Problem - 1

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=\dfrac{1}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$|x-1|<\delta$ eşitsizliğini sağlayan her x değeri için, $\left|\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ eşitsizliğinin de sağlandığı δ ve ε sayılarının bulunduğunu göstereceğiz.

Başka bir deyişle;

x değişkeni 1'in δ komşuluğunda iken, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ değerlerinin de $\dfrac{1}{2}$'nin ε komşuluğunda olduğunu göstereceğiz.

Daha başka bir deyişle;

x değişkeni, 1'e uzaklığı sonsuz küçük olan değerler aldığında, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ görüntüsünün $\dfrac{1}{2}$'ye uzaklığının da sonsuz küçük değerler aldığını göstereceğiz.

1. yol

$$\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}<\varepsilon$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}-\varepsilon<\frac{1}{x+1}<\frac{1}{2}+\varepsilon$$
$$\Rightarrow \frac{2}{1+2\varepsilon}<x+1<\frac{2}{1-2\varepsilon}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{1+2\varepsilon}-2<x-1<\frac{2}{1-2\varepsilon}-2$$
$$\Rightarrow \frac{-4\varepsilon}{1+2\varepsilon}<x-1<\frac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon}$$
$$\Rightarrow |x-1|<\frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}$$

$\delta=\dfrac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}$ olarak seçilebilir.

$0<\delta\leq\dfrac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}$ olarak da seçilebilir.

$|x-1|<\delta=\dfrac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}$ eşitsizliğini sağlayan her x değeri için, $\left|\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ eşitsizliği de sağlanır.

2. yol

$$|x-1|<\delta \Rightarrow -\delta<x-1<\delta$$
$$\Rightarrow 2-\delta<x+1<2+\delta$$
$$\Rightarrow 2-\delta<|x+1|<2+\delta$$

Diğer taraftan;

$$\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{|x-1|}{2\cdot|x+1|}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right|<\frac{\delta}{2\cdot(2-\delta)}$$

olur.

$0<\delta<2$ olması koşuluyla,

$\varepsilon=\dfrac{\delta}{4-2\cdot\delta}$ olarak seçilebilir.

$\varepsilon\geq\dfrac{\delta}{4-2\cdot\delta}$ olarak da seçilebilir.

$$\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{|x-1|}{2\cdot|x+1|}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right|<\frac{\delta}{2\cdot(2-\delta)}=\varepsilon$$
$$\Rightarrow \left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$