4.8 – Gerçek Sayılar

4.8.1 – Gerçek Sayıların Tanımı

Her rasyonel sayının bir devirli ondalık açılımı vardır. Her devirli ondalık açılıma karşılık da bir rasyonel sayı bulunur.

$$a = 0{,}1\underbrace{01}_{2\text{ ta.}}\underbrace{001}_{3\text{ ta.}}\underbrace{0001}_{4\text{ ta.}}00001\ldots\underbrace{100\ldots01}_{n\text{ tane}}0\ldots$$

ondalık açılımının devirli olmadğı açıktır. Öyleyse; a sayısı bir rasyonel sayı değildir.

Tanım – 4.57

*Ondalık açılımı devirli olmayan bir sayıya **irrasyonel** sayı denir.*

a sayısı gibi sayılardan istenilen çoklukta yazılabilir.

Örneğin; 0,2020020002...;

5,343344333444...;

52,242442444244442...

sayılarının her biri irrasyoneldir.

İrrasyonel sayıların kümesi $\mathbf{Q}'$ ile gösterilir.

Tanım – 4.58

*Rasyonel ya da irrasyonel bir sayıya **gerçek sayı** denir.*

Gerçek sayıların kümesi **R** ile gösterilir.

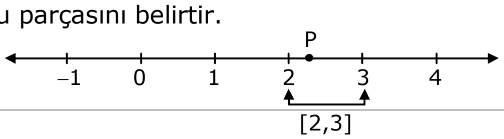
$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}'$

Kolayca yaptığımız bu tanımlar, gerçek sayıları tam olarak belirtmekten uzaktır. Daha kesin bir tanım için, Georg Cantor'un (1845-1918) yolundan gideceğiz.

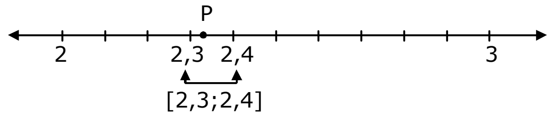
İç İçe Aralıklar Dizisi Yöntemi

Sayı doğrusu üzerinde rastgele bir P noktası alalım. Bu nokta, ardışık tam sayıların belirttiği birer birim uzunluklu doğru parçalarından birinin üzerinde olacaktır. $[2;3]$ aralığında bulunsun.

$[2;3]$ aralığı, uçları 2 ve 3 apsisli noktalar olan doğru parçasını belirtir.

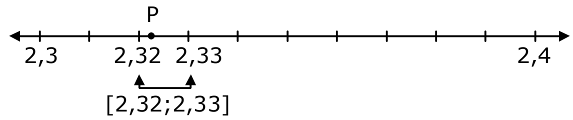


$[2;3]$ aralığını (her biri $\frac{1}{10}$ birim uzunlukta) 10 eş parçaya bölelim. P noktası $[2{,}3;\ 2{,}4]$ aralığında bulunsun.



$[2{,}3;\ 2{,}4]$ aralığını (her biri $\frac{1}{100}$ birim uzunlukta) 10 eş parçaya bölelim.

P noktası $[2{,}32;2{,}33]$ aralığında bulunsun.



Böyle devam edildiğinde iki farklı durumla karşılaşılabilir:

1. P noktası, üzerinde bulunduğu iç içe aralıklardan en dar olanının belirttiği doğru parçasının bir uç noktası olur.

Örneğimizdeki P noktası bir sonraki bölme aşamasında $[2{,}324;2{,}325]$ aralığının belirttiği doğru parçasının sol ucu üzerine düşmüş olsun. Bu durumda; P noktasına karşılık gelen sayı,

$[2;3],\ [2{,}3;2{,}4],\ [2{,}32;2{,}33],\ [2{,}324;2{,}324],\ldots$

dizisi ile belirtilen 2,324 sayısı olur.

Dizinin 3. teriminden sonraki terimleri birbirine eşit ve aralık uzunlukları sıfır olacaktır. Böyle durumlarda P noktasına karşılık gelen sayı bir ondalık sayıdır.

$[2;3] \supset [2{,}3;2{,}4] \supset [2{,}32;2{,}33] \supset [2{,}324;2{,}324]$

olduğuna dikkat ediniz.

Bu yüzden; belirtilen diziye iç içe aralıklar dizisi denir.

2. P noktası, üzerinde bulunduğu iç içe aralıklardan her hangi birinin belirttiği doğru parçasının uç noktası olmaz.

Bu durumda, P'nin üzerinde bulunduğu doğru parçalarının uç noktaları P'ye, uzunlukları da sıfıra yaklaşacak, P noktası, uzunlukları sıfıra yaklaşan bu doğru parçalarının ortak noktası olacaktır.

Uç noktalarına karşılık gelen ondalık sayılar da, devirli ya da devirsiz kesirler olarak P noktasına karşılık gelen sayıya yaklaşacaktır.

Tanım – 4.59

Terimlerinin karşılık geldiği doğru parçalarının uzunlukları sıfıra yaklaşan ve

$[a_n; b_n] = \{x | a_n < x < b_n, n \in N^+\}$ *genel terimi ile gösterilen her iç içe aralıklar dizisinin ortak ele-ma-nı bir* ***gerçek sayı****dır.*

Bu tanımı, belirtilen iç içe aralıklar dizisinin bir ortak elemanının bulunduğu aksiyomuna dayanarak yapıyoruz. Bu aksiyomu ileride başka biçimde de ifade ederek adına tamlık aksiyomu diyeceğiz.

Tanım-4.59'a dayanarak, sayı doğrusundaki her noktaya karşılık bir gerçek sayı bulunduğunu; karşıt olarak her gerçek sayıya karşılık sayı doğrusunda bir nokta bulunduğunu söyleyebiliriz.

Gerçek sayılarla, sayı doğrusunun noktaları arasında bire bir eşleme yapılabilir.

Bir başka deyişle; gerçek sayılar sayı doğrusunu tamamen doldurur.

Etkinlik – 4.214

Aşağıdaki sayıları iç içe aralıklar dizileriyle belirtiniz.

a. 5 **b.** 2,7 **c.** 4,83 **d.** $0,\overline{4}$ **e.** $2,\overline{23}$

f. $0,10100100010...01\underbrace{0...0}_{n \text{ tane}}10...$

f'de verilen sayı $[0;1]$, $[0,1;0,2]$, $[0,10;0,11]$,... iç içe aralıklar dizisi ile belirtildiğinde bu dizinin 1000. teriminin 2. bileşeninin en küçük kesir basamağındaki rakam kaç olur?

+ Buraya kadar, Cantor'un iç içe aralıklar dizisi yöntemi ile gerçek sayıları tanımladık.

Ancak; bu sayıların özelikleri ile gerçek sayılar kümesinde tanımlanacak işlemlerin özeliklerinin ispatları daha ileri düzeyde matematiği gerektirir. Bunu ilerideki öğrenim yıllarınıza bırakarak, biz burada gerçek sayılar kümesini aksiyomlarla tanıtacağız.

Gerçek Sayılar kümesinin Aksiyomlarla Tanımı

Gerçek sayılar kümesi rasyonel sayılar kümesini kapsayacağına göre, rasyonel sayılar kümesinde geçerli olan **cisim aksiyomları** ile **sıralama aksiyomları** gerçek sayılar kümesinde de geçerli olmalıdır. Bu aksiyomlara, rasyonel sayılar kümesinin genişletilmesine olanak veren **tamlık aksiyomu**nu da ekleyerek **gerçek sayılar sistemi**nin temelini oluşturacağız.

Tanım – 4.60

Üzerinde ***toplama*** *ve* ***çarpma*** *işlemlerinin tanımlandığı bir* ***R*** *kümesine, aşağıdaki aksiyomların geçerli olması durumunda* ***gerçek sayılar kümesi*** *denir.*

Bu kümenin elemanlarına da ***gerçek sayı****lar adı verilir.*

I. Cisim aksiyomları

a, b, c∈R için

$\boxed{1.}$ $a + b \in R$ *dir.*

$\boxed{2.}$ $a + b = b + a$ *dır.*

$\boxed{3.}$ $a + 0 = 0 + a = a$ *dır.*

$\boxed{4.}$ $a + (-a) = (-a) + a = 0$ *dır.*

$\boxed{5.}$ $a + 0(b + c) = (a + b) + c$ *dir.*

Bu ilk 5 aksiyoma göre, $(R,+)$ *sistemi* ***değişmeli grup****tur.*

Toplamaya göre etkisiz eleman ***0****'dır;* ***a****'nın toplama işlemine göre tersi* **–a** *dır.*

$\boxed{6.}$ $a \cdot b \in R$ *dir.*

$\boxed{7.}$ $a \cdot b = b \cdot a$ *dır.*

$\boxed{8.}$ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ *dır.*

$\boxed{9.}$ $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ *dir.* $(a \neq 0)$

$\boxed{10.}$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b)c$ *dir.*

Bu aksiyoma göre, $(R - \{0\}, \cdot)$ *sistemi* ***değişmeli grup****tur.*

Çarpmaya göre etkisiz eleman ***1****'dir;* ***a****'nın çarpmaya göre tersi* $\mathbf{a^{-1}}$ *(ya da* $\mathbf{\frac{1}{a}}$*) dır.*

$\boxed{11.}$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *dir.*

R kümesinde bu 11 aksiyomun geçerli olması demek, $(R,+,\cdot)$ *sisteminin değişmeli cisim olması demektir.*

II. Sıralama aksiyomları

$\boxed{1.}$ *a, b∈R için ya* $a < b$*, ya* $a = b$ *ya da* $a > b$ *dir.*

$\boxed{2.}$ *a, b, c ∈R için,* $a < b$ *ve* $b < c$ *ise* $a < c$ *dir.*

3. *$a, b, x \in R$ için,*
$a < b$ *ise* $a + x < b + x$ *tir.*

4. *$a, b \in R$ ve $x \in R^+$ için,* $a < b$ *ise*
$a \cdot x < b \cdot x$ *tir.*

III. Arşimed Özeliği

$a, b \in R^+$ ve $a < b$ ise $n \cdot a > b$ koşulunu sağlayan bir $n \in N^+$ vardır.

IV. Tamlık Aksiyomu

*R'nin boş olmayan bir A alt kümesinin bir **üst sınırı** varsa, bir **en küçük üst sınırı** vardır.*

Tamlık aksiyomunda geçen, **üst sınır** ve **en küçük üst sınır** terimlerini tanımlayalım:

Tanım – 4.61

*R'nin bir A altkümesinin herhangi bir elemanından küçük olmayan sayıya A'nın bir **üst sınırı**; üst sınırların en küçüğüne de A'nın **en küçük üst sınırı** denir.*

$A \subset R$ kümesinin en küçük üst sınırı A'nın elemanı olmayabilir.

Örnek – 4.126

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ için,
5 bir üst sınırdır;
11 bir üst sınırdır;
2579 bir üstü sınırdır;
...
Üst sınırların en küçüğü 5'tir. $5 \in A$ dır.

Örnek – 4.127

$A = \left\{x \middle| x < \frac{3}{4};\ x \in Q\right\}$ için,
$\frac{3}{4}$ bir üst sınırdır;
7 bir üst sınırdır;
$\frac{257}{13}$ bir üst sınırdır;
...
En küçük üst sınır $\frac{3}{4}$ tür. $\frac{3}{4} \notin A$ dır.

Örnek – 4.128

$A = \{3{,}5;\ 3{,}55;\ 3{,}555;\ 3{,}5555; ...\}$ için,
4 bir üst sınırdır;
3,6 bir üst sınırdır;
3,56 bir üstü sınırdır;
$3{,}\overline{5}$ en küçük üst sınırdır.
$3{,}\overline{5} = \frac{32}{9} \notin A$ ve $3{,}\overline{5} \in Q$ dir.

Örnek – 4.129

$A = \{x | x^2 < 2;\ x \in Q\}$ kümesi üstten sınırlıdır. Ancak; A'nın en küçük üst sınırı yoktur.

$B = \{x | x^2 < 2;\ x \in R\}$ kümesi üstten sınırlıdır. B'nin en küçük üst sınırı, karesi 2 olan gerçek sayıdır. (Karesi 2 olan sayının rasyonel olmadığını az ileride göstereceğiz.)

+ Rasyonel sayılarda üstten sınırlı bir kısım alt kümelerin en küçük üst sınırı bulunmazken; gerçek sayılarda üstten sınırlı her kümenin en küçük üst sınırı vardır.

Rasyonel sayılar sayı doğrusunu tam doldurmaz; gerçek sayılar sayı doğrusunu tam olarak doldurur.

Tamlık aksiyomuna dayanılarak, R'nin alttan sınırlı bir a kümesinin **en büyük alt sınır**ının bulunduğu gösterilebilir.

Tanım – 4.62

*R'nin bir A altkümesinin herhangi bir elemanından büyük olmayan sayıya A'nın bir **alt sınırı**; alt sınırların en büyüğüne de A'nın **en büyük alt sınırı** denir.*

Örnek – 4.130

$a = 0{,}1\underbrace{0}_{1}1\underbrace{00}_{2}1\ \underbrace{000}_{3\ tane}\ 10...01\ \underbrace{0...0}_{n\ tane}\ 10...$ olmak üzere,

$A = \{x | x > a;\ x \in Q\}$ kümesi alttan sınırlıdır. Ancak; A'nın en büyük alt sınırı yoktur.

$B = \{x | x > a;\ x \in R\}$ kümesi alttan sınırlıdır. B'nin en büyük alt sınırı a gerçek sayısıdır.

R'de Çıkarma ve Bölme İşlemleri

R'de çıkarma ve bölme işlemleri, toplama ve çarpma işlemleri ile tanımlanır.

Tanım – 4.63

Her a, b ∈R için;

$\boxed{1.}$ $a - b = a + (-b)$ *ve*

$\boxed{2.}$ $a : b = a \cdot b^{-1}$ *dir.*

+ Aksiyomlarına dayanarak, gerçek sayıların bazı önemli özeliklerini ortaya koyalım:

Teorem – 4.95

a, b, c ∈R olmak üzere;

$\boxed{1.}$ $\mathbf{a + c = b + c \Rightarrow a = b}$ *dir.*

$\boxed{2.}$ $\mathbf{a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b}$ *dir.* $(c \neq 0)$

İspat

$\boxed{\mathbf{1.}}$ $a + c = b + c$

$\Rightarrow a + c + (-c) = b + c + (-c)$ (TS)

$\Rightarrow a + 0 = b + 0$ (Ak. – I.4)

$\Rightarrow a = b$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a \cdot c \cdot c^{-1} = b \cdot c \cdot c^{-1}$

$\Rightarrow a \cdot 1 = b \cdot 1$ (Ak. – I.9)

$\Rightarrow a = b$

Teorem – 4.96

a, b ∈R olmak üzere;

$\boxed{1.}$ $\mathbf{0 \cdot a = 0}$ *ve* $\boxed{2.}$ $\mathbf{-1 \cdot a = -a}$ *dır.*

İspat

$\boxed{\mathbf{1.}}$ $1 + 0 = 1 \Rightarrow (1 + 0) \cdot a = 1 \cdot a$ (ÇS)

$\Rightarrow 1 \cdot a + 0 \cdot a = 1 \cdot a$ (Ak.I.11)

$\Rightarrow 1 \cdot a + 0 \cdot a = 1 \cdot a + 0$

$\Rightarrow 0 \cdot a = 0$ olur. (TS)

$\boxed{\mathbf{2.}}$ $1 + (-1) = 0 \Rightarrow [1 + (-1)] \cdot a = 0 \cdot a$ (ÇS)

$\Rightarrow 1 \cdot a + (-1)a = 0$ (Ak. – I.11)

$\Rightarrow a + (-1)a = a + (-a)$

$\Rightarrow -1 \cdot a = -a$ olur. (TS)

Teorem-4.96'dan şu sonuçlar çıkarılır:

$\boxed{1.}$ $\mathbf{-1 \cdot (-a) = a}$

$\boxed{2.}$ $\mathbf{-(ab) = -a \cdot b = a(-b)}$

Sonuçları ispatlayınız.

□

Teorem – 4.97

a, b ∈R – {0} olmak üzere;

$\mathbf{(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}}$ *dir.*

İspat

$(ab) \cdot (ab)^{-1} = 1$ (Ak. – I.9)

$\Rightarrow (a^{-1} \cdot b^{-1}) \cdot (a \cdot b) \cdot (ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

$\Rightarrow \underbrace{(a^{-1} \cdot a)}_{1} \cdot \underbrace{(b^{-1} \cdot b)}_{1} \cdot (ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ (Ak. – I.10)

$\Rightarrow (ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ olur. (Ak. – I.9)

Teorem-4.97'den şu sonuçlar çıkarılır:

$\boxed{1.}$ $\mathbf{(a \cdot b^{-1})^{-1} = a^{-1}b}$ ya da $\mathbf{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}}$

$\boxed{2.}$ $\mathbf{(a^{-1} \cdot b^{-1})^{-1} = ab}$ ya da $\mathbf{\left(\frac{1}{ab}\right)^{-1} = ab}$

Sonuçları ispatlayınız.

Teorem – 4.98

a, b, c, d ∈R olmak üzere;

$\boxed{1.}$ $\mathbf{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$ *dir.*

$\boxed{2.}$ $\mathbf{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$ *dir.*

İspat

$\boxed{\mathbf{1.}}$ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1})$ (Bölme tanımı)

$= a \cdot b^{-1} \cdot c \cdot d^{-1}$

$= a \cdot c \cdot (b \cdot d)^{-1}$ (Ak. – I.9; Teo. – 4.97)

$= \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$ olur. (Bölme tanımı)

2. $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \left(\dfrac{c}{d}\right)^{-1}$ (Bölme tanımı)

$= \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$ (Teo. – 4.97)

$= \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$ olur. (Teo. – 4.98.1)

Teorem – 4.99

$a, b, x \in R$ olmak üzere;

1. $\mathbf{x < 0 \Rightarrow -x > 0}$ *dır.*
2. $\mathbf{a < b \Rightarrow -a > -b}$ *dir.*

İspat

1. $x < 0 \Rightarrow x + (-x) < 0 + (-x)$ (Ak. – II.3)

$\Rightarrow 0 < -x$ olur. (Ak. – I.4)

2. $a < b \Rightarrow a + (-a - b) < b + (-a - b)$ (Ak. – II.3)

$\Rightarrow a - a - b < b - a - b$ (Ak. – I.5)

$\Rightarrow -b < b - b - a$ (Ak. – I.4)

$\Rightarrow -b < -a$ (Ak. – I.4)

$\Rightarrow -a > -b$ olur.

Teorem – 4.100

$a, b, x \in R$ olmak üzere;

$\mathbf{a < b}$ **ve** $\mathbf{x < 0 \Rightarrow ax > bx}$ *tir.*

İspat

$a < b$ ve $x < 0$

$\Rightarrow a < b$ ve $-x > 0$ (Teo. – 4.99.1)

$\Rightarrow a \cdot (-x) < b \cdot (-x)$ (Ak. – II.4)

$\Rightarrow -ax < -bx$ (Teo. – 4.96)

$\Rightarrow ax > bx$ olur. (Teo. – 4.99.2)

Teorem – 4.101

$a \in R$ olmak üzere;

$\mathbf{a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0}$ *dır.*

İspat

$a^{-1} < 0$ olduğunu varsayalım.

$a^{-1} < 0$ ve $a > 0$

$\Rightarrow a^{-1} \cdot a < 0 \cdot a$ (Ak. – II.4)

$\Rightarrow 1 < 0$ elde edilir.

Bu sonuç $1 > 0$ ile çelişir.

O hâlde;

$a^{-1} > 0$ dır.

Teorem-4.101'den şu sonuç çıkarılır:

$a \in R$ olmak üzere; $\mathbf{a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0}$ dır.

Bu sonucu ispatlayınız.

Teorem – 4.102

$a, b, x \in R$ olmak üzere;

1. $\mathbf{a + x < b + x \Rightarrow a < b}$ *dir.*
2. $\mathbf{a \cdot x < b \cdot x}$ **ve** $\mathbf{x > 0 \Rightarrow a < b}$ *dir.*
3. $\mathbf{a \cdot x < b \cdot x}$ **ve** $\mathbf{x < 0 \Rightarrow a > b}$ *dir.*

İspat

1. İki tarafa $-x$ ekleyiniz.

2. İki tarafı x^{-1} ile çarpınız.

3. $ax < bx$ ve $x < 0$

$\Rightarrow -ax > -bx$ ve $-x > 0$ (Teo. – 4.99)

$\Rightarrow a \cdot (-x) > b \cdot (-x)$ ve $-x > 0$ (Ak. – I.10)

$\Rightarrow a > b$ olur. (Teo. – 4.102.2)

Teorem – 4.103

$a, b \in R$ olmak üzere;

$\mathbf{0 < a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}}$ *dir.*

İspat

$0 < a < b \Rightarrow \underbrace{a \cdot a^{-1}} \cdot b^{-1} < b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}$ (Ak. – II.4)

$\Rightarrow 1 \cdot b^{-1} < \underbrace{b \cdot b^{-1}}_{1} \cdot a^{-1}$ (Ak.I.9)

$\Rightarrow b^{-1} < a^{-1}$ (Ak.I.9)

$\Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$ olur.

Teorem-4.103'ten şu sonuç çıkarılır:

$\mathbf{a < b < 0 \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}}$ dir.

Bu sonucu ispatlayınız.

Teorem – 4.104

a, b ∈R ve $n \in Z^+$ *olmak üzere;*

$\mathbf{0 < a < 1 < b \Rightarrow 0 < a^n < 1 < b^n}$ *dir.*

İspat

$0 < a < 1 \Rightarrow 0 \cdot a < a \cdot a < a \cdot 1$

$\Rightarrow 0 < a^2 < a < 1$ (Ak. – II.4)

$\Rightarrow 0 < a^2 < 1$

$\Rightarrow 0 \cdot a < a^2 \cdot a < 1 \cdot a$

$\Rightarrow 0 < a^3 < a < 1$

$\Rightarrow 0 < a^3 < 1$

...

$\Rightarrow 0 < a^n < 1$; ①

$1 < b \Rightarrow 1 \cdot b < b \cdot b$

$\Rightarrow 1 < b < b^2$ (Ak. – II.4)

$\Rightarrow 1 < b^2$

$\Rightarrow 1 \cdot b < b^2 \cdot b$

$\Rightarrow 1 < b < b^3$

$\Rightarrow 1 < b^3$

...

$\Rightarrow 1 < b^n$ ②

① ve ② den,

$0 < a < 1 < b \Rightarrow 0 < a^n < 1 < b^n$ bulunur.

Teorem – 4.105

a, b, c, d ∈R olmak üzere;

1. $\mathbf{a < b}$ **ve** $\mathbf{c < d \Rightarrow a + c < b + d}$ *dir.*
2. $\mathbf{0 < a < b}$ **ve** $\mathbf{0 < c < d \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d}$ *dir.*

İspat

1. $a < b$ ve $c < d$

$\Rightarrow a + c < b + c$ ve $b + c < b + d$ (Ak. – II.3)

$\Rightarrow a + c < b + d$ olur.

2. $0 < a < b$ ve $0 < c < d$

$\Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ ve $b \cdot c < b \cdot d$ (Ak. – II.4)

$\Rightarrow a \cdot c < b \cdot d$ olur.

Teorem – 4.106

$\mathbf{a \in R \Rightarrow a^2 \geq 0}$ *dır.*

İspat

a∈R ise ya $a > 0$, ya $a = 0$ ya da $a < 0$ dır.

$a > 0 \Rightarrow a \cdot a > 0 \cdot a$ ① (Ak.-II.4)

$\Rightarrow a^2 > 0$;

$a = 0 \Rightarrow a^2 = 0$; ②

$a < 0 \Rightarrow -a > 0$

$\Rightarrow (-a) \cdot (-a) > 0 \cdot (-a)$ (Ak. – II.4)

$\Rightarrow a^2 > 0$ ③

①, ② ve ③ ten

$a \in R \Rightarrow a^2 \geq 0$ bulunur.

Teorem-4.106'ya göre; karesi negatif olan bir sayı gerçek sayı değildir.

Etkinlik – 4.215

Harfler birer gerçek sayıyı gösterdiğine göre, aşağıdaki eşitliklerin geçerli olduğunu gösteriniz.

a. $x - x = 0$ **b.** $\frac{x}{x} = 1 \quad (x \neq 0)$

c. $x + (y - x) = y$ **d.** $x \cdot \left(\frac{y}{x}\right) = y \quad (x \neq 0)$

e. $x = \frac{y}{z} \Leftrightarrow x \cdot z = y \quad (z \neq 0)$

f. $x - y = z \Leftrightarrow x = y + z$

g. $-(a - b + c) = -a + b - c$

h. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

i. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

j. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

k. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

l. $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - ac - bc)$

m. $(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ...ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n - b^n$

Etkinlik – 4.216

a, b, c ∈R ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax + b = c$ denkleminin gerçek sayılardaki çözüm kümesini bulunuz.

Etkinlik – 4.217

Aşağıdaki eşitliklerde harfler birer gerçek sayıyı gösterdiğine göre; eşitlikleri sağlayan a değerlerini diğerleri türünden bulunuz.

a. $ab + bc = ac$ **b.** $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

c. $\frac{a+b}{c} = \frac{a+c}{b}$ **d.** $\left(a^2 + ac\right)(ab + c) = 0$

e. $ab - c(ab - c) = (d - a) \cdot d - a$

f. $(a - b)(ab - c) = (a - b)^2$

Etkinlik – 4.218

$x, y \in R^+$ olmak üzere;

$x^2 < y^2 \Leftrightarrow x < y$ dir.

İspatlayınız.

Etkinlik – 4.219

a, b, c, d $\in R$ olmak üzere;

$ab - cd = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd \geq 1$ olduğunu gösteriniz.

Etkinlik – 4.220

Aşağıdaki eşitsizlik sistemlerinin Z, Q ve R'deki çözüm kümelirini ayrı ayrı bulunuz.

Q ve R'deki çözüm kümeleri eşit midir?

a. $-11 \leq 2x - 5 < 3$

b. $x - 3 \leq 5x - 11 < 2x + 7$

c. $2x - 7 < x + 3 < 3x - 5$

d. $-3 < 2x + 1 < x + 3$

e. $2x - 1 \leq 7 < 4x + 3$ veya $1 \leq 2x - 3 < 7$

f. $2x - 3 < x + 2 \leq 3x + 6$ ve $-5 < 3x - 2 \leq 16$

Etkinlik – 4.221

x, y $\in R$; $-4 \leq x \leq -1$ ve $-3 < y \leq 4$ olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerin alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

a. $2 - 3x$ **b.** $2y + 3$ **c.** $2x - 3y$

d. $x^2 - 2y$ **e.** $x^2 - y^2$ **f.** $xy + 2x$

4.8.2 – Kareköklü Sayılar

Tanım – 4.64

a *negatif olmayan bir gerçek sayı olsun.*

Karesi ***a'ya*** *eşit olan bir sayıya* ***a'nın bir karekökü*** *denir.*

Örneğin; $(-2)^2 = 4$ ve $2^2 = 4$ olduğundan, 4'ün karekökleri -2 ve 2 sayılarıdır. Negatif olmayan bir a sayısının bir karekökü x ise, $x^2 = a$ ve $(-x)^2 = a$ olacağından, $-x$ sayısı da a'nın bir karekökü olur. Buna göre; a'nın $(a > 0)$ biri pozitif, diğeri negatif olan iki karekökü vardır.

a sayısının **pozitif karekökü** $\sqrt{a}$ ile, **negatif karekökü** $-\sqrt{a}$ ile gösterilir.

Örneğin, 9 sayısının karekökleri $\sqrt{9} = 3$ ve $-\sqrt{9} = -3$ tür.

Sıfırın karekökü sıfırdır.

+

Teorem – 4.107

$a, b \in R^+$ *olmak üzere;*

$\mathbf{a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2}$ *dir.*

İspat

$0 < a \leq b$

$\Rightarrow a^2 \leq ab$ ve $ab \leq b^2$ (Ak. – II.4)

$\Rightarrow a^2 \leq b^2$ olur.

$a^2 \leq b^2$ ve $a, b \in R^+$

$\Rightarrow a^2 - b^2 \leq 0$ (Ak.-II.3; Ak.-I.5)

$\Rightarrow (a - b)(a + b) \leq 0$

$\Rightarrow a - b \leq 0$ (Teo.-4.95.2)

$\Rightarrow a \leq b$ bulunur.

O hâlde;

$0 < a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$ önermesi geçerlidir.

Teorem-4.107'den şu sonuç çıkarılır:

" $a, b \in R^-$ olmak üzere;

$\mathbf{a \leq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2}$ "

Bu sonucu ispatlayınız.

Teorem – 4.108

$a, b \in R^+$ *olmak üzere;*

1. $\sqrt{\mathbf{a \cdot b}} = \sqrt{\mathbf{a}} \cdot \sqrt{\mathbf{b}}$

2. $\sqrt{\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}} = \dfrac{\sqrt{\mathbf{a}}}{\sqrt{\mathbf{b}}}$ *dir.*

İspat

1. $a, b \in R^+ \Rightarrow \sqrt{a} = x \in R^+$ ve $\sqrt{b} = y \in R^+$

$\Rightarrow \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = x \cdot y$

$\Rightarrow \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = (xy)^2$

$\Rightarrow \left(\sqrt{a}\right)^2 \left(\sqrt{b}\right)^2 = (xy)^2$

$\Rightarrow a \cdot b = (xy)^2$

$\Rightarrow \sqrt{a \cdot b} = xy$

$\Rightarrow \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

2. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{x}{y}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2$

$\Rightarrow \dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2$

$\Rightarrow \dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{x}{y}$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Teorem-4.108'e göre, örneğin;

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$,

$\sqrt{\dfrac{16}{5}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} = \dfrac{4 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, … olur.

Kareköklü sayılar ne tür sayılardır?

Bir kısım kareköklü sayıların rasyonel sayılar olduğunu biliyoruz.

Örneğin; $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5}$, $-\sqrt{16} = -4$ sayıları rasyoneldir.

$\sqrt{2}$ sayısı rasyonel midir?

$\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olduğunu varsayalım:

$\dfrac{a}{b}$ indirgenemez bir kesir olmak üzere, $\dfrac{a}{b} = \sqrt{2}$ olsun.

$\dfrac{a}{b} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 2$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{b^2} = 2$

$\Rightarrow a^2 = 2b^2$ olur.

Buna göre, a^2 çift olacağından a da çifttir. $a = 2k$ $(k \in Z)$ yazılabilir.

$a^2 = 2b^2$ ve $a = 2k$ $(k \in Z)$

$\Rightarrow (2k)^2 = 2b^2$

$\Rightarrow 4k^2 = 2b^2$

$\Rightarrow b^2 = 2k^2$ olur.

Buradan da, $b = 2p$ $(p \in Z)$ yazılabilir. Bu durumda, $\dfrac{a}{b}$ kesri en azından 2 ile sadeleştirilebilen bir kesir olur. O hâlde; $\dfrac{a}{b} = \sqrt{2}$ olacak biçimde $\dfrac{a}{b}$ indirgenemez kesri yazılamaz.

$\sqrt{2}$ sayısı rasyonel değildir.

$\sqrt{2}$ sayısı gerçek sayı mıdır?

$1^2 < 2 < 2^2$

$(1,4)^2 < 2 < (1,5)^2$

$(1,41)^2 < 2 < (1,42)^2$

$(1,414)^2 < 2 < (1,415)^2$

$(1,4142)^2 < 2 < (1,4143)^2$

$(1,41421)^2 < 2 < (1,41422)^2$

…

yazılabilir. Kesir basamaklarının sayısı arttırıldıkça aralıkların uzunlukları azalarak sıfıra yaklaşır.

R'de uzunlukları sıfıra yaklaşan

$[1;2]$, $[1,4;1,5]$, $[1,41;1,42]$, $[1,414;1,415]$,…

iç içe aralıklar dizisinin bir ortak elemanı vardır.

Burada ortak eleman $\sqrt{2}$ sayısıdır.

$\sqrt{2}$ bir gerçek sayıdır.

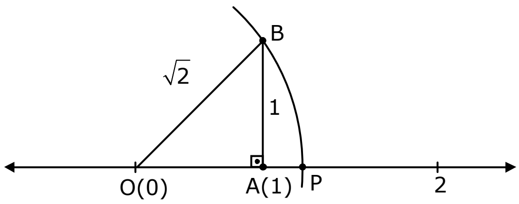
"R'de iç içe aralıklar dizisinin bir ortak elemanının bulunduğu" aksiyomu, tamlık aksiyomunun başka bir ifadesidir.

Sayı doğrusunda $\sqrt{2}$ sayısına eşlenen bir nokta var mıdır?

İç içe aralıklar dizisinin elemanlarının uçları birer rasyonel sayı olduğundan, bu sayılar sayı doğrusunda belirli noktalara eşlenirler. Böylece iç içe aralıkların her biri bir doğru parçasına karşılık gelir. Bu iç içe doğru parçalarının ortak noktası, $\sqrt{2}$ sayısına eşlenen noktadır.

Sayı doğrusunda $\sqrt{2}$ sayısına eşlenen bir noktanın bulunduğunu geometrik yolla da gösterebiliriz:

Sayı doğrusunda A(1) noktasından bu doğruya bir dikme çizerek bu dikmenin üzerinde $|AB| = 1$ olacak biçimde bir B noktası alalım.



Pisagor bağıntısına göre,

$$|OB|^2 = |OA|^2 + |AB|^2 \Rightarrow |OB|^2 = 1^2 + 1^2$$
$$\Rightarrow |OB|^2 = 2$$
$$\Rightarrow |OB| = \sqrt{2} \text{ dir.}$$

O merkezli $|OB|$ yarıçaplı çember yayının sayı doğrusunu kestiği nokta P ise, $|OP| = |OB| = \sqrt{2}$ olur. P noktası $\sqrt{2}$ sayısına eşlenen noktadır.

Etkinlik – 4.222

a, b $\in$Q olmak üzere; $\mathbf{a + b\sqrt{2}}$ sayılarının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

$\sqrt{2}$ sayısı kullanılarak istenilen çoklukta irrasyonel sayı yazılabilir.

Örneğin; $3\sqrt{2}$, $3+\sqrt{2}$, $5+4\sqrt{2}$,... birer irrasyonel sayıdır.

Etkinlik – 4.223

Aşağıdaki sayıların irrasyonel olduğunu gösteriniz.

a. $\sqrt{3}$ **b.** $\sqrt{5}$ **c.** $\sqrt{6}$ **d.** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

+ İrrasyonel sayıları devirsiz ondalık açılımlar olarak tanımlamıştık. Devirsiz ondalık açılımlarla, gerçek sayılarda tanımlanan işlemleri yapmak neredeyse olanaksızdır.

Kareköklü sayılar –ondalık açılımlarının devirsiz olmalarına karşın– $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... gibi kullanışlı sembolleri ile işlemlere olanak verirler.

4.8.3 – Kareköklü Sayılarla İşlemler

Örnek – 4.131

a. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{2\cdot 5} = \sqrt{10}$

b. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{6^2} = 6$

c. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{2\cdot 8} = \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$

d. $\dfrac{\sqrt{42}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\dfrac{42}{14}} = \sqrt{3}$

+ a,b $\in$ R$^+$ ve n$\in$Z olmak üzere;

$\boxed{1.}$ $\sqrt{\mathbf{a^{2n}}} = \sqrt{\left(\mathbf{a^n}\right)^2} = \mathbf{a^n}$;

$\boxed{2.}$ $\sqrt{\mathbf{a^{2n}\cdot b}} = \sqrt{\mathbf{a^{2n}}}\cdot\sqrt{\mathbf{b}} = \mathbf{a^n}\cdot\sqrt{\mathbf{b}}$;

$\boxed{3.}$ $\sqrt{\dfrac{\mathbf{a^{2n}}}{\mathbf{b^{2n}}}} = \dfrac{\sqrt{\mathbf{a^{2n}}}}{\sqrt{\mathbf{b^{2n}}}} = \dfrac{\mathbf{a^n}}{\mathbf{b^n}}$ **dir.**

Örnek – 4.132

a. $\sqrt{3^8} = \sqrt{\left(3^4\right)^2} = 3^4 = 81$

b. $\sqrt{5^9} = \sqrt{\left(5^4\right)^2\cdot 5} = 5^4\sqrt{5} = 625\sqrt{5}$

c. $\sqrt{9^5} = \sqrt{\left(3^2\right)^5} = \sqrt{\left(3^5\right)^2} = 3^5 = 243$

d. $\sqrt{8^5} = \sqrt{\left(2^3\right)^5} = \sqrt{2^{15}} = \sqrt{2^{14}\cdot 2} = 128\sqrt{2}$

e. $\sqrt{18} = \sqrt{9\cdot 2} = \sqrt{3^2\cdot 2} = 3\sqrt{2}$

f. $\sqrt{96} = \sqrt{16\cdot 6} = \sqrt{4^2\cdot 6} = 4\sqrt{6}$

Etkinlik – 4.224

Aşağıdaki sayıları $a, b \in Z^+$ ve a en büyük olmak üzere $a\sqrt{b}$ biçiminde yazınız.

a. $\sqrt{54}$ **b.** $2\sqrt{125}$ **c.** $3\sqrt{124}$ **d.** $\sqrt{432}$

+ $x, y \in R$ ve $a \in R^+$ olmak üzere;

$\mathbf{x\sqrt{a} \mp y\sqrt{a} = (x \mp y)\sqrt{a}}$ dır.

Örnek – 4.133

a. $2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = (2+4)\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

b. $\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32} = \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{16 \cdot 2}$
$= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

c. $\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{80} = \sqrt{4 \cdot 5} - \sqrt{9 \cdot 5} + \sqrt{16 \cdot 5}$
$= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

d. $\sqrt{180} + \sqrt{147} - \sqrt{45} - \sqrt{12}$
$= \sqrt{36 \cdot 5} + \sqrt{49 \cdot 3} - \sqrt{9 \cdot 5} - \sqrt{4 \cdot 3}$
$= 6\sqrt{5} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{5} - 5\sqrt{3}$

Etkinlik – 4.225

Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} + \sqrt{75}$

b. $2\sqrt{50} - \sqrt{98} - 3\sqrt{12} - \sqrt{3}$

c. $2\sqrt{160} - \sqrt{180} - \sqrt{250}$

d. $3\sqrt{60} + 2\sqrt{135} - \sqrt{360}$

+ $x, y \in R$ ve $a, b \in R^+$ olmak üzere;

$\boxed{1.}$ $\mathbf{(x\sqrt{a}) \cdot (y\sqrt{b}) = xy\sqrt{ab}}$;

$\boxed{2.}$ $\mathbf{\dfrac{x\sqrt{a}}{y\sqrt{b}} = \dfrac{x}{y} \cdot \sqrt{\dfrac{a}{b}}}$ dir.

Örnek – 4.134

a. $(2\sqrt{5}) \cdot (3\sqrt{10}) = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5 \cdot 10} = 6 \cdot \sqrt{25 \cdot 2} = 30\sqrt{2}$

b. $\dfrac{2\sqrt{54}}{3\sqrt{12}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{54}{12}} = \dfrac{2}{3} \cdot \sqrt{\dfrac{18}{4}} = \dfrac{2}{3} \cdot \sqrt{\dfrac{9 \cdot 2}{4}}$
$= \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$

Etkinlik – 4.226

Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\sqrt{6}\left(\sqrt{12} - \sqrt{27}\right)$ **b.** $2\sqrt{3}\left(\sqrt{8} - \sqrt{6}\right)$

c. $\left(\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6} + \sqrt{15}\right)$ **d.** $\left(2\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)$

+ Kareköklü kesirlerde paydanın rasyonel yapılması, hem kesrin yaklaşık değerinin tahmin edilmesini hem de işlemleri kolaylaştırır.

Paydanın rasyonel yapılmasında

$\mathbf{a \cdot a = a^2}$ ve $\mathbf{(a-b)(a+b) = a^2 - b^2}$ özdeşliklerinden yararlanılır.

Kareköklü kesirlerle toplama işlemlerinde, önce paydalar rasyonel yapılır.

Örnek – 4.135

a. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{9 \cdot 2}}{6} = \dfrac{3\sqrt{2}}{6} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)} = \sqrt{6} + 2$

c. $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{\underset{\left[\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\right]}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)^2}{2 \cdot (3 - 1)} = \dfrac{\sqrt{2}\left(4 + 2\sqrt{3}\right)}{4}$

$= \dfrac{\sqrt{2} \cdot \cancel{2}\left(2 + \sqrt{3}\right)}{\cancel{4}_{2}} = \dfrac{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

d. $\dfrac{1}{\underset{(2-\sqrt{3})}{2 + \sqrt{3}}} - \dfrac{2}{\underset{(2+\sqrt{3})}{2 - \sqrt{3}}} + \dfrac{3}{\underset{(\sqrt{3})}{\sqrt{3}}} = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{1} - \dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{1} + \dfrac{3\sqrt{3}}{3}$

$= 2 - \sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = -2 - 2\sqrt{3}$

Etkinlik – 4.227

Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\dfrac{3\sqrt{14}}{\sqrt{21}}$ **b.** $\dfrac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}$ **c.** $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$ **d.** $\dfrac{2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)}$

e. $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{6} + 2} - \dfrac{6}{\sqrt{3}}$ **f.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} - \dfrac{2}{2 - \sqrt{3}}$

g. $\sqrt{\dfrac{2}{5}} + \sqrt{\dfrac{5}{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ **h.** $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1}$

"Köklü sayılar" bölümünde kareköklü sayıları da daha kapsamlı biçimde ele alacağız.

4.8.4 – Gerçek Sayı Aralıkları

Tanım – 4.65

a, b ∈R ve $a < b$ *olmak üzere;*

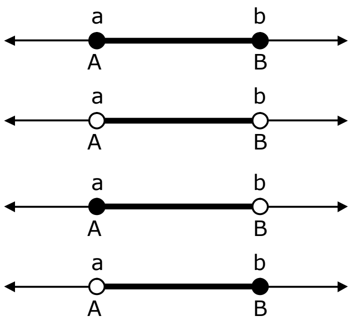
1. $[a,b] = \{x | a \le x \le b;\ x \in R\}$ *kümesine* $[a;b]$ ***kapalı aralığı;***

2. $(a,b) = \{x | a < x < b;\ x \in R\}$ *kümesine* $(a;b)$ ***açık aralığı;***

3. $[a,b) = \{x | a \le x < b;\ x \in R\}$ *kümesine* $[a;b)$ ***soldan kapalı yarı açık aralığı;***

4. $(a,b] = \{x | a < x \le b;\ x \in R\}$ *kümesine* $(a;b]$ ***sağdan kapalı yarı açık aralığı*** *denir.*

Tanım-4.65 ile tanımlanan gerçek sayı aralıkları, sayı doğrusunda uçları $A(a)$ ve $B(b)$ olan doğru parçalarını belirtirler.



$[AB] \leftrightarrow [a;b]$

$(AB) \leftrightarrow (a;b)$

$[AB) \leftrightarrow [a;b)$

$(AB] \leftrightarrow (a;b]$

Burada $[AB] = [a;b]$ demediğimize dikkat ediniz. $[AB]$ bir nokta kümesi, $[a;b]$ bir sayı kümesidir.

Ancak $[AB]$ yerine $[a;b]$ ya da $[a;b]$ yerine $[AB]$ kullanılabilir. İlkinde bir geometri problemi bir cebir problemine, ikincisinde bir cebir problemi bir geometri problemine dönüştürülmüş olur.

Örnek – 4.136

$M = [-2;3)$ ve $N = (1;5]$ olduğuna göre, aşağıdaki kümeleri bulunuz.

a. $M \cup N$ **b.** $M \cap N$ **c.** $M - N$

Çözüm

Cebirsel yol

a. $M \cup N = \{x | -2 \le x < 3 \text{ veya } 1 < x \le 5;\ x \in R\}$

$\Rightarrow M \cup N = \{x | -2 \le x \le 5;\ x \in R\}$

$\Rightarrow M \cup N = [-2;5]$

b. $M \cap N = \{x | -2 \le x < 3 \text{ ve } 1 < x \le 5;\ x \in R\}$

$\Rightarrow M \cap N = \{x | 1 < x < 3;\ x \in R\}$

$\Rightarrow M \cap N = (1;3)$

c. $M - N = \left\{x | -2 \le x < 3 \text{ ve } (1 < x \le 5)';\ x \in R\right\}$

$\Rightarrow M - N = \{x | -2 \le x \le 1;\ x \in R\}$

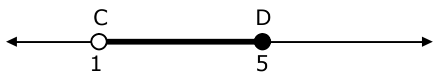
$\Rightarrow M - N = [-2;1]$

Geometrik yol

$A(-2)$, $B(3)$, $C(1)$, $D(5)$ olsun.

M kümesi yerine $[AB)$

N kümesi yerine $(CD]$ alınabilir.



a. $[AB) \cup (CD] = [AD]$

$\Rightarrow M \cup N = [1;5]$ olur.

b. $[AB) \cap (CD] = (CB)$

$\Rightarrow M \cap N = (1;3)$ olur.

c. $[AB) - (CD] = [AC]$

$\Rightarrow M - N = (2;1)$ olur.

Tanım – 4.66

Her x∈R için $-\infty < x$ *eşitsizliği ile belirtilen "*$-\infty$*" sembolüne "**eksi sonsuz**";*

Her x∈R için $x < +\infty$ *eşitsizliği ile belirtilen "*$+\infty$*" sembolüne "**artı sonsuz**" denir.*

$-\infty$ ve $+\infty$ gerçek sayı değildir. Gerçek sayılar kümesi $(-\infty, +\infty)$ açık aralığı ile gösterilir.

Buna göre; örneğin

$\{x | x \le 5;\ x \in R\} = (-\infty;5]$;

$\{x | x > -3;\ x \in R\} = (-3;+\infty)$ dır.

Etkinlik – 4.228

$A=[2;+\infty)$, $B=[-2;6)$ ve $C=[-1;4)$ olduğuna göre; aşağıdaki kümeleri bulunuz.

a. $A\cap B$ **b.** $(A\cup C)\cap B$

c. $A-B$ **d.** $(B-C)\cap A$

Alıştırmalar ve Problemler – 4.9

1. Virgülden sonra ardışık sayma sayılarının sırayla yazılmasıyla elde edilen.

$a=0{,}123456789101112...$ sayısı rasyonel midir?

a sayısı,

$[0;1]$, $[0{,}1;0{,}2]$, $[0{,}12;0{,}13]$,... iç içe aralıklar dizisi ile gösterilirse, bu dizinin 100. teriminin 1. bileşeninin en küçük kesir basamağındaki rakam kaç olur?

2. a irrasyonel ve b rasyonel bir sayıdır.

$A=\{x \mid a<x<b,\ x\in Q\}$ ve

$B=\{x \mid a<x<b,\ x\in R\}$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

a. A'nın en büyük alt sınırı a'dır.
b. A'nın en büyük alt sınırı yoktur.
c. A'nın en küçük üst sınırı b'dir.
d. A'nın en küçük üst sınırı yoktur.
e. B'nin en büyük alt sınırı a'dır.
f. B'nin en büyük alt sınırı yoktur.
g. B'nin en küçük üst sınırı b'dir.
h. B'nin en küçük üst sınırı yoktur.

3. $a\in R$ olmak üzere,

$\mathbf{a<0 \Leftrightarrow a^{-1}<0}$ dır.

İspatlayınız.

4. $a, b\in R$ olmak üzere,

$\mathbf{a<b<0 \Rightarrow a^{-1}>b^{-1}}$ dir.

İspatlayınız.

5. $a\in R$ ve $n\in Z^-$ olmak üzere,

$\mathbf{0<a<1 \Rightarrow a^n>1}$ dir.

İspatlayınız.

6. $a\in R$ ve $n\in Z^-$ olmak üzere,

$\mathbf{a>1 \Rightarrow 0<a^n<1}$ dir.

İspatlayınız.

7. $a\in R$ ve $m, n\in Z$ olmak üzere,

$\mathbf{0<a<1}$ **ve** $\mathbf{m<n \Rightarrow a^m>a^n}$ dir.

İspatlayınız.

8. $a\in R$ ve $m, n\in Z$ olmak üzere,

$\mathbf{a>1}$ **ve** $\mathbf{m<n \Rightarrow a^m<a^n}$ dir.

İspatlayınız.

9. $a,b\in R^+$ ve

a. $n\in Z^+$ olmak üzere;

$a^n\le b^n \Leftrightarrow a\le b$ dir.

b. $n\in Z^-$ olmak üzere;

$a^n\le b^n \Leftrightarrow a\ge b$ dir.

İspatlayınız.

10. $a, b, c\in R$ olmak üzere;

$\mathbf{a^2+b^2+c^2\ge ab+ac+bc}$ dir.

İspatlayınız.

11. $a, b\in Q$ ve $x\in Q'$ ise $(a+b\cdot x)\in Q'$ dür.

İspatlayınız.

12. $\sqrt{6}$, $\sqrt{60}$, $\sqrt{6}+\sqrt{10}$ sayılarının rasyonel olmadıklarını gösteriniz.

13. $a, b\in R$ olmak üzere;

$\mathbf{0\le a\le b \Rightarrow a\le\sqrt{ab}\le b}$ dir.

İspatlayınız.

14. $a, b \in R^+$ olmak üzere,

$\mathbf{a \neq b}$ **ve** $\mathbf{n = a \cdot b \Rightarrow a < \sqrt{n}}$ **ya da** $\mathbf{b < \sqrt{n}}$ dir.

İspatlayınız.

15. a, b∈R ve $a \geq b \geq 0$ olmak üzere;

$\boxed{1.}$ $\sqrt{\mathbf{a+b}} \leq \sqrt{\mathbf{a}} + \sqrt{\mathbf{b}}$ dir.

$\boxed{2.}$ $\sqrt{\mathbf{a-b}} \geq \sqrt{\mathbf{a}} - \sqrt{\mathbf{b}}$ dir.

İspatlayınız.

16. $a, b \in R^+$ olmak üzere;

$\mathbf{a^2b + ab^2 \leq a^3 + b^3}$

olduğunu gösteriniz.

17. a bir rasyonel sayı ve b tam kare çarpanı bulunmayan bir doğal sayı olmak üzere, aşağıdakileri $a\sqrt{b}$ biçiminde yazınız.

a. $\sqrt{12}$ **b.** $\sqrt{18}$ **c.** $\sqrt{27}$ **d.** $\sqrt{3} \cdot \sqrt{8}$

e. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ **f.** $\sqrt{\dfrac{8}{9}}$ **g.** $\sqrt{\dfrac{9}{5}}$ **h.** $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

18. Aşağıdaki sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

a. $6 \cdot \sqrt{2}$ **;** $5 \cdot \sqrt{3}$ **;** $4 \cdot \sqrt{5}$ **;** $3 \cdot \sqrt{7}$ **;** 8

b. $\dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{5}$ **;** $\dfrac{2}{3} \cdot \sqrt{\dfrac{5}{7}}$ **;** $\dfrac{3}{4} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ **;** $\dfrac{2}{5}$

19. Aşağıdaki sayıların paydalarını rasyonel yapınız.

a. $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ **b.** $\dfrac{10}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}$ **c.** $\dfrac{4}{3\sqrt{2}}$

d. $\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{6}}$ **e.** $\dfrac{8}{3+\sqrt{5}}$ **f.** $\dfrac{6}{\sqrt{2}-2}$

g. $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ **h.** $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ **i.** $\dfrac{12}{\sqrt{6}\left(2-\sqrt{3}\right)}$

j. $\dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$ **k.** $\dfrac{3}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ **l.** $\dfrac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

20. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\sqrt{20} + \sqrt{80} - \sqrt{125}$

b. $\sqrt{32} - \sqrt{72} - \sqrt{48} + \sqrt{75}$

c. $5\sqrt{18} - 3\sqrt{5}\left(\sqrt{10} - \sqrt{15}\right)$

d. $\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{8}-4\right)$

e. $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{2}-3\right) - \sqrt{2}\left(3\sqrt{2}-2\right)$

f. $\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{10}+\sqrt{5}\right) - 2\sqrt{60}$

g. $\left(3+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + 2\sqrt{12}$

h. $2\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right) - 3\sqrt{2}\left(3-\sqrt{2}\right)$

21. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a. $\sqrt{32} - \dfrac{6\sqrt{2}-8}{2-\sqrt{2}}$

b. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} - \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

c. $\sqrt{\dfrac{3}{5}} + \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1} - \dfrac{\sqrt{10}}{2\sqrt{2}}$

d. $\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

e. $2\sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$

f. $\dfrac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

22. Aşağıdaki önermelerden hangileri doğrudur?

a. $\sqrt{3} + \sqrt{7} < 2\sqrt{5}$

b. $\sqrt{5} + \sqrt{11} < \sqrt{6} + \sqrt{10}$

c. $\sqrt{5} + \sqrt{13} < \sqrt{3} + \sqrt{15}$

d. $\sqrt{5} - \sqrt{6} < \sqrt{7} - \sqrt{8}$

23. Aşağıdaki denklemlerin R'deki çözüm kümelerini bulunuz.

a. $\sqrt{2}x - \sqrt{6} = 2$ **b.** $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = \sqrt{2}x + \sqrt{3}$

c. $\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x^2-5\right)\left(x^2+4\right) = 0$

d. $\dfrac{\sqrt{2}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

e. $\dfrac{\sqrt{5}x+\sqrt{7}}{\sqrt{7}x-\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{7}{5}}$

f. $\left(x-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}x+3\right)=\left(\sqrt{3}-x\right)^2$

24. Aşağıda verilen sayılardan büyük olan en küçük tam sayıları bulunuz. (Karekök bulmadan yapınız.)

a. $3-6\sqrt{3}$ **b.** $7\sqrt{5}+7$ **c.** $2\sqrt{5}+5\sqrt{2}$

25. Sayı doğrusunda $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ sayılarına eşlenen noktaları bulunuz.

26. $x, y \in R$; $-3 \le x < 4$ ve $-2 < y \le 3$ olduğuna göre, aşağıdaki ifadelerin en küçük tam sayı değerleri ile en büyük tam sayı değerlerini bulunuz.

a. $2x+3$ **b.** $5-2y$ **c.** $2x+3y$

d. $3x-2y$ **e.** $x \cdot y$ **f.** $x : y$

g. x^2-y^2 **h.** x^2-2y **i.** $xy+2x$

j. x^2+y^2-2xy **k.** x^2+2x-y

27. Aşağıdaki eşitsizliklerin Z, Q ve R deki çözüm kümelerini bulunuz. Çözüm kümelerinin en büyük elemanlarını ve en küçük üst sınırlarını belirtiniz.

a. $\dfrac{3}{5}(x-3) \le \dfrac{1}{3}\left(x+\sqrt{2}\right)$

b. $\sqrt{3}x-2 < \sqrt{2}x+3$

c. $\sqrt{3}x-\sqrt{6} \le \sqrt{2}-x$

d. $\dfrac{\sqrt{5}-x}{\sqrt{5}x} \ge \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

e. $\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \ge \sqrt{2}$

f. $\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{7}\right) \le 0$

28. Aşağıdaki eşitsizlik sistemlerinin R'deki çözüm kümelerini bulunuz.

a. $-3 < 2x-1 \le 4x+5$

b. $3x+1 \le 5 < 7x-2$

c. $\left(\dfrac{7}{2x-8} \le \dfrac{2}{x-4}\right) \wedge \left(\dfrac{4}{x-4} \le \dfrac{x-4}{9}\right)$

d. $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{1-2x} < \dfrac{5}{6}$

e. $-3 \le \dfrac{1}{1-2x} < 3$

f. $(5x-4 < 3x+2 \le 11) \wedge (-6 < 3x-3 < 6)$

g. $\left(x-\dfrac{x-2}{3} < 2\right) \vee \left[\dfrac{2}{3}(1-3x) < 4-\dfrac{2x}{3}\right]$

h. $\left(0 < \dfrac{1}{x} \le \dfrac{3}{x-4}\right) \vee \left(\dfrac{3}{x} \le \dfrac{1}{x-4} < 0\right)$

29. $x, y \in R$; $xy-2x+y=12$ ve $-3 < y \le 5$ olduğuna göre, bu koşulları sağlayan x değerlerinin kümesini bulunuz.

30. $x, y, z \in R$; $x-y+z=45$ ve $-5 \le y < 10$ olduğuna göre, $x+y+z$ toplamı kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

31. $0 \le x < y$ ve $3x+4y=144$ tür.

a. $x,y \in Z$ ise y kaç farklı değer alabilir?

b. $x,y \in R$ ise y kaç farklı tam sayı değer alabilir?