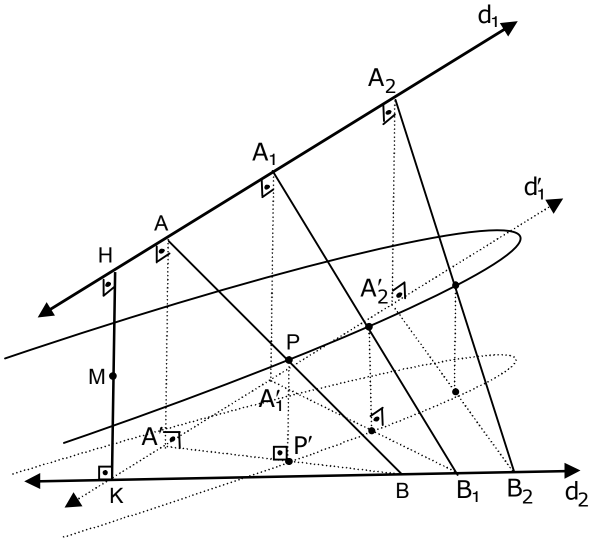
PROBLEM

d_1 ve d_2 aykırı iki doğrudur. Uzunluğu sabit olan $[AB]$ doğru parçasının A ucu d_1 ve B ucu d_2 üzerinde değişmektedir.

$[AB]$ doğru parçasının P orta noktasının geometrik yerini bulunuz.

ÇÖZÜM



d_1 ve d_2 aykırı iki doğru olsun. $|AB|$ uzunluğu sabit olmak üzere; $[AB]$ doğru parçasının A ucu d_1 üzerinde, B ucu d_2 üzerinde bulunsun. d_1 ve d_2'nin HK ortak dikmesinin H ayağı d_1 üzerinde, K ayağı d_2 üzerinde olsun. d_2'den geçen ve d_1'e paralel olan düzlem E; d_1 ile HK'nın belirttiği düzlem F olsun. E düzleminin, K'dan geçen ve d_1 doğrusuna paralel olan d_1' ile d_2 doğrularının belirttiği düzlem olduğunu görünüz. d_1' ile d_2'nin belirttiği açı, d_1 ve d_2 doğrularının doğrultu vektörlerinin belirttiği açı ile eştir.

Şekilde;
$d_1 // d_1'$, $HK \perp d_1'$, $HK // AA' // A_1A_1' // A_2A_2'$
olduğundan,
$|HK| = |AA'| = |A_1A_1'| = |A_2A_2'| ...$'dur.
$AA'B$ üçgeninde;
$$\frac{|PP'|}{|AA'|} = \frac{|BP|}{|BA|} \Rightarrow \frac{|PP'|}{|HK|} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad |PP'| = \frac{1}{2} \cdot |HK|$$
olur.
Öyleyse; $[AB]$ doğru parçalarının P orta noktaları E düzleminden hep $\frac{1}{2} \cdot |HK|$ uzaklığında olacaklarından, P'nin geometrik yeri olan şekil [HK] ortak dikmesinin orta dikme düzlemi üzerindedir.
$[HK]$'nın orta dikme düzlemi E düzlemine paraleldir. Öyleyse; geometrik yerin E düzlemi üzerindeki dik izdüşümü kendisine eştir.
$[AB]$'nin E düzlemi üzerindeki dik izdüşümü $[A'B]$; P noktasının E üzerindeki dik izdüşümü P' olsun.
$AA'B$ dik üçgeninde;
$$|A'B|^2 = |AB|^2 - |AA'|^2 \quad \Rightarrow \quad |A'B|^2 = |AB|^2 - |HK|^2$$
olduğundan, $|A'B|$ uzunluğu sabittir ve P' noktası $[A'B]$'nın orta noktasıdır.
Böylece; problem, A' ucu d_1' üzerinde, B ucu d_2 üzerinde değişen ve $|A'B|$ uzunluğu sabit olan $[A'B]$ doğru parçasının P' orta noktasının geometrik yerini bulmaya dönüşür.
Bu problem ayrıca çözülürse; bu geometrik yerin, büyük ekseni $A'KB$ açısının açıortayı üzerinde bulunan ve merkezi K olan bir elips olduğu görülür.
Çizdiğimiz şekilde elipsin sadece bir kısmı görülmektedir. A ve B noktaları, H ve K'nın ayırdığı diğer ışınlar üzerinde de değişeceğinden elips tamamlanır.
Aradığımız geometrik yer de; K merkezli elipsin, $[HK]$'nın orta dikme düzlemi üzerindeki dik izdüşümüdür.

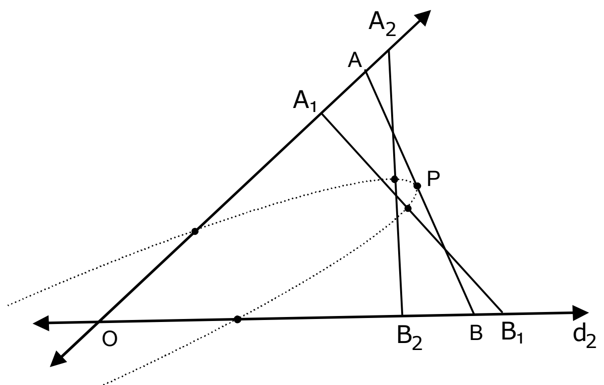
PROBLEMİN UZANTISI-1

d_1 ve d_2 kesişen iki doğrudur. Uzunluğu sabit olan $[AB]$ doğru parçasının A ucu d_1 ve B ucu d_2 üzerinde değişmektedir.

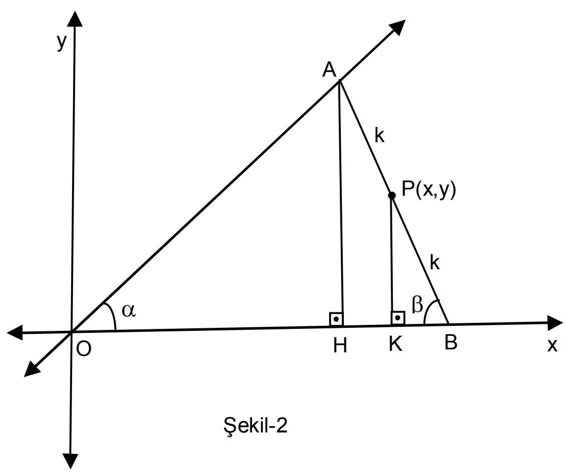
$[AB]$ doğru parçasının P orta noktasının geometrik yerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekil-1'de ortaya çıkarmaya çalıştığımız geometrik yerin ne olduğunu bulmaya çalışalım.



Şekil-1



Şekil-2

Açının köşesi O, $m(AOB) = \alpha$, $m(ABO) = \beta$, $[AB]$'nın ortası P ve $|AP| = |PB| = k$ olsun.

A'dan OB'ye indirilen dikmenin ayağına H; P'den OB'ye indirilen dikmenin ayağına K diyelim.

OB'yi x ekseni ve O'dan OB'ye çizilen dikmeyi y ekseni olarak alıp şekli koordinat sistemine oturtalım. $P(x, y)$ olsun.

Sinüs teoremine göre;

$$\frac{|OA|}{\sin\beta} = \frac{2k}{\sin\alpha} \Rightarrow |OA| = \frac{2k \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow |OH| = \frac{2k \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{ve}$$

$|HK| = |KB| = k \cdot \cos\beta$ olur.

Buna göre;

$x = 2k \cdot \cot\alpha \cdot \sin\beta + k \cdot \cos\beta$ (1) ve
$y = k \cdot \sin\beta$ (2) olur.

(2)'deki $\sin\beta$ değeri (1)'de yerine konursa;

$$x = 2y \cdot \cot\alpha + k \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{k^2}}$$

$$\Rightarrow x - 2y \cdot \cot\alpha = \sqrt{k^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 4\cot\alpha \cdot x \cdot y + (1 + 4\cot^2\alpha) \cdot y^2 - k^2 = 0$$

bulunur ki bu bir elips denklemidir.

PROBLEMİN UZANTISI-2

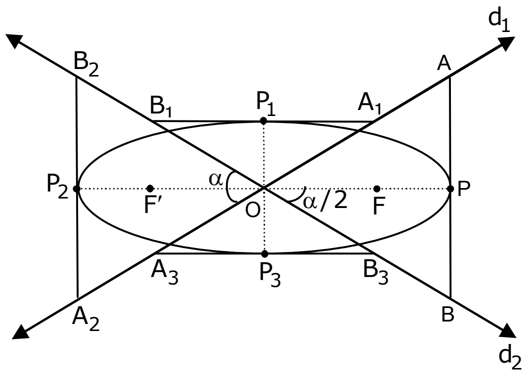
d_1 ve d_2 kesişen iki doğrudur. Uzunluğu sabit olan $[AB]$ doğru parçasının A ucu d_1 ve B ucu d_2 üzerinde değişmektedir.

$[AB]$ doğru parçasının P orta noktasının geometrik yeri bir elipstir.

Bu elipsin köşelerini, odaklarını ve eksen uzunluklarını belirtiniz.

ÇÖZÜM

Geometrik yerin bir elips olduğunu biliyoruz.



$d_1 \cap d_2 = \{O\}$, $|AB| = d$ ve doğruların belirttiği açının ölçüsü α olsun.

$[AB]$ doğru parçası $|OA| = |OB|$, $|OA_1| = |OB_1|$, $|OA_2| = |OB_2|$ ve $|OA_3| = |OB_3|$ konumlarında iken P, P_1, P_2 ve P_3 orta noktalarının elipsin köşelerine karşılık gelecekleri açıktır.

$\alpha < 90°$ iken; elipsin büyük ekseni $[PP_2]$, küçük ekseni $[P_1P_3]$ olur.

Büyük eksen uzunluğu 2a, küçük eksen uzunluğu 2b ve odaklar arası uzaklık 2c olmak üzere; şekilden,

$a = |OP| = \frac{d}{2} \cdot \cot\frac{\alpha}{2}$ ve $b = \frac{d}{2} \cdot \tan\frac{\alpha}{2}$ bulunur.

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow c^2 = \left(\frac{d}{2} \cdot \cot\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} \cdot \tan\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{d^2}{4} \cdot \left(\cot^2\frac{\alpha}{2} - \tan^2\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \cdot d^2$$

$$\Rightarrow c = \frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\alpha} \cdot d \text{ olur.}$$

$\alpha = 90°$ iken, geometrik yerin O merkezli ve $\frac{d}{2}$ yarıçaplı çember olacağını;

$\alpha > 90°$ iken, geometrik yerin yine elips olacağını; ancak bu durumda odakların $[P_1P_3]$ üzerinde bulunacağını görünüz.