Theorem

The following two limits hold:

- $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$
- $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$

Notice

$$\sin\theta \le \theta \le 2\tan\frac{\theta}{2} \le \tan\theta$$

Divide by $\sin\theta$:

$$1 \le \frac{\theta}{\sin\theta} \le \frac{1}{\cos\theta}$$

Take reciprocals:

$$1 \ge \frac{\sin\theta}{\theta} \ge \cos\theta$$

As $\theta \to 0$, the left and right sides tend to 1. So, then, must the middle expression.

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

So

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cdot\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$$
$$= 1\cdot 0 = 0.$$

Example

1. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta}{\theta}$
2. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin 2\theta}{\theta}$

Answer

1. 1
2. 2

1. Use the basic trigonometric limit and the definition of tangent.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta\cos\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos\theta} = 1\cdot\frac{1}{1} = 1.$$

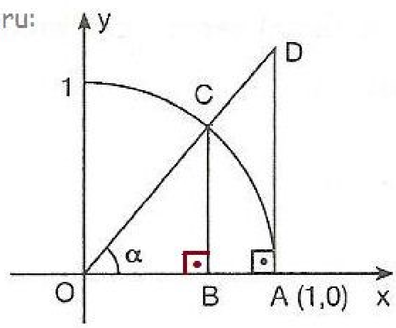
2. Change the variable:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\theta} = \lim_{2\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{2\theta\cdot\frac{1}{2}} = 2\cdot\lim_{2\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{2\theta} = 2\cdot 1 = 2$$

OR use a trigonometric identity:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\theta} = 2\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 2\cdot 1\cdot 1 = 2$$

soru:

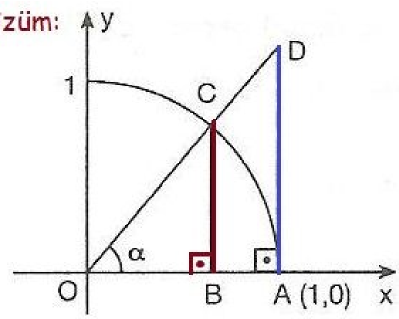


Şekildeki birim çemberin I. bölgesindeki yayı ile C noktası verilmiştir.

Buna göre, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{|AD|}{|CB|}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}$

çözüm:

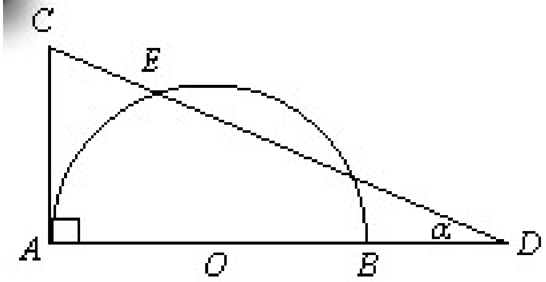


Tanım gereği AD uzunluğu $\tan\alpha$ *ve CB uzunluğu* $\sin\alpha$ *dır.*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{|AD|}{|CB|} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}$$
$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\cos\alpha}$$
$$= \frac{1}{\cos 0}$$
$$= 1$$

bhg,temmuz2010,İstanbul...

Örnek.



Şekilde $m(\overset{\frown}{AE}) = |AC|$ **ise** $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{AD}{AB} = 2$ **old.. göst.**

Çözüm. O.Ekiz

$\alpha \to 0$ için $\overset{\frown}{AE} \to |AE|$ olacaktır.

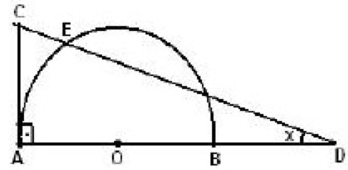
Bu durumda $\alpha \to 0$ için $|AC| = |AE|$ (*)

alabiliriz. Burdan m(ACE) = 90 - α

olup m(CAE)=$2\alpha = m(ABE)$*dır.*

Dolayısı ile AD= $\dfrac{AC}{\tan\alpha}$ve AB= $\dfrac{AE}{\sin 2\alpha}$ olur.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{AD}{AB} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\dfrac{AC}{\tan\alpha}}{\dfrac{AE}{\sin 2\alpha}}\ (*)dan = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{\tan\alpha} = 2 \text{ olur.}$$



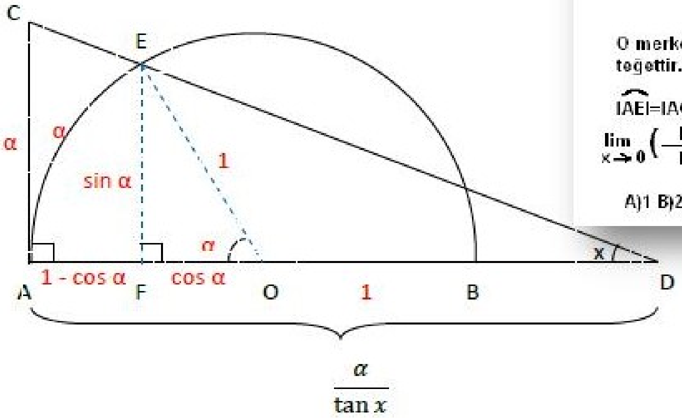
O merkezli çember CA doğrusuna A noktasında teğettir.

$\overset{\frown}{|AE|} = |AC|$ ise

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{|AD|}{|AB|} \right)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A)1 B)2 C)3 D)4 E)5

Çözüm (Eyüp Kamil Yeşilyurt, mart 2010)

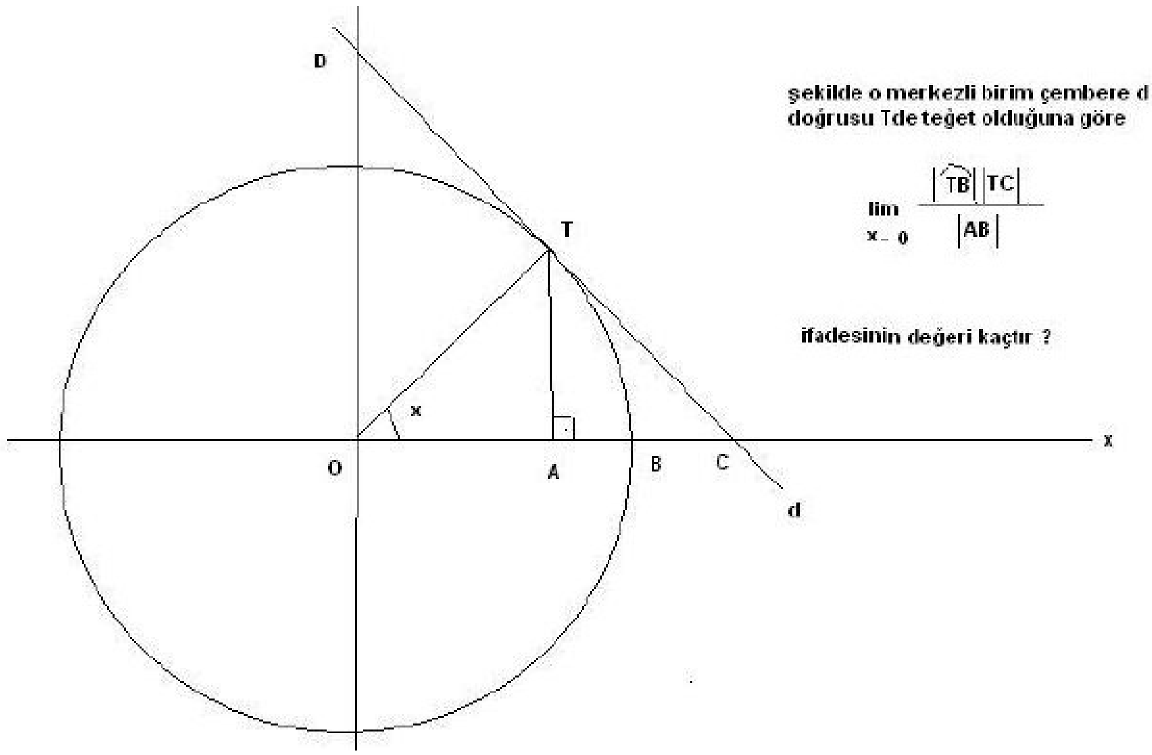


O merkezli çemberin yarıçapı 1 birim ve $m(E\hat{O}A) = \alpha$ radyan olsun. Yarıçap 1 birim olduğundan AE yayının uzunluğu α birimdir. Hipotezden $|AC| = \alpha$ birim olur. EFO dik üçgeninde; |EF|= sin α birim ve |FO|= cos α birim olduğundan |AF|= 1 − cos α birim elde edilir. CAD dik üçgeninde; $|AC| = \alpha$ birim olduğundan $|AD| = \frac{\alpha}{\tan x}$ birim olduğundan $|FD| = \frac{\alpha}{\tan x} - (1 - \cos\alpha)$ olur. EFD dik üçgeninde; $\tan x = \frac{|EF|}{|FD|}$ ise tan x $= \dfrac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{\tan x} - 1 + \cos\alpha}$ içler dışlar çarpımı yapılıp düzenlenirse

$\tan x = \frac{\alpha - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$ elde edilir.

$$\lim_{x\to 0}\frac{|AD|}{|AB|} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\alpha}{\tan x}}{2} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha - \alpha\cos\alpha}{2\alpha - 2\sin\alpha} = \frac{3}{2}$$

,,



Çözüm:

Birim çember olduğundan |OA|=cosx, |AB|=1 – cosx, |TC|=tanx ve birim çemberde yay uzunluğu radyan türünden merkez açının öşçüsüne eişit olduğundan $\left|\widetilde{TB}\right| = x$ olur.

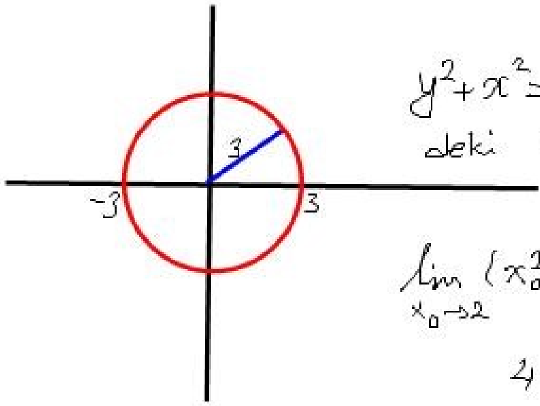
Değerler yerine yazılırsa

$$\lim_{x\to 0}\frac{xtanx}{1-cosx}=\lim_{x\to 0}\frac{xtanx(1+cosx)}{(1-cosx)(1+cosx)}=\lim_{x\to 0}\frac{xtanx(1+cosx)}{sinxsinx}=$$

$$1.1.\lim_{x\to 0}(1+cosx)=2$$

Olarak bulunur.

limx-->2(x^2+a) değerinin başlangıç noktasına olan uzaklığı en çok 3 br olduğuna göre a nın alabileceği tamsayılar toplamı?(-28) teşekkürler



$y^2+x^2=9$ çemberi üzerindeki x noktaları aradığımız cevaptır.

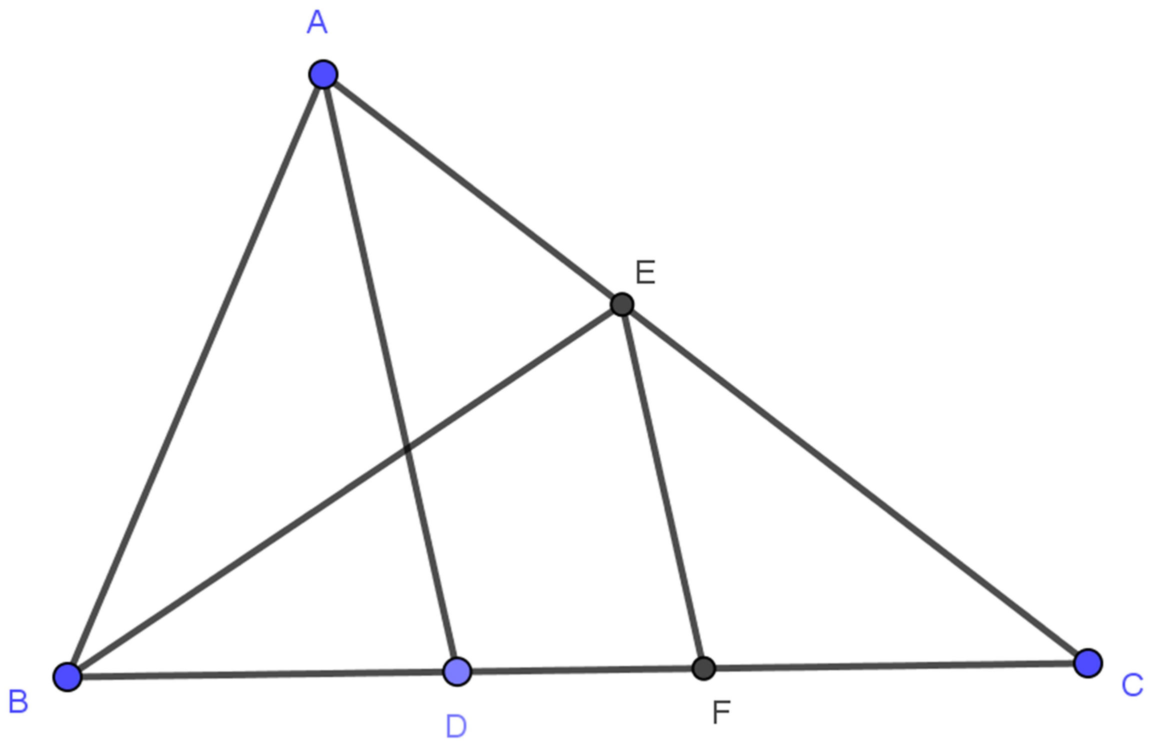
$\lim_{x_0\to 2}(x_0^2+a)=x$ ise

$4+a=x$

$-3\le 4+a\le 3$

$-7\le a\le -1$

$-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1$ toplamı -28 dir.



Yukarıdaki şekilde [BE], ABC a.ısnın açıortayı, D noktası [BC] üzerinde bir nokta ve [EF]//[AD] olmak üzere $\lim_{A\to D}\frac{|CF|}{|FD|}$ ifadesinin değeri ne olur.

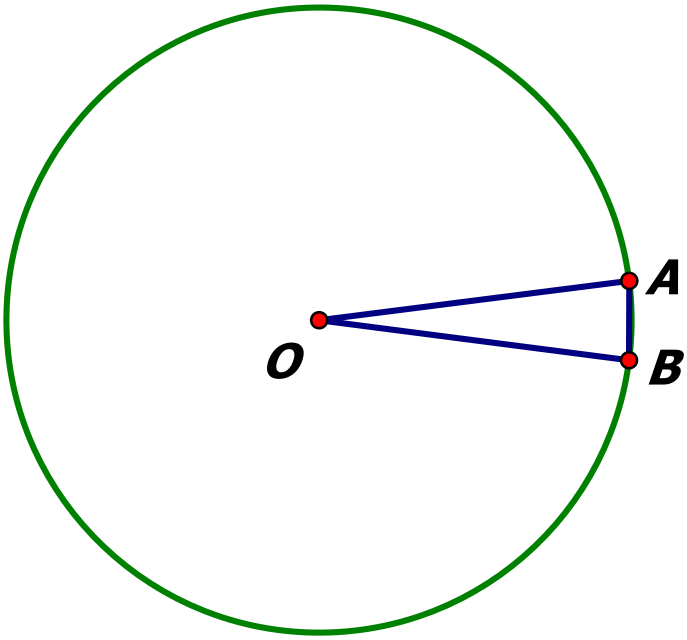
Çözüm:

[EF]//[AD] olduğundan CAD üçgeninde temel orantı kuralı gereği $\frac{|CE|}{|AE|}=\frac{|CF|}{|DF|}$ olur.

ABC üçgeninde [BE] açıortay olduğundan $\frac{|CE|}{|AE|}=\frac{|BC|}{|BA|}$ olur. Bu iki orantıdan $\frac{|BC|}{|BA|}=\frac{|CF|}{|DF|}$ olur.. $A \to D\ için\ |BA| \to |BD|$ olacaktır. Yani limit işlemi

$\lim_{A\to D}\frac{|CF|}{|FD|}=\lim_{|BA|\to|BD|}\frac{|CF|}{|FD|}=\lim_{|BA|\to|BD|}\frac{|BC|}{|BA|}=\frac{|BC|}{|BD|}$ olarak bulunur.

Çemberin Çecresi



$|OA|=|OB|=r$ ve $m(AOB)=\frac{2\pi}{n}$ ve $|AB|=l$ olsun.

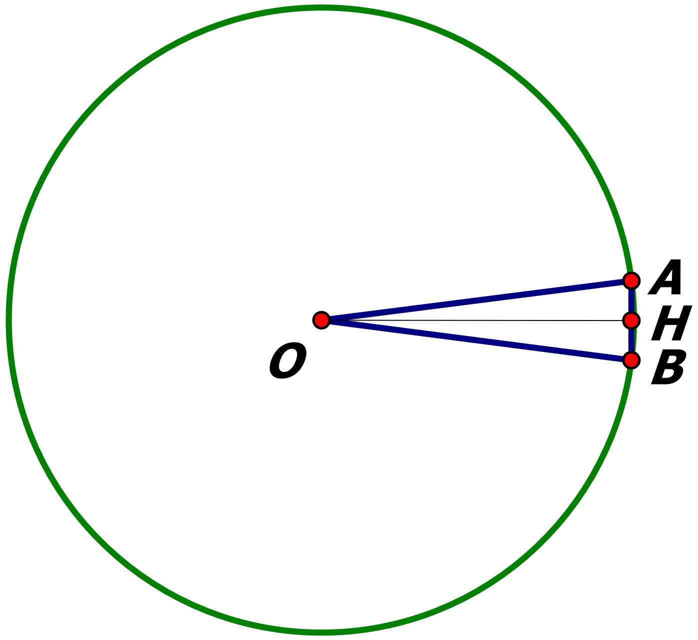
Kosinüs kuralına göre $l^2=r^2+r^2-2.r.r.\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ den

$l=r\sqrt{2\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)}=r\sqrt{2\left(1-1+2\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}=2r\sin\frac{\pi}{n}$ olarak bulunur. Çemberin içerisine çizilecek n tane OAB içgeninden |AB| uzunluklarının toplamı n.l kadar olacaktır. Çemberin çevresi n nin sonsuza gitmesi durumunda n.l değeridir.

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot 2r\sin\frac{\pi}{n}\right)=2r\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}\right)=2r\cdot\pi=2\pi r$$

olarak bulunur.

Dairenin alanı



Şekilde $m(AOB)=\frac{2\pi}{n}$ olsun $A(AOB)=\frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ dir. Çemberin içerisine çizilecek n tane OAB içgeninin alanlarının toplamı n sonsuz olması durumunda dairenin alanına eşit olacaktır. Yan dairenin alanı $\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}\right)$ olarak hesaplanır. Bu değer

$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}\right)=\frac{r^2}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{1}{n}}=\frac{r^2}{2}\cdot 2\pi=\pi r^2$ olarak bulunur.