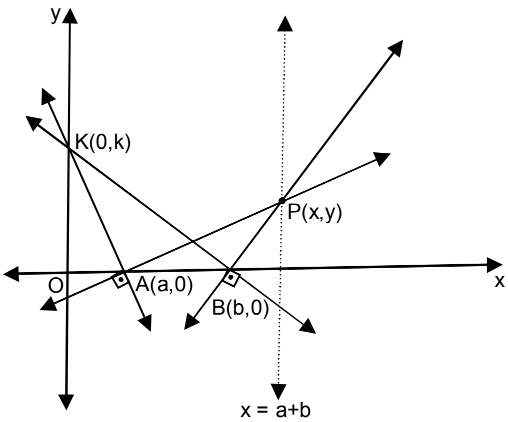
PROBLEM-1

Ox ekseninde sabit iki nokta veriliyor.

Bu iki noktadan geçen ve Oy ekseni üzerinde kesişen iki doğru çiziliyor.

Sabit noktalardan bu iki doğruya çizilen dikmelerin kesim noktalarının geometrik yeri nedir?

ÇÖZÜM



Ox ekseni üzerindeki sabit iki nokta $A(a,0)$ ve $B(b,0)$ olsun. Bu noktalardan geçen birer doğru, Oy ekseni üzerinde $K(0,k)$ noktasında kesişsin. AK ve BK doğrularına, sırasıyla A'da ve B'de dik olan doğrular da P(x,y) noktasında kesişsin.

Doğruların eğimleri;

$m_{KA} = \dfrac{0-k}{a-0}$, $\quad m_{PA} = \dfrac{y-0}{x-a}$,

$m_{KB} = \dfrac{0-k}{b-0}$, $\quad m_{PB} = \dfrac{y-0}{x-b}$ olur.

$KA \perp PA \quad \Rightarrow \quad \dfrac{-k}{a}\cdot\dfrac{y}{x-a} = -1 \quad (1);$

$KB \perp PB \quad \Rightarrow \quad \dfrac{-k}{b}\cdot\dfrac{y}{x-b} = -1 \quad (2)$ dir.

(1) ve (2) taraf tarafa oranlanırsa;

$a(x-a) = b(x-b) \;\Rightarrow\; (a-b)x = a^2 - b^2$

ve buradan $x = a+b$ bulunur.

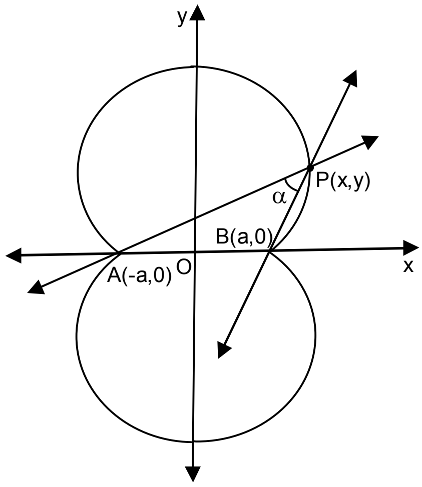
K noktası değiştikçe P noktalarının geometrik yeri $x = a+b$ doğrusu olur.

a veya b sıfır iken P noktası tanımlanamaz.

PROBLEM-2

Sabit iki noktadan geçen ve belirttikleri açının ölçüsü sabit olan iki doğrunun kesim noktalarının geometrik yeri nedir?

ÇÖZÜM



Aranan geometrik yer bu iki noktanın belirttiği doğru parçasını kiriş sayan bir çift çember yayıdır.

Böyle olduğunu gösterelim:

Sabit iki nokta A ve B olsun. Bu noktalardan geçen doğrular P noktasında kesişsin.

$m(A\hat{P}B) = \alpha$ olsun.

AB doğrusunu x ekseni; [AB]'nin orta dikmesini y ekseni olarak alalım. $A(-a,0)$, $B(a,0)$ ve P(x,y) diyelim.

$m_{AP} = \dfrac{y-0}{x+a}$ ve $m_{BP} = \dfrac{y-0}{x-a}$ olur.

$$\tan\alpha = \frac{m_{BP} - m_{AP}}{1 + m_{BP}\cdot m_{AP}}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\dfrac{y}{x-a} - \dfrac{y}{x+a}}{1 + \dfrac{y}{x-a}\cdot\dfrac{y}{x+a}}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$$

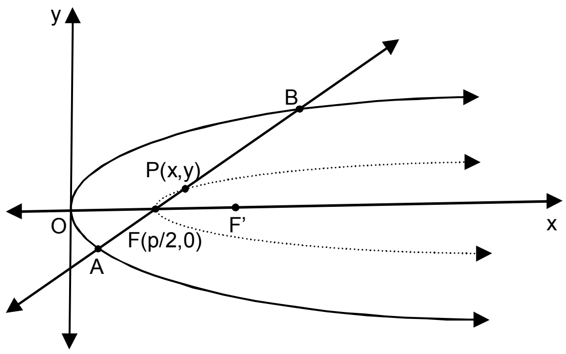
$\Rightarrow x^2 + y^2 - (2a\cdot\cot\alpha)\cdot y - a^2 = 0$ bulunur.

Bu, A ve B noktalarından geçen çemberin denklemidir. Ancak; [AB] kirişini, kirişin bir yanındaki yayın üzerindeki noktalar α açısı altında görürken diğer yay üzerindeki noktalar bu ölçü altında görmez.
Öyleyse; geometrik yer, koşula uyan yaydır.
Özel olarak; $\alpha = 90°$ iken $\cot\alpha = 0$ olacağından, geometrik yer $x^2 + y^2 = a^2$ çemberi olur.

PROBLEM-3

Verilen bir parabolün, odağından geçen kirişlerinin orta noktalarının geometrik yeri nedir?

ÇÖZÜM



$y^2 = 2px$ parabolünün $F(\frac{p}{2}, 0)$ odağından geçen bir [AB] kirişinin eğimi m olsun.

Bu kirişin denklemi, $y = m(x - \frac{p}{2})$ olur.

Bu kiriş ile parabolün kesim noktalarının ordinatlarını veren denklem; kiriş denklemindeki x'in y türünden değerinin parabol denkleminde yerine konulması ile bulunur:

$$y^2 - \frac{2p}{m} \cdot y - p^2 = 0$$

Kirişin orta noktasının ordinatı, bu denklemin köklerinin toplamının yarısıdır. Kirişin orta noktası $M(x, y)$ ise $y = \frac{p}{m}$ olur.

m serbestçe değişebilmektedir. Biz, $M(x, y)$ noktasının x'i ile y'si arasında sabit bir bağıntı arıyoruz.

$M(x, y)$ noktaları kiriş denklemini sağlayacağından, $m = \frac{p}{y}$ değeri kiriş denkleminde yerine konulursa aranan bağıntı bulunur.

$$y^2 = p \cdot (x - \frac{p}{2})$$

Bu bağıntının, köşesi $F(\frac{p}{2}, 0)$ ve odağı $F'(\frac{3p}{4}, 0)$ olan bir parabolün denklemi olduğuna dikkat ediniz.