bulunur.

b. $\sqrt{6+\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}_{x}} = x$ olsun.

$\Rightarrow \sqrt{6+x} = x$

$\Rightarrow 6 + x = x^2 \quad (x \geq 0; 6 + x \geq 0)$

$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 3$ bulunur.

c. $\sqrt{6-\underbrace{\sqrt{6-\sqrt{6-\ldots}}}_{x}} = x$ olsun.

$\Rightarrow \sqrt{6-x} = x$

$\Rightarrow 6 - x = x^2 \quad (x \geq 0; 6 - x \geq 0)$

$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$\Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$ bulunur.

d. $\sqrt[5]{6\underbrace{\sqrt[5]{6\sqrt[5]{6\ldots}}}_{x}} = x$ olsun.

$\Rightarrow \sqrt[5]{6x} = x \quad (x > 0)$

$\Rightarrow \sqrt[5]{6} = \sqrt[5]{x^4} \Rightarrow x = \sqrt[4]{6}$ bulunur.

Etkinlik – 4.268

Aşağıda iç içe sonsuz sayıda köklerle belirtilen sayıları bulunuz.

a. $\sqrt{6\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots}}}}$ **b.** $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\ldots}}}}}$

c. $\sqrt[3]{3\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{2\sqrt[3]{3\ldots}}}}}$ **d.** $\sqrt{7-\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\ldots}}}}$

Örnek – 4.172

Aşağıdaki denklemlerin R'deki çözüm kümelerini bulunuz.

a. $\sqrt{x} = |x-2|$ **b.** $\sqrt{2x+3} = x$

c. $\sqrt{x+2} = \sqrt{x} - 2$ **d.** $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}} = 5$

Çözüm

a. $x \geq 0$ olmak koşuluyla,

$\sqrt{x} = |x-2|$

$\Rightarrow x = x^2 - 4x + 4$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0$

$\Rightarrow x = 1$ veya $x = 4$ bulunur.

$Ç = \{1, 4\}$ dir.

b. $2x + 3 \geq 0$ ve $x \geq 0$ olmak koşuluyla,

$\sqrt{2x+3} = x$

$\Rightarrow 2x + 3 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3$ veya $x = -1$ olur.

$x = -1$ değeri koşulları sağlamaz.

$Ç = \{3\}$ dir.

c. $x + 2 \geq 0$ ve $\sqrt{x} - 2 \geq 0$ olmak koşuluyla,

$\sqrt{x+2} = \sqrt{x} - 2$

$\Rightarrow x + 2 = \left(\sqrt{x} - 2\right)^2$

$\Rightarrow x + 2 = x - 4\sqrt{x} + 4$

$\Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}$ bulunur.

$x = \dfrac{1}{4}$ değeri $\sqrt{x} - 2 \geq 0$ koşulunu, dolayısıyla denklemi sağlamaz.

$Ç = \varnothing$ dir.

d. $\sqrt{x+\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}_{5}} = 5$

$\Rightarrow \sqrt{x+5} = 5 \Rightarrow x = 20$ olur.

$Ç = \{20\}$ dir.

Etkinlik – 4.269

Aşağıdaki denklemlerin R'deki çözüm kümelerini bulunuz.

a. $\sqrt{2x+1} = x-1$ **b.** $\sqrt{x^2 - x} = x+2$

c. $\sqrt{x-2} = 3 - \sqrt{x+1}$

d. $\sqrt{x - \sqrt{x - \sqrt{x - \ldots}}} = 4$

e. $\sqrt{2 - \sqrt{x}} + \sqrt{2 + \sqrt{x}} = \sqrt{6}$

f. $\sqrt{x - \sqrt{2x - \sqrt{x - \sqrt{2x - \ldots}}}} = 3$

4.11.3 – Gerçek Sayıların Rasyonel Kuvvetleri

$a \in R^+$; $n = m \cdot k$ ve $n, m, k \in Z^+$ olmak üzere,

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{k \cdot m}} = \sqrt[m]{\left(a^k\right)^m} = a^k = a^{\frac{n}{m}} \text{ dir.}$$

Demek ki; $a \in R^+$ ve $m|n$ iken, $\sqrt[m]{a^n}$ sayısı $a^{\frac{n}{m}}$ olarak yazılabilir.

Örneğin; $\sqrt[4]{3^8} = \sqrt[4]{\left(3^2\right)^4} = 3^2 = 3^{\frac{8}{4}}$ tür.

$m|n$ olmak üzere; m tek iken $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ eşitliği $a \in R^-$ olduğunda da geçerlidir.

Örneğin,

$$\sqrt[5]{(-4)^{15}} = (-4)^{\frac{15}{5}} = (-4)^3 = -64\ ;$$

$$\sqrt[3]{(-2)^6} = (-2)^{\frac{6}{3}} = (-2)^2 = 4 \text{ tür.}$$

$m|n$ koşuluyla $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ eşitliği yazılabildiğine göre, bu koşul olmadan da bu eşitliğin yazılabileceğini düşünebiliriz.

$\sqrt[m]{a^n} = a^x$ olsun.

$$\sqrt[m]{a^n} = a^x \Rightarrow a^n = \left(a^x\right)^m$$

$$\Rightarrow a^n = a^{xm}$$

$$\Rightarrow n = xm$$

$$\Rightarrow x = \frac{n}{m}$$

$$\Rightarrow \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} \text{ olur.}$$

Öyleyse; köklü gerçek sayıların, **gerçek sayıların rasyonel kuvvetleri** olduğunu söyleyebiliriz.

Tanım – 4.72

$a \in R$; $m, n \in Z^+$ *ve m ile n aralarında asal olmak üzere,* $\sqrt[m]{a^n} \in R$ *ise*

$$\mathbf{\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}} \textit{ dir.}$$

Örnek – 4.173

a. $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$ tür.

b. $\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^1} = 2^{\frac{1}{4}}$ tür.

c. $\sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{(-2)^1} = (-2)^{\frac{1}{3}} = -2^{\frac{1}{3}}$ tür.

d. $\sqrt[3]{(-2)^2} = (-2)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$ tür.

e. $\sqrt[6]{(-2)^2}$ sayısı $(-2)^{\frac{2}{6}}$ olarak yazılmaz.

Yazılabildiğini varsayalım:

Bu durumda; $\frac{2}{6} \equiv \frac{1}{3} \in Q$ olduğundan $(-2)^{\frac{2}{6}}$ ile $(-2)^{\frac{1}{3}}$ arasında bir fark olmaması gerekir. Hâlbuki; $(-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[3]{|-2|} = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ ve

$(-2)^{\frac{1}{3}} = -2^{\frac{1}{3}}$ olup $(-2)^{\frac{2}{6}} \neq (-2)^{\frac{1}{3}}$ olmaktadır.

Demek ki; $a \in R^-$ ve $\sqrt[m]{a^n} \in R$ iken $a^{\frac{n}{m}}$ nin tanımlı olması için, m ile n aralarında asal olmalıdır. Bu durumda, m kesinlikle tek olur. (Neden?)

$a \in R^+$ iken, her $m, n \in Z^+$ için $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ eşitliği yazılabilir.

$\sqrt[6]{(-2)^2}$ sayısını yine de üslü biçimde yazmak istersek; kök derecesini ve kök içindeki üssü, aralarında asal duruma getirmemiz gerekir:

$$\sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[3]{|-2|} = \sqrt[3]{2^1} = 2^{\frac{1}{3}}$$

Teorem – 4.121

$a, b \in R^+$ *ve* $m, n \in Q$ *olmak üzere;*

1. $\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ *dir.*

2. $\mathbf{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$ *dir.*

3. $\mathbf{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$ *dir.*

4. $\mathbf{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}}$ *dir.*

5. $\mathbf{\left(\dfrac{1}{a}\right)^n = \dfrac{1}{a^n} = a^{-n}}$ *dir.*

6. $\mathbf{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}}$ *dir.*

Etkinlik – 4.270

Teorem-4.121'i ispatlayınız.

Köklü sayıların üslü gösterimleri, köklü sayılarla işlemlerde iyi bir seçenek oluşturur.

Örnek – 4.174

a. $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{3}}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}$ işlemini yapalım:

1. yol

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{9}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\frac{2}{3}}$$

2. yol

Kök derecelerinin 6'da eşitlendiğine dikkat ediniz.

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{9}} = \sqrt[6]{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt[6]{\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4} = \sqrt[6]{\frac{2}{3}}$$

b. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}}$ işlemini yapalım.

1. yol

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{-1}{12}} = 3^{\frac{4+3-1}{12}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

2. yol

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[12]{3^4 \cdot 3^3 \cdot 3^{-1}} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt{3}$$

c. $\sqrt[3]{\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[4]{2}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}}$ işlemini yapalım.

1. yol

$$\sqrt[3]{\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[4]{2}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}} = 3^{\frac{1}{18}} \cdot 2^{\frac{1}{12}} \cdot 2^{\frac{1}{18}} \cdot 3^{\frac{1}{12}}$$
$$= 2^{\frac{5}{36}} \cdot 3^{\frac{5}{36}} = \sqrt[36]{6^5}$$

2. yol

$$\sqrt[3]{\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[4]{2}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt[36]{3^2 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[36]{6^5}$$

d. $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[12]{2} \cdot \sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[3]{10}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{5}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{5}}}}$ işlemini yapalım:

1. yol

$$\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[12]{2} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[3]{10}} \cdot \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{5}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{5}}}}$$
$$= 5^{\frac{2}{3}} \cdot \cancel{2^{\frac{1}{12}}} \cdot \frac{2^{\frac{2}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}} \cdot \frac{\cancel{2^{\frac{1}{6}}} \cdot 5^{\frac{1}{12}}}{\cancel{2^{\frac{1}{12}}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}}$$
$$= 2^{\frac{2}{6}} \cdot 5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}}$$
$$= 2^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{50}$$

2. yol

$$\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[12]{2} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[3]{10}} \cdot \frac{\sqrt[3]{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{5}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{5}}}}$$
$$= \sqrt[12]{5^8 \cdot 2 \cdot \frac{2^4 \cdot 5^3}{2^2 \cdot 5^2} \cdot \frac{2^2 \cdot 5}{2 \cdot 5^2}}$$
$$= \sqrt[12]{2^4 \cdot 5^8} = \sqrt[3]{2 \cdot 5^2} = \sqrt[3]{50}$$

Tabanların negatif olması durumunda Teorem-4.120 geçerli değildir.

Örneğin;

$$\left[(-2)^2\right]^{\frac{1}{2}} \neq (-2)^{2 \cdot \frac{1}{2}} \ ;$$

$$\left[(-2) \cdot (-8)\right]^{1/2} \neq (-2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-8)^{\frac{1}{2}} \text{ olur.}$$

Böyle durumlarda, üslü sayılarla işlemleri hatasız yürütebilmeniz için, tabanları pozitif yapmanızı öneriyoruz.

Şöyle ki:

$a \in R^-$ ve m, n tek ise,

$\sqrt[m]{a^n} = -\sqrt[m]{|a|^n} \Leftrightarrow a^{\frac{n}{m}} = -|a|^{\frac{n}{m}}$;

$a \in R^-$ ve n çift ise,

$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{|a|^n} \Leftrightarrow a^{\frac{n}{m}} = |a|^{\frac{n}{m}}$ dir.

Örnek – 4.175

Aşağıdaki işlemleri inceleyiniz.

a. $(-2)^{\frac{1}{3}} \cdot \left[(-2)^2\right]^{\frac{1}{4}} = -2^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2^2\right)^{\frac{1}{4}}$

$= -2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = -2^{\frac{5}{6}} = -\sqrt[6]{32}$

b. $(-9)^{\frac{1}{3}} \cdot \left[(-3)^4\right]^{\frac{1}{6}} = \left(-3^2\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(3^4\right)^{\frac{1}{6}}$

$= -3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = -3^{\frac{4}{3}} = -\sqrt[3]{3^4} = -3 \cdot \sqrt[3]{3}$

+ Üslü denklemler ve eşitsizliklerle ilgili olarak üslü sayılar bölümünde verdiğimiz teoremler, tabanların pozitif gerçek sayılar olması durumunda, rasyonel üsler için de geçerlidir.

Teorem – 4.122

$a, b \in R^+$ *ve* $m, n, x, y \in Q$ *olmak üzere;*

1. $\mathbf{a^m = a^n \Leftrightarrow m = n}$ *dir.*

2. $\mathbf{a^n = b^n \Leftrightarrow a = b}$ *dir.*

3. $\left.\begin{matrix} \mathbf{a^x = b^m} \\ \mathbf{a^y = b^n} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathbf{\dfrac{x}{y} = \dfrac{m}{n}}$ *dir.*

Etkinlik – 4.271

Teorem-4.122'yi ispatlayınız.

Örnek – 4.176

Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3x+2}$

b. $(x-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{(3x-7)^2}$

Çözüm

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3x+2}$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3x-2}$

$\Rightarrow 2x - 1 = -3x - 2$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{5}$ bulunur.

$Ç = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$ dir.

b. $(x-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{(3x-7)^2}$

$\Rightarrow (x-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{|3x-7|}$

$\Rightarrow (x-1)^{\frac{1}{3}} = \left(|3x-7|\right)^{\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow x - 1 = |3x-7|$ olur.

$x < \frac{7}{3}$ iken;

$x - 1 = |3x-7| \Rightarrow x - 1 = -3x + 7$

$\Rightarrow x = 2$ bulunur.

$Ç_1 = \{2\}$ dir.

$x \geq \frac{7}{3}$ iken;

$x - 1 = |3x-7| \Rightarrow x - 1 = 3x - 7$

$\Rightarrow x = 3$ bulunur.

$Ç_2 = \{3\}$ dir.

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 \Rightarrow Ç = \{2, 3\}$ olur.

Örnek – 4.177

$6^x = 12$ ve $18^y = 6$ olduğuna göre, y'nin x türünden değerini bulunuz.

Çözüm

$6^x = 12 \Rightarrow 2^x \cdot 3^x = 2^2 \cdot 3^1$

$\Rightarrow 2^{x-2} = 3^{1-x}$; ①

$18^y = 6 \Rightarrow 2^y \cdot 3^{2y} = 2 \cdot 3$

$\Rightarrow 2^{y-1} = 3^{1-2y}$ olur. ②

① ve ② den;

$\frac{x-2}{y-1} = \frac{1-x}{1-2y}$

$\Rightarrow x - 2xy - 2 + 4y = y - xy - 1 + x$

$\Rightarrow 3y - xy = 1$

$\Rightarrow y = \frac{1}{3-x}$ bulunur.

Etkinlik – 4.272

Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

a. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = 2^{\frac{3x-1}{2}}$ **b.** $\left(x^2 - 4x + 4\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x-1}{3}$

Teorem – 4.123

1. $a, b \in R^+$ *ve* $n \in Q^+$ *olmak üzere;*

$\mathbf{a^n < b^n \Leftrightarrow a < b}$ *dir.*

2. $0 < a < 1$, $a \in R$ ve $m, n \in Q$ *olmak üzere;*

$\mathbf{a^m < a^n \Leftrightarrow m > n}$ *dir.*

3. $a > 1$, $a \in R$ ve $m, n \in Q$ *olmak üzere;*

$\mathbf{a^m < a^n \Leftrightarrow m < n}$ *dir.*

Etkinlik – 4.273

Teorem-4.123'ü ispatlayınız.

Örnek – 4.178

Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz.

a. $(0,2)^{2x-1} < 5^{x+2}$ $(x \in Q)$

b. $(2x-1)^{\frac{-1}{3}} < (x+2)^{\frac{-1}{3}}$

c. $(x+1)^{-\frac{2}{3}} \le (2x-1)^{-\frac{2}{3}}$

Çözüm

a. $(0,2)^{2x-1} < 5^{x+2}$

$\Rightarrow 5^{-2x+1} < 5^{x+2}$

$\Rightarrow -2x + 1 < x + 2 \Rightarrow x > \frac{-1}{3}$ bulunur.

$Ç = \left\{x \middle| x > \frac{-1}{3},\ x \in Q\right\}$ dir.

b. $(2x-1)^{\frac{-1}{3}} < (x+2)^{\frac{-1}{3}}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$ olur.

Eşitsizliklerde, iki tarafın tek kuvvetinin alınabileceğine dikkat ediniz.

$\left(\frac{1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{1}{2x-1} < \frac{1}{x+2}$ olur.

$x < -2$ iken;

$\frac{1}{2x-1} < \frac{1}{x+2}$

$\Rightarrow x + 2 < 2x - 1$ $[(2x-1) \cdot (x+2) > 0]$

$\Rightarrow x > 3$ bulunur.

$Ç_1 = \varnothing$ dir.

$-2 < x < \frac{1}{2}$ iken;

Eşitsizliğin sol tarafı negatif, sağ tarafı pozitif olacağından eşitsizlik sağlanır.

$Ç_2 = \left(-2; \frac{1}{2}\right)$ dir.

$x > \frac{1}{2}$ iken;

$\frac{1}{2x-1} < \frac{1}{x+2}$

$\Rightarrow x + 2 < 2x - 1$ $[(2x-1) \cdot (x+2) > 0]$

$\Rightarrow x > 3$ bulunur.

$Ç_3 = (3; +\infty)$ dır.

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 \cup Ç_3 \Rightarrow Ç = \left(-2; \frac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$ olur.

c. $(x+1)^{-\frac{2}{3}} \le (2x-1)^{-\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{2}{3}} \le \left(\frac{1}{2x-1}\right)^{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{x+1}\right)^{2} \le \left(\frac{1}{2x-1}\right)^{2}$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{x+1}\right| \le \left|\frac{1}{2x-1}\right| \Rightarrow \frac{1}{|x+1|} \le \frac{1}{|2x-1|}$

$\Rightarrow |2x-1| \le |x+1|$ olur. $\left(x \notin \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}\right)$

$x < -1$ iken;

$|2x-1| \le |x+1| \Rightarrow -2x+1 \le -x-1$

$\Rightarrow x \ge 2$ bulunur.

$Ç_1 = \varnothing$ dir.

$-1 < x < \frac{1}{2}$ iken;

$|2x-1| \le |x+1| \Rightarrow -2x+1 \le x+1$

$\Rightarrow x \ge 0$ bulunur.

$Ç_2 = \left[0; \frac{1}{2}\right)$ dır.

$x > \frac{1}{2}$ iken;

$|2x-1| \le |x+1| \Rightarrow 2x-1 \le x+1$

$\Rightarrow x \le 2$ bulunur.

$Ç_3 = \left[\frac{1}{2}; 2\right)$ dır.

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 \cup Ç_3 \Rightarrow Ç = \left[0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right]$ olur.

Etkinlik – 4.274

Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz.

a. $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} \le \left(\frac{25}{4}\right)^{x-1}$ **b.** $(2x+1)^{\frac{1}{3}} < 3$

c. $(3x-1)^{\frac{2}{3}} \le 4$ **d.** $(5x-2)^{-\frac{1}{5}} \le 2$

e. $(4x+3)^{-\frac{2}{3}} \le 9$ **f.** $(x-3)^{\frac{4}{5}} \le (2x+9)^{\frac{4}{5}}$

g. $(x-4)^{-\frac{3}{5}} \le (3x)^{-\frac{3}{5}}$ **h.** $(x+2)^{-\frac{4}{5}} \le (2x+7)^{-\frac{4}{5}}$

4.11.4 – Sayı Sistemlerine Genel Bakış

Rasyonel ve irrasyonel olarak sınıflandırdığımız gerçek sayılar, **cebrik** ve **transandant** [transcendental(İng.)-Üstün] olarak da sınıflandırılır.

Tanım – 4.73

$a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in Z$ ve $n, n-1, ... \in N$

olmak üzere;

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ *gibi bir cebirsel denklemi sağlayan bir x sayısına* ***cebrik sayı*** *denir.*

Bu türden bir denklemi sağlamayan sayılara ise ***transandant sayı****lar (üstün sayılar) adı verilir.*

Her $\frac{a}{b}$ rasyonel sayısının $bx - a = 0$ denklemini sağlayacağı açıktır.

Öyleyse; her rasyonel sayı bir cebrik sayıdır. Buradan, transandant sayıların irrasyonel sayılar olduğu sonucu çıkarılır.

Sinx, cosx, tanx ifadelerini tanıyorsunuz.

$a \in Q$ iken $\sin a^0$, $\cos a^0$ ve $\tan a^0$ nin cebrik sayılar oldukları ispatlanmıştır.

Açıların değerleri derece cinsinden değil de radyan cinsinden verildiğinde bazı özel değerler dışında, $a \in R$ iken sina, cosa ve tana sayıları transandanttır.

Örneğin; sin2 transandant bir sayıdır. (Burada 2, 2^0 yi değil 2 radyanı gösterir.)

$a \in R$ olmak üzere;

$\sin x = a$, $\cos y = a$ ve $\tan z = a$ eşitliklerini sağlayan x, y, z $\in$R sayıları, bazı özel değerler dışında, transandanttır.

Çemberin uzunluğunun çapına oranı olan $\pi = 3{,}1416...$ sayısının transandant olduğu ispatlanmıştır.

Tanım – 4.74

$a \in R^+$ *olmak üzere;* $\mathbf{10^x = a}$ *eşitliğini sağlayan x sayısına a'nın 10 tabanına göre* ***logaritması*** *denir. Bu x sayısı* $\mathbf{\log_{10} a}$ *ya da* ***loga*** *biçiminde gösterilir.*

$\mathbf{10^x = a \Leftrightarrow x = \log a}$ dır.

a sayısının 10'un tam kuvveti olmadığı durumlarda loga sayısı transandanttır.

Örneğin;

$10^x = 2$ eşitliğini sağlayan $\log 2 = 0,301029 \ldots$ sayısı bir transandant sayıdır.

Tam sayıların irrasyonel kuvvetleri transandanttır. ($2^{\sqrt{2}}$ gibi.)

Bir transandant sayının (örneğin π) cebrik sayılarla çarpımı veya toplamı olan tüm sayılar transandant olacağından, transandant sayıların cebrik sayılardan çok çok fazla olduğu söylenebilir.

Tanım-4.73'e dayanarak, gerçek sayıları aşağıdaki gibi sınıflandırabiliriz:

Gerçek Sayılar

Cebrik Sayılar — Transandant Sayılar (Tümü irrasyoneldir.)

Rasyonel S. — İrrasyonel S.

Sayıların öyküsü burada bitmiyor.

$x^2 + 1 = 0$ denkleminin gerçek kökleri yoktur. Ancak; gerçek bir büyüklüğe karşılık gelmeyen $\sqrt{-1}$ sayısının bulunduğu bir sayı kümesinde bu tür denklemleri de çözebiliriz:

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \mp\sqrt{-1}$ bulunur.

$\sqrt{-1} = i$ dersek, $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \mp i$ olur.

i sayısına **sanal sayı birimi** denir.

Tanım-4.73'de belirtilen bir cebirsel denklemin gerçek sayı olmayan kökleri i türünden yazılabilir.

Örneğin; $x^2 + 4x + 7 = 0$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = -3$$
$$\Rightarrow (x+2)^2 = 3 \cdot -1$$
$$\Rightarrow x + 2 = \mp\sqrt{3}\, i$$
$$\Rightarrow x = -2 \mp \sqrt{3}\, i \quad \text{olur.}$$

Böylece ortaya çıkan,

$C = \{z \mid z = x + yi;\ x, y \in R\}$ kümesine **karmaşık sayılar kümesi** denir. $x + yi$ sayılarının C kümesi $y = 0$ iken gerçek sayılar kümesine, $x = 0$ iken **sanal sayılar kümesi**ne eşit olur.

Demek ki; karmaşık sayılar kümesi hem gerçek, hem de sanal sayılar kümelerini kapsayan en büyük sayı kümesidir.

Gerçek bir büyüklüğe karşılık gelmeyen sanal sayıları var saymanın bir işe yaramayacağı düşünülebilir. Ancak; gelişen bilimde, karmaşık sayılar kümesindeki işlemler geniş uygulama alanları bulmuştur.

Karmaşık sayılar kümesini 11. sınıfta inceleyeceksiniz. Biz burada cebrik sayılara birkaç örnek vererek konuyu bağlayalım:

Örnek – 4.179

Aşağıdaki sayıların cebrik sayılar olduğunu gösteriniz.

a. $\sqrt[3]{5}$ **b.** $\sqrt{2} - 1$ **c.** $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ **d.** $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$

Çözüm

a. $\sqrt[3]{5} = x \Rightarrow 5 = x^3 \Rightarrow x^3 - 5 = 0$

$\sqrt[3]{5}$, tam kat sayılı bir cebirsel denklemin kökü olduğundan bir cebrik sayıdır.

b. $x = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow x + 1 = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

c. $x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \Rightarrow x^2 = 1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = 2 + \sqrt{3}$$
$$\Rightarrow \left(x^4 - 2x^2 - 1\right)^2 = 3$$
$$\Rightarrow x^8 - 4x^6 + 2x^4 + 4x^2 - 2 = 0$$

d. $x = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$ diyelim.

$$\Rightarrow x^2 = \sqrt[3]{9} + 3 \cdot \sqrt[3]{3} + 6$$
$$\Rightarrow x^2 - \left(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3}\right) - 6 = 2\sqrt[3]{3}$$
$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 2\sqrt[3]{3}$$
$$\Rightarrow \left(x^2 - x - 6\right)^3 = 24 \quad \text{olur.}$$

Eşitliğin sol yanı açılıp ifade sıfıra eşitlenirse, tam kat sayılı bir cebirsel denklem elde edileceğinden, $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$ bir cebrik sayıdır.

Alıştırmalar ve Problemler – 4.12

1. Aşağıdaki önermelerden hangileri doğrudur? Yanlış olanları, doğru önermelere dönüştürünüz.

a. $\forall a \in R;\ \sqrt[3]{a} = \sqrt[12]{a^4}$

b. $\forall a \in R;\ \left(a^2\right)^{\frac{1}{2}} = a$

c. $\forall a \in R;\ \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$

d. $\forall a \in R;\ \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a$

e. $\forall a \in R;\ \sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^5}$

f. $\forall a \in R$ ve $m,n \in Z^+$ için $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$

2. Aşağıdaki önermelerden hangileri doğrudur? Yanlış olanlarını, doğru önermelere dönüştürünüz.

a. $\sqrt[9]{(-3)^3} = \sqrt[3]{-3}$ **b.** $\sqrt[18]{(-2)^6} = \sqrt[3]{-2}$

c. $\sqrt[4]{(-4)^2} = 2$ **d.** $\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2} = \sqrt{3}-2$

e. $x \in R,\ x < 2;\ \sqrt[10]{(x-2)^2} = \sqrt[5]{x-2}$

f. $\forall x \in R;\ \sqrt{x^2-2x+1} = |x-1|$

3. Kök dışındaki sayıları kök içine alınız.

a. $4\sqrt{2}$ **b.** $3 \cdot \sqrt[3]{2}$ **c.** $2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ **d.** $(-2)\sqrt{6}$

e. $(-3)\sqrt[3]{3}$ **f.** $2 \cdot \sqrt[3]{2^{-2} \cdot \sqrt{2}}$ **g.** $\frac{2}{3}\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{4}}}$

h. $\left(\sqrt{2}-2\right) \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$

4. Aşağıdaki sayıları, $b \in Z^+$ ve b en küçük olmak üzere, $a \cdot \sqrt[n]{b}$ biçiminde yazınız.

a. $\sqrt{63}$ **b.** $\sqrt[3]{48}$ **c.** $\sqrt[4]{\frac{32}{125}}$ **d.** $\sqrt[3]{6^5 \cdot 12^2}$

e. $\sqrt[5]{2 \cdot 10^{-6}}$ **f.** $\sqrt[5]{24^4 \cdot 10^{11}}$

5. $a < b < 0 < c < d$ ve $a,b,c,d \in Z$ dir.

Buna göre, aşağıdaki ifadeleri en sade biçimde yazınız.

a. $\sqrt{a^{-3}b^3c^2}$ **b.** $\sqrt[3]{a^4 \cdot b^{-3}c}$

c. $\sqrt[4]{a^2c^{-2}d^{-2}}$ **d.** $\sqrt[4]{a^5(b-c)^5}$

e. $\sqrt[6]{(a-b)^6(a+b)^2}$ **f.** $\sqrt[6]{\frac{(a+b)^7}{(c-d)^5}}$

6. Aşağıdaki sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

a. $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[5]{5}$ **b.** $\sqrt[3]{4},\ \sqrt[5]{8},\ \sqrt[7]{32}$

c. $-\sqrt[3]{4},\ -\sqrt[4]{6},\ -\sqrt[6]{8}$

d. $-\sqrt[24]{15},\ -\sqrt[30]{20},\ -\sqrt[36]{24}$

7. Aşağıdaki kesirlerin paydalarını rasyonel yapınız.

a. $\frac{5}{\sqrt{15}}$ **b.** $\frac{7}{\sqrt[3]{49}}$ **c.** $\frac{6}{\sqrt[3]{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}$

d. $\frac{20}{\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt{2}}$ **e.** $\frac{6 \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{9}}$ **f.** $\frac{5}{2-\sqrt[3]{3}}$

g. $\frac{3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ **h.** $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}$ **i.** $\frac{5 \cdot \sqrt[3]{4}}{2 \cdot \sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4}}$

j. $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ **k.** $\frac{2}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$ **l.** $\frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}}$

m. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{3}-\sqrt[3]{3}}$ **n.** $\frac{7}{2-\sqrt[4]{2}}$ **o.** $\frac{\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$

p. $\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}}$ **r.** $\frac{12}{\sqrt{3-\sqrt{2}}+\sqrt{3+\sqrt{2}}}$ **s.** $\frac{\sqrt[6]{6}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt{3}}$

8. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2}$ **b.** $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3}$

c. $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}$

d. $\sqrt[5]{9\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{3}$

e. $\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{12^2}$

f. $\sqrt[5]{\dfrac{5}{\sqrt[6]{5}}}\cdot\sqrt[3]{5}$

g. $\sqrt[7]{8\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

h. $\dfrac{12\cdot\sqrt[3]{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{24}}$

i. $\dfrac{\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{10}}}{\sqrt[3]{20}\cdot\sqrt[6]{40}}$

j. $\sqrt[4]{\left(\dfrac{3\cdot\sqrt{6}}{\sqrt[3]{-18}}\right)^6}$

9. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $3\cdot\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{108}-\sqrt[3]{500}$

b. $\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{24}-3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$

c. $2\cdot\sqrt{54}-\dfrac{9}{2}\sqrt{\dfrac{8}{3}}+6\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

d. $\sqrt[4]{3\cdot 4^3}+\sqrt[4]{4\cdot 3^5}-3\cdot\sqrt[4]{4\cdot 3^{-3}}$

e. $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2\cdot\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}\right)$

f. $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt[6]{108}+\sqrt[3]{2}\right)$

g. $\left(\sqrt[6]{72}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[6]{32}+\sqrt[3]{2}\right)$

h. $\left(\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{50}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{2}\right)$

10. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\sqrt{\dfrac{5}{3}}+\sqrt{\dfrac{3}{5}}+\dfrac{7}{\sqrt{15}}$

b. $\sqrt[3]{\dfrac{81}{25}}-\sqrt[3]{\dfrac{5}{9}}$

c. $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$

d. $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}$

e. $\dfrac{1}{\sqrt[6]{5}-\sqrt[3]{2}}-\dfrac{4\cdot\sqrt[6]{5}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}$

f. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}-\dfrac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}$

g. $\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}-1}-\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}+1}$

h. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}}$

11. $a=\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}$ ve $b=\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}$ olduğuna göre, $\left(a^2-b^2\right)^4$ kaçtır?

12. $x=\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[4]{a}}$ ve $y=\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a}}$ olduğuna göre, y'nin x türünden değerini bulunuz.

13. $x=\sqrt[3]{2}$ ve $y=\sqrt{3}$ olduğuna göre,

aşağıdaki sayıları x ve y türünden yazınız.

a. $\sqrt[3]{48}$ **b.** $\sqrt[6]{72}$

14. $a\in R$ olduğuna göre, aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $3a^2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2}{a^2}}-\sqrt[3]{16a^4}$

b. $2\cdot\sqrt[4]{324a^2}-\dfrac{3a}{2}\sqrt[4]{\dfrac{64}{a^2}}$

15. a,b,c $\in R$ olmak üzere, aşağıdaki ifadelerde köklü çarpanlar birer gerçek sayıdır.

Buna göre, çarpımları en sade biçimde yazınız.

a. $\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^4}$ **b.** $\sqrt{a\cdot b^{-1}\cdot c^2}\cdot\sqrt{a\cdot b^3\cdot c^{-4}}$

16. $f:R\to R;\ f(x)=\sqrt{(x-4)^2}+\sqrt{(x+2)^2}$ olduğuna göre, aşağıdaki fonksiyonların kurallarını en sade biçimde yazınız.

a. $f:(-\infty;-4]\to R;\ f(x)$

b. $f:[-1;3]\to R;\ f(x)$

c. $f:[4;+\infty)\to R;\ f(x)$

17. $x=\sqrt[3]{a^2}$, $y=\sqrt[4]{a^3}$ ve $z=\sqrt[7]{a^6}$ veriliyor.

$a\in R$ olduğuna göre;

a. $0<a<1$ ise x, y, z'yi sıralayınız.

b. $a>1$ ise x, y, z'yi sıralayınız.

18. Kök içindeki köklü sayıları kök dışına çıkarınız.

a. $\sqrt{15-2\sqrt{14}}$ **b.** $\sqrt{15+6\sqrt{6}}$

c. $\sqrt{\frac{9}{4}-\sqrt{2}}$ **d.** $\sqrt{1-\sqrt{\frac{5}{9}}}$

e. $\sqrt{5+\sqrt{21}}$ **f.** $\sqrt{56-24\sqrt{5}}$

g. $\sqrt{3+3\sqrt{3}-\frac{2}{1+\sqrt{3}}}$ **h.** $\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$

i. $\sqrt{\frac{5\sqrt{6}-12}{12\sqrt{6}}}$ **j.** $\sqrt[4]{68+48\sqrt{2}}$

19. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\sqrt{5+\sqrt{21}}-\sqrt{5-\sqrt{21}}$

b. $\sqrt{6-3\sqrt{3}}-\sqrt{6+3\sqrt{3}}$

c. $\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{4+\sqrt{15}}$

d. $\sqrt{28-16\sqrt{3}}+\sqrt{21-12\sqrt{3}}$

e. $\left(\sqrt{3}-3\right)\cdot\sqrt{12+6\sqrt{3}}$

f. $\left(2\sqrt{2}-3\right)\sqrt{51+36\sqrt{2}}$

g. $\left(\sqrt{10}-2\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{45+20\sqrt{5}}$

h. $\left(2\sqrt{3}-4\sqrt{2}\right)\sqrt{88+32\sqrt{6}}$

i. $\sqrt{3-\sqrt{6}}\cdot\sqrt[4]{60+24\sqrt{6}}$

j. $\dfrac{2\sqrt{2}+3}{6+4\sqrt{2}-\sqrt{6+4\sqrt{2}}}$

k. $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}}-\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}}$

l. $\sqrt{\sqrt{3}+2+2\sqrt{\sqrt{3}+1}}-\sqrt{\sqrt{3}+2-2\sqrt{\sqrt{3}+1}}$

20. $-2\le x\le 2$ olmak üzere;

$\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}$ ifadesini $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ biçiminde yazınız.

21. $-1\le x\le 0$ olmak üzere;

$\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}$ ifadesini en sade biçimde yazınız.

22. Aşağıda iç içe sonsuz sayıda köklerle belirtilen sayıları bulunuz.

a. $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots}}}$ **b.** $\sqrt[3]{9\sqrt[3]{9\sqrt[3]{9\ldots}}}$

c. $\sqrt[5]{4\sqrt[5]{4\sqrt[5]{4\ldots}}}$ **d.** $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\ldots}}}}$

e. $\sqrt[3]{4\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt{2\ldots}}}}$ **f.** $\sqrt{2:\sqrt{2:\sqrt{2:\ldots}}}$

g. $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots}}}$

h. $\sqrt{30-\sqrt{30-\sqrt{30-\ldots}}}$

23. Aşağıdaki denklemlerin R'deki çözüm kümelerini bulunuz.

a. $\sqrt{x}=x-2$ **b.** $\sqrt{3x+4}=x$

c. $\sqrt{x+7}=\sqrt{x}+1$ **d.** $\sqrt{x^2-2x}=x+1$

e. $\sqrt{4+\sqrt{x}}-\sqrt{4-\sqrt{x}}=\sqrt{2}$

f. $\sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{2x\ldots}}}}=1$

g. $\sqrt{3+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}}=3$

h. $\sqrt{x-\sqrt{2+\sqrt{x-\sqrt{2+\ldots}}}}=2$

24. $\sqrt{2^2-1}\cdot\sqrt{3^2-1}\cdot\sqrt{4^2-1}\ldots\sqrt{n^2-1}=24\sqrt{15}$ olduğuna göre, n kaçtır?

25. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $15^{\frac{1}{2}}\cdot 45^{\frac{1}{3}}\cdot 75^{\frac{2}{3}}$

b. $\left(3^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}\right)\left(3^{\frac{1}{4}}+2^{\frac{1}{4}}\right)\left(3^{\frac{5}{6}}+72^{\frac{1}{6}}\right)$

c. $\left(5^{\frac{1}{6}}\cdot 15^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{5}{6}}\right)\left(5^{\frac{5}{6}}+3^{\frac{1}{6}}\cdot 15^{\frac{1}{3}}\right)$

d. $\left(2^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{9}}+(-2)^{\frac{2}{9}}\cdot\left[(-2)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{6}}$

26. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\sqrt[3]{2\sqrt{10}\cdot\sqrt[4]{125}}\cdot\sqrt[4]{100\cdot\sqrt[3]{25\sqrt{10}}}$

b. $\dfrac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{3\sqrt{6}}}\cdot\dfrac{\sqrt[4]{18\cdot\sqrt[3]{6}}}{\sqrt{6\cdot\sqrt[3]{12}}}\cdot\sqrt[8]{4\cdot\sqrt[3]{2}}$

27. Birer kökleri aşağıda verilen tam kat sayılı denklemleri kurunuz.

a. 2 **b.** $\sqrt{3}$ **c.** $\sqrt[3]{2}$ **d.** $\sqrt{3}+1$

e. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ **f.** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ **g.** $\sqrt[4]{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

h. $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$

28. $\left(x^2\right)^{\frac{1}{6}}\cdot x^{\frac{3}{5}}\cdot x^{\frac{5}{9}}$ işlemini, aşağıda belirtilen koşullara göre yapınız.

a. $x\in R^+$ **b.** $x\in R^-$

29. $a=2\sqrt{3}+\sqrt{8}$ ve $b=2\sqrt{6}-5$ olduğuna göre,

$$A=\left[a^{\frac{1}{2}}\left(a^{-\frac{3}{2}}\cdot b^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(a^{-1}\cdot b^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

ifadesinin sayısal değeri kaçtır?

30. $2^x=10$ olduğuna göre, aşağıdakilerin değerlerini bulunuz.

a. 4^x **b.** 2^{x+3} **c.** 8^{x-1} **d.** $2^{\frac{x-1}{2}}$

31. $6^a=3$ ve $12^x=2$ olduğuna göre, x'in a türünden değerini bulunuz.

32. $2^x=3^y=6^z$ olduğuna göre, z'nin x ve y türünden değerini bulunuz

33. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

a. $5^{3x-1}=25^{1-2x}$ $(x\in Q)$

b. $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{x+2}=\left(\dfrac{7}{3}\right)^{2x-5}$ $(x\in Q)$

c. $(2x-1)^{\frac{2}{3}}=(x+1)^{\frac{1}{3}}$ $(x\in R)$

d. $(x-1)^{\frac{2}{5}}=(x+5)^{\frac{1}{5}}$ $(x\in R)$

e. $\left(x^2-6x+9\right)^{\frac{1}{2}}=2x-3$ $(x\in R)$

f. $(3x-1)^{\frac{4}{5}}=(x+3)^{\frac{4}{5}}$ $(x\in R)$

g. $(3x-4)^{\frac{4}{7}}=1$ $(x\in R)$

h. $(4x+2)^{\frac{2}{3}}=2$ $(x\in R)$

34. Aşağıdaki önermelerden hangileri doğrudur?

a. $7^{0,7}<7^{0,5}$ **b.** $(0,2)^5<(0,2)^3$

c. $(0,5)^{0,3}<(0,7)^{0,3}$ **d.** $(0,3)^{0,5}<(0,5)^{0,3}$

e. $\left(-\dfrac{5}{8}\right)^{\frac{3}{7}}<\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{3}{7}}$ **f.** $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{5}{3}}<\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{7}{5}}$

g. $8^{-0,3}<4^{-0,5}$ **h.** $(0,3)^{-0,5}<(0,09)^{-0,2}$

35. Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz.

a. $25^{3x-4}<125^{x+1}$ $(x\in Q)$

b. $\left(\dfrac{9}{25}\right)^{2x+1}\geq(0,6)^{x-2}$ $(x\in Q)$

c. $(0,5)^{5x}\leq 4^{2x+3}$ $(x\in Q)$

d. $(1-2x)^{\frac{1}{3}}\leq 2$ $(x\in R)$

e. $(2x+5)^{\frac{1}{4}}<3$ $(x\in R)$

f. $(2x-3)^{\frac{2}{3}}\leq 9$ $(x\in R)$

g. $(4x-1)^{-\frac{1}{3}}\leq 3^{-1}$ $(x\in R)$

h. $(3x-1)^{-\frac{2}{3}}\geq 4^{-1}$ $(x\in R)$

i. $(5x-3)^{-\frac{1}{2}}\geq\sqrt{2}$ $(x\in R)$

j. $\left(x^2-2x+1\right)^{\frac{1}{2}}\geq 2$ $(x\in R)$

k. $(5x-2)^{\frac{1}{3}}\leq(4x+3)^{\frac{1}{3}}$ $(x\in R)$

l. $(4x-3)^{\frac{2}{5}} \le (2x+1)^{\frac{2}{5}}$ $\quad (x \in R)$

m. $(x-2)^{-\frac{5}{7}} \le (2x+1)^{-\frac{5}{7}}$ $\quad (x \in R)$

n. $(x+1)^{-\frac{1}{4}} \le (2x-3)^{-\frac{1}{4}}$ $\quad (x \in R)$