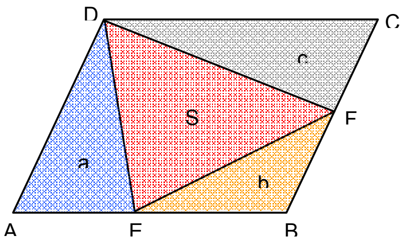
Ezber Örneği-1

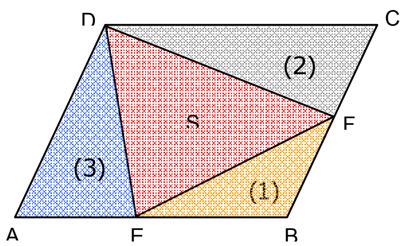


ABCD paralelkenar, $E \in [AB]$ ve $F \in [BC]$'dir.
$A(\triangle ADE) = a$, $A(\triangle BEF) = b$, $A(\triangle CDF) = c$ ve
$A(\triangle DEF) = S$ ise bu alan ölçüleri arasında,

$$S^2 = (a+b+c)^2 - 4ac$$

bağıntısı vardır.

Uygulama-1.1



ABCD paralelkenar, $E \in [AB]$ ve $F \in [BC]$'dir.
$A(\triangle ADE) = 3\ br^2$, $A(\triangle BEF) = 1\ br^2$ ve
$A(\triangle CDF) = 2\ br^2$ olduğuna göre,
$A(\triangle DEF) = S$ kaç birimkaredir?

Çözüm

$$S^2 = (a+b+c)^2 - 4ac$$
$$\Rightarrow S^2 = (3+1+2)^2 - 4\cdot 3\cdot 2$$
$$\Rightarrow S = 2\sqrt{3}\ br^2$$

Bu yaklaşım, beyin köreltmenin en etkin yoludur!

Çözümün Ardından…

Şimdi; burada yapılan nedir?

Büyük bir olasılıkla; öğretmen, geometrinin sınırsız sayıdaki şekillerinden biri ile ilgili bir bağıntı vermiş, bunun ispatını da yapmış ve "Bunu bilin. Sorulabilir." demiştir.

Yaptığı bir sınavda da, sözünde durarak sormuş ve cevabını da, tam istediği gibi, almıştır.

Öğrenci, öğretmeninin sınavda soracağını düşündüğü bu bağıntıyı ezberlemiş, sınavda da, tam istenildiği gibi cevabını vermiştir.

İspatı ile, biraz da karışık ise, hiç ilgilenmemiştir.

Buradaki matematik eğitim ve öğretimi öğrenciye ne kazandırmıştır?

Hiçbir şey!

Çünkü; böyle bir soru ile, bu bağıntıyı ezbere bilmesini gerektirecek biçimde, hiçbir sınavda karşılaşmayacaktır.

Aksine; öğrenci çok zarara sokulmuştur: Kısa sürede unutacağı, hiçbir işine yaramayacak bir formülü ezberlemek için zaman harcamıştır;

Zihnini, en etkin döneminde, ezberlemenin hizmetine verdiği için düşünme yeteneği azalmıştır;

Öğrenebileceği çok şeyden uzak kalmıştır.

Bu bir fikir tartışması değildir.

Böyle bir formülün ezberlenmesini önermek büyük bir eğitim-öğretim yanlışıdır.

Bir matematik öğretmeni öğrencisine, düşünmeyi öğretmeye çalışmalıdır.

Az öğrenebilene az; çok öğrenebilene çok.

Ama; amaç, kesinlikle, düşünmeyi öğretmek olmalıdır. "Bu düşünemiyor. Ezberlesin bari." demek , zararı katlamak demektir.

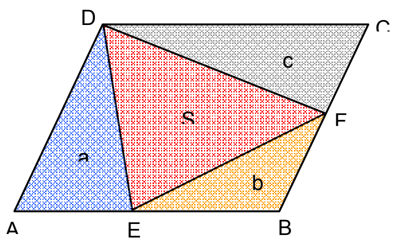
Şurası doğru anlaşılmalıdır:

Savunduğumuz, matematik değil; öğrencinin yararıdır.

Ayrıca; burada ele aldığımız durumun, "İşlemsel ve kavramsal öğrenme" tartışmalarıyla hiç ilgisi yoktur.

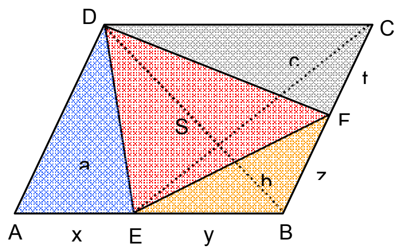
Doğrusunu yapmaya çalışalım:

Örnek Problem-1



ABCD paralelkenar, $E \in [AB]$ ve $F \in [BC]$'dir. $A(\triangle ADE) = a$, $A(\triangle BEF) = b$, $A(\triangle CDF) = c$ ve $A(\triangle DEF) = S$ olduğuna göre, bu alan ölçüleri arasındaki bağıntıyı bulunuz.

Çözüm



$|AE| = x$, $|EB| = y$, $|BF| = z$, $|FC| = t$ olsun.

$$\frac{z}{z+t} = \frac{A(\triangle BEF)}{A(\triangle BEC)}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{z+t} = \frac{b}{\frac{S+a+b+c}{2} - a}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{z+t} = \frac{2b}{S+b+c-a} \quad (1)$$

$$\frac{t}{z+t} = \frac{A(\triangle DCF)}{A(\triangle BCD)}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{z+t} = \frac{c}{\frac{S+a+b+c}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{z+t} = \frac{2c}{S+b+c+a} \quad (2)$$

(1) ve (2) taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} = \frac{2b}{S+b+c-a} + \frac{2c}{S+b+c+a}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2b(S+b+c+a) + 2c(S+b+c-a)}{(S+b+c+a)(S+b+c-a)}$$

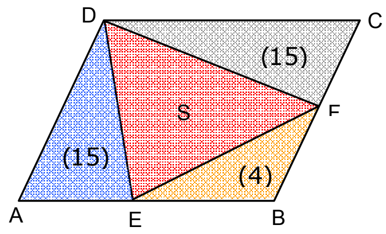
$$\Rightarrow S^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc - 2ac$$

$$\Rightarrow S^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac - 4ac$$

$$\Rightarrow S^2 = (a+b+c)^2 - 4ac$$

elde edilir.

Uygulama-1.2



ABCD paralelkenar, $E \in [AB]$ ve $F \in [BC]$'dir. $A(\triangle ADE) = 15\ br^2$, $A(\triangle BEF) = 4\ br^2$ ve $A(\triangle CDF) = 15\ br^2$ olduğuna göre, $A(\triangle DEF) = S$ kaç birimkaredir?

Çözüm

1. yol

$$\frac{|BF|}{|BC|} = \frac{A(\triangle BEF)}{A(\triangle BEC)} \Rightarrow \frac{|BF|}{|BC|} = \frac{4}{\frac{S+34}{2} - 15}$$

$$\Rightarrow \frac{|BF|}{|BC|} = \frac{8}{S+4} \quad (1)$$

$$\frac{|FC|}{|BC|} = \frac{A(\triangle CFD)}{A(\triangle BCD)} \Rightarrow \frac{|FC|}{|BC|} = \frac{15}{\frac{S+34}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{|FC|}{|BC|} = \frac{30}{S+34} \quad (2)$$

(1) ve (2) taraf tarafa toplanırsa,

$$1 = \frac{8}{S+4} + \frac{30}{S+34} \Rightarrow S = 16\ br^2 \text{ bulunur.}$$

2. yol

Buna benzer bir problem, kısa süreli bir test sınavında sorulursa, cevap seçenekleri de sabit sayılar olarak verilirse, mantık kuralları içinde şöyle düşünülebilir:

“Her zaman doğru olan, özel bir durumda da doğrudur.”

Rast gele bir ABCD paralelkenarında doğru olan, ABCD paralelkenarı bir kare olarak seçildiğinde de doğru olacaktır. Bu problemde verilen bilgiler, dörtgeni kare olarak seçmemize engel değildir.

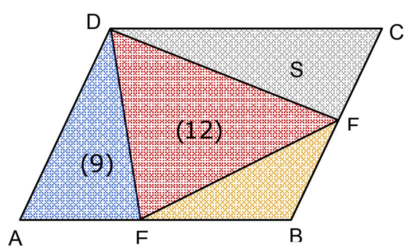
ABCD bir kare iken, $|EB| = |BF| = 2\sqrt{2}$ olur.

$|AE| = |FC| = x$ dersek, $|AD| = x + 2\sqrt{2}$ olur.

$$A(\triangle ADE) = \frac{|AE| \cdot |AD|}{2}$$
$$\Rightarrow 15 = \frac{x \cdot (x + 2\sqrt{2})}{2}$$
$$\Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow A(ABCD) = 50$$
$$\Rightarrow A(\triangle DEF) = 16 \text{ br}^2 \quad \text{bulunur.}$$

“Ezber Örneği-1”in tutsağı olan bir beyin, “Uygulama-1.3”ün çözüm yolunu görmede çok zorlanır.

Uygulama-1.3



ABCD paralelkenar, $E \in [AB]$ ve $F \in [BC]$’dir.

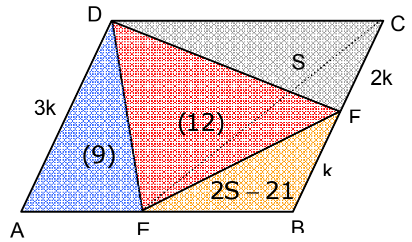
$A(\triangle ADE) = 9 \text{ br}^2$, $A(\triangle DEF) = 12 \text{ br}^2$ ve

$|CF| = 2 \cdot |BF|$ olduğuna göre,

$A(\triangle CDF) = S$ kaç birimkaredir?

Çözüm

1. yol



$|BF| = k$ dersek, $|FC| = 2k$ ve $|AD| = 3k$ olur.

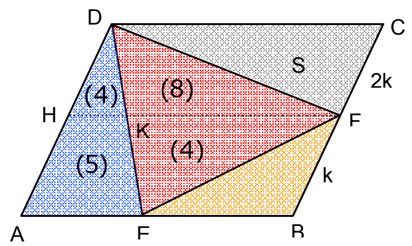
$A(\triangle CDF) = S$ ise

$A(ABCD) = 3S$, $A(\triangle DCE) = \dfrac{3S}{2}$ ve

$A(\triangle BEF) = 2S - 21$ olur.

$$\frac{|BF|}{|BC|} = \frac{A(\triangle BEF)}{A(\triangle BEC)} \Rightarrow \frac{k}{3k} = \frac{2S - 21}{\frac{3S}{2} - 9}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{4S - 42}{3S - 18}$$
$$\Rightarrow S = 12 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

2. yol



$HF \, / \, / AB$ çizelim.

$A(\triangle EKF) = 4$, $A(\triangle DKF) = 8$ ve

$A(\triangle DHK) = 4$ olur. $(\triangle DHK \cong \triangle DAE)$

HFCD paralelkenarında, $S = 12 \text{ br}^2$ bulunur.

Ezber Örneği-2

$y = ax^2 + bx + c$ parabolüne başlangıç noktasından çizilen teğetlerin birbirine dik olması için $\Delta = b^2 - 4ac = -1$ olmalıdır.

Uygulama-2.1

$y = x^2 + k \cdot x + 3$ parabolüne başlangıç noktasından çizilen teğetlerin birbirine dik olması için k kaç olmalıdır?

Çözüm

$$\Delta = b^2 - 4ac = -1$$
$$\Rightarrow k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -1$$
$$\Rightarrow k = -\sqrt{11} \text{ veya } k = \sqrt{11} \text{ bulunur.}$$

Bu yaklaşım zararlıdır!

Çözümün Ardından...

“Ezber Örneği-2” olarak verdiğimiz,

bir problem ve sonucudur.

Bir kere sorulmuş ve sonucu alınmıştır.

Artık; problem olmaktan çıkmıştır.

Birçok kaynakta bu ezberlenmiş sonucun değiştirilmiş kat sayılarla uygulanması, öğrencinin problem çözme becerisine en küçük bir katkı yapmaz. Öğrenci “Bir 2. derece denkleminin diskriminantını bulma.” alıştırmalarını pekiştirir durur.

Gireceği önemli sınavlarda da bu soru ile bu biçimiyle karşılaşmaz.

Dikkat ediniz!

Hiçbir “Üniversite Giriş Sınavı”nda, önceki yılların ezberlenmiş soru kalıpları ile karşılaşmayız. Önce orada sorulur; sonra, yüzlerce benzeri üretilir.

Yani; öğrenci, gelecek sınavlarda, sonuçlarını ezberlediği problemlerin hiçbiri ile karşılaşmayacaktır. Orada, olabildiğince, kavramları uygulayabilme becerileri ölçülmektedir.

Ayrıca; böyle bir ezbere zihnini tutsak eden biri, problemin güzel çözümünün kendine sağlayacağı “kavramlarla yakınlaşma” olanağından yararlanamamış olacaktır.

Problemleri çözebilmek için, elde edilecek bağıntının ezberlenmesi değil, bu bağıntının nasıl elde edildiğinin kavranması gerekir.

Örnek Problem-2

$y = ax^2 + bx + c$ parabolüne başlangıç noktasından çizilen teğetlerin birbirine dik olması için a, b, c kat sayıları arasında nasıl bir bağıntı olmalıdır?

Çözüm

$y = ax^2 + bx + c$ parabolüne başlangıç noktasından çizilen bir teğet $y = mx$ olsun.

Parabol ile doğrunun kesim noktalarının apsislerini veren denklemin iki kat kökü olmalıdır.

$$ax^2 + bx + c = mx$$
$$\Rightarrow ax^2 + (b - m)x + c = 0 \qquad (1)$$

(1) denkleminin diskriminantı sıfır olmalıdır.

$$\Delta = (b - m)^2 - 4ac = 0$$
$$\Rightarrow m^2 - 2bm + b^2 - 4ac = 0 \qquad (2)$$

(2) denkleminin kökleri, parabole teğet olan $y = mx$ doğrularının eğimlerini verir. Teğetlerin birbirine dik olması istendiğine göre, denklemin köklerinin çarpımı -1 olmalıdır.

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{c}{a}$$
$$\Rightarrow b^2 - 4ac = -1$$
$$\Rightarrow \Delta = -1$$

elde edilir.

“Ezber Örneği-2”yi kullanan bir öğrenci, “Uygulama-2.2”nin çözüm yolunu görmede çok zorlanır.

Uygulama-2.2

$y = k \cdot x^2 - x + 2$ parabolüne $A(-2,1)$ noktasından çizilen teğetlerin birbirine dik olması için k kaç olmalıdır?

Çözüm

$y = k \cdot x^2 - x + 2$ parabolüne $A(-2,1)$ noktasından çizilen teğetin eğimi m olsun.

Teğetin denklemi,

$y - 1 = m(x+2) \Rightarrow y = mx + 2m + 1$ olur.

Parabol ile doğrunun kesim noktalarının apsislerini veren denklemin iki kat kökü olmalıdır.

$$kx^2 - x + 2 = mx + 2m + 1$$
$$\Rightarrow kx^2 - (m+1)x - 2m + 1 = 0 \qquad (1)$$

(1) denkleminin diskriminantı sıfır olmalıdır.

$$\Delta = (m+1)^2 - 4k(-2m+1) = 0$$
$$\Rightarrow m^2 + (8k+2)m + 1 - 4k = 0 \qquad (2)$$

(2) denkleminin köklerinin çarpımı -1 olmalıdır.

$$1 - 4k = -1 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Ezber Örneği-3

x ve y birer pozitif gerçek sayı ve k bir gerçek sayı olmak üzere; $x + y = k$ ise, $T = x^m \cdot y^n$ ifadesini en büyük yapan x ve y değerleri, m ve n değerleri ile doğru orantılıdır.

Uygulama-3.1

x ve y birer pozitif gerçek sayı olmak üzere; $x + y = 6$ ise, $T = x \cdot y^2$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm

T’nin en büyük değerini aldığı durumda,

$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2x$ olur.

$$x + y = 6 \text{ ve } y = 2x$$
$$\Rightarrow x = 2 \text{ ve } y = 4 \text{ bulunur.}$$

$T = x \cdot y^2$ ’nin en büyük değeri 32 olur.

Bu ezbere kendini kaptıran öğrenci, tuzaklara düşebilir!

Yapılacak ispat ezberlemeyi haklı göstermez.

Örnek Problem-3

x ve y birer pozitif gerçek sayı ve k bir gerçek sayı olmak üzere; $x + y = k$ ise, $T = x^m \cdot y^n$ ifadesini en büyük yapan x ve y değerleri, m ve n değerleri ile doğru orantılıdır. İspatlayınız.

Çözüm

$$T = x^m \cdot y^n \text{ ve } x + y = k$$
$$\Rightarrow T = x^m \cdot (k-x)^n$$
$$\Rightarrow T' = mx^{m-1} \cdot (k-x)^n - x^m \cdot n(k-x)^{n-1}$$
$$\Rightarrow T' = x^{m-1} \cdot (k-x)^{n-1} \cdot [m \cdot (k-x) - n \cdot x]$$

T(x) fonksiyonunun ekstremum yaptığı yerde $T'(x) = 0$ olmalıdır.

$$T' = 0$$
$$\Rightarrow x^{m-1} \cdot (k-x)^{n-1} \cdot [m \cdot (k-x) - n \cdot x] = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = k, \quad x_3 = \frac{mk}{m+n} \text{ bulunur.}$$

$T(x_1) = 0$ ve $T(x_2) = 0$ olduğundan
$T(x_3)$ değeri T'nin en büyük değeridir.

T(x)'i en büyük yapan $x = \frac{mk}{m+n}$ değeri

için $y = \frac{nk}{m+n}$ olduğundan,

$\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ bulunur.

Uygulama-3.2

x ve y birer pozitif gerçek sayı olmak üzere; $2x + y = 6$ ise, $T = x \cdot y^2$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm

$$T = x \cdot y^2 \text{ ve } 2x + y = 6$$
$$\Rightarrow T = x \cdot (6 - 2x)^2$$

T(x) fonksiyonunun ekstremum yaptığı yerde $T'(x) = 0$ olmalıdır.

$$T' = (6 - 2x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot (6 - 2x) \cdot x = 0$$
$$\Rightarrow T' = (6 - 2x) \cdot (6 - 2x - 4x) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 3 \text{ ve } x_2 = 1$$

$T(3) = 0$ ve $T(1) = 16$ olduğundan
$T(1) = 16$ değeri T'nin en büyük değeridir.

"Ezber Örneği-3", "Uygulama-3.2" türünden sorulara da uygulabilecek biçimde yorumlanabilir.

Ama; soruları çeşitlendirmede sınır yoktur:

Uygulama-3.3

x ve y birer pozitif gerçek sayı olmak üzere; $x^2 + y = 25$ ise, $T = x \cdot y^2$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm

$$T = x \cdot y^2 \text{ ve } x^2 + y = 25$$
$$\Rightarrow T = x \cdot (25 - x^2)^2$$

T(x) fonksiyonunun ekstremum yaptığı yerde $T'(x) = 0$ olmalıdır.

$$T' = (25 - x^2)^2 + 2(-2x) \cdot (25 - x^2) \cdot x = 0$$
$$\Rightarrow T' = (25 - x^2) \cdot (25 - x^2 - 4x^2) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 5 \text{ ve } x_2 = \sqrt{5}$$

$T(5) = 0$ ve $T(\sqrt{5}) = 400\sqrt{5}$ olduğundan
$T(\sqrt{5}) = 400\sqrt{5}$
değeri T'nin en büyük değeridir.

Ezber Örneği-4

- $\sin 3x \equiv 4 \cdot \sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{3} - x) \cdot \sin(\frac{\pi}{3} + x)$
- $\cos 3x \equiv 4 \cdot \cos x \cdot \cos(\frac{\pi}{3} - x) \cdot \cos(\frac{\pi}{3} + x)$
- $\tan 3x \equiv \tan x \cdot \tan(\frac{\pi}{3} - x) \cdot \tan(\frac{\pi}{3} + x)$

Bu özdeşlikler, klasik trigonometri derslerinde ispatlanması istenen özdeşliklerdir. Bunları ezberletip, örneğin;

$$\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = ?$$

gibi bir ifadenin hesaplanmasında kullanılmasını önermek hiç doğru değildir.

Böyle bir soru, klasik sınavlarda söz konusu olabilir. (Tabii; bir de pek düşünülmeden hazırlanmış test kitaplarında.) Öğrencinin, gireceği bilinçli hazırlanmış sınavlarda, bu tür kalıplara hiç ihtiyacı olmayacaktır. Öğrenci için, bu özdeşliklerin nasıl elde edildiği önemlidir.

Bu örnekler çoğaltılabilir…

Şimdilik şunu da söyleyip bitireyim:

Biz öğretmenler, bir kısım test kitaplarının sorularına ya da bir kısım dersanelerin çanak sorularına öğrenci hazırlamıyoruz. Öğrencinin hazırlandığı asıl sınavda bu ezberlerin hiçbir yararı yoktur.

Hele; hayata hazırlarken düşünmeyi öğretmemiz gereken öğrenciye, bu ezberleri önermekle büyük zarar veriyoruz.