

Örnek Problem

R'den R'ye f ve g fonksiyonları,

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x < 2 \text{ ise} \\ x-1 & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases} \text{ ve}$$

$$g(x) = \begin{cases} x-2 & x < 1 \text{ ise} \\ x+4 & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

kuralları ile verildiğinde,

R'den R'ye gof fonksiyonunun kuralı

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \text{ ise} \\ x+7 & -2 \leq x < 2 \text{ ise} \\ x+3 & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak bulunur.

Bunu siz de bulunuz.

R'den R'ye f ve gof fonksiyonları

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x < 2 \text{ ise} \\ x-1 & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases} \text{ ve}$$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \text{ ise} \\ x+7 & -2 \leq x < 2 \text{ ise} \\ x+3 & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak verildiğinde g fonksiyonunun kuralı nasıl bulunabilir?

g'nin kuralını, yönteminizi açıklayarak bulunuz.

Muharem Şahin

$$g \circ f = h$$

$$g \circ f \circ f^{-1} = h \circ f^{-1} \Rightarrow g = h \circ f^{-1}$$

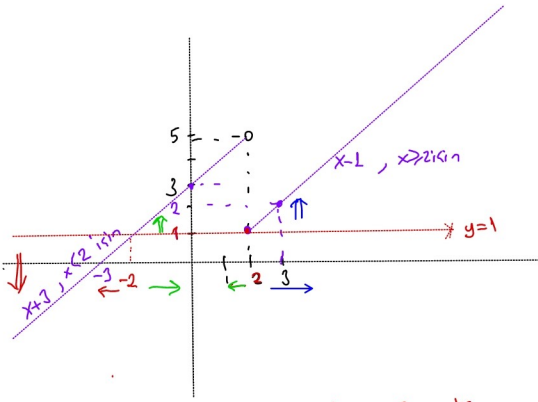
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x-3 & x-3 < 2 \Rightarrow x < 5 \\ x+1 & x+1 \geq 2 \Rightarrow x \geq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = h(f^{-1}(x))$$

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x)-1 & f^{-1}(x) < -2 \\ f^{-1}(x)+7 & -2 \leq f^{-1}(x) < 2 \\ f^{-1}(x)+3 & f^{-1}(x) \geq 2 \end{cases}$$

$$* g(f(x)) = \begin{cases} f(x)-2, & f(x) < 1 \text{ ise} \\ f(x)+4, & f(x) \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

f(x) parçası fonksiyonun grafiğini çizerek hangi x değerleri için parantezlerin bir küme veya eşit veya büyük olduğunu daha kolay görebiliriz.



f(x) < 1 ise g(x)'de birinci parçada x+3 yazılır.
 $x+3=1$
 $x=-2$
 $x < 2$ ise $g(f(x)) = f(x)-2 = x+3-2 = x+1$

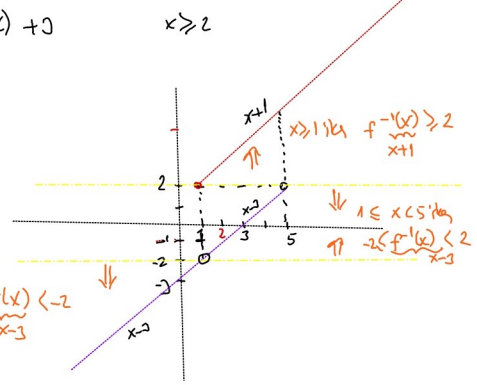
f(x)'in grafiğinde $-2 \leq x < 2$ için f(x) >= 1 olduğundan g(x)'de ikinci parçada x+3 yazılır.

$$g(f(x)) = f(x)+4 = x+3+4 = x+7$$

$x \geq 2$ için f(x)'in kuralı değişir yine $x \geq 2$ ise f(x) >= 1 olduğundan g(x)'de ikinci parçada x yerine x-1 yazılır.

$$x \geq 2 \text{ için } g(f(x)) = f(x)+4 = x-1+4 = x+3 \text{ bulunur. Toparlırsak}$$

$$g(f(x)) = \begin{cases} x+1, & x < -2 \\ x+7, & -2 \leq x < 2 \\ x+3, & x \geq 2 \end{cases}$$



$x < 1$ için $f^{-1}(x) < -2$ olduğundan h(x)'in birinci dalında x yerine x-3 kuralı yazılır.

$$g(x) = h(f^{-1}(x)) = x-3+1 = x-2$$

$1 \leq x < 5$ için $-2 \leq f^{-1}(x) < 2$ olduğundan h(x)'in ikinci dalında x yerine x-3 kuralı yazılır.

$$g(x) = h(f^{-1}(x)) = x-3+7 = x+4$$

$x \geq 5$ için $f^{-1}(x) \geq 2$ olduğundan h(x)'in üçüncü dalında x yerine x+1 kuralı yazılır.

$$x \geq 5 \text{ için } g(x) = h(f^{-1}(x)) = x+1+3 = x+4$$

$x \geq 1$ için g(x)'in kuralları aynı olduğundan

$$g(x) = \begin{cases} x-2, & x < 1 \\ x+4, & x \geq 1 \end{cases} \text{ elde edilir.}$$