TEOREM

Bir çokgenin bir düzlem üzerindeki dik iz düşümünün alanı, çokgenin alanı ile çokgenin bulunduğu düzlemle iz düşüm düzleminin ölçek açısının ölçüsünün kosinüsünün çarpımına eşittir.

P düzlemi ile E düzleminin ölçek açısının ölçüsü α, P düzlemindeki bir çokgenin alanının ölçüsü S, bu çokgenin E düzlemindeki dik iz düşümünün alanının ölçüsü S' ise $S' = S \cdot \cos\alpha$ dır.

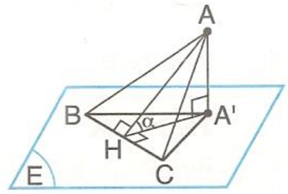
Hipotez

Çokgenin alanı S, dik iz düşümünün alanı S' ve çokgenin bulunduğu düzlemle iz düşüm düzleminin ölçek açısının ölçüsü α dır.

Hüküm

$S' = S \cdot \cos\alpha$ dır.

a. Teoremin ispatını, bir kenarı iz düşüm düzleminde olan bir üçgen için yapalım.



ABC üçgeninin iz düşüm düzleminde olan [BC] kenarına ait yüksekliği [AH] dır.

ABC üçgeninin E düzlemi üzerindeki dik iz düşümü A'BC üçgenidir.

$[AA'] \perp E$ ve $[AH] \perp [BC] \Rightarrow [A'H] \perp [BC]$ dır (üç dikme teoremi).

Buna göre A'BC üçgeninin [BC] kenarına ait yüksekliği [A'H] dır.

$[AH] \perp [BC]$ ve $[A'H] \perp [BC]$ olduğundan; $\widehat{AHA'}$, (ABC) düzlemi ile E düzleminin ölçek açısıdır. $m(\widehat{AHA'}) = \alpha$ olsun.

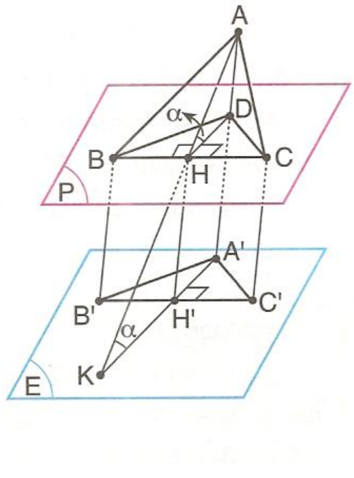
AHA' dik üçgeninde, $\cos\alpha = \dfrac{|A'H|}{|AH|} \Rightarrow |A'H| = |AH| \cdot \cos\alpha$ dır.

$A(\widehat{A'BC}) = \dfrac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |A'H| = \dfrac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AH| \cdot \cos\alpha \qquad (|A'H| = |AH| \cdot \cos\alpha)$

$= A(\widehat{ABC}) \cdot \cos\alpha$ dır $\left(\dfrac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AH| = A(\widehat{ABC})\right)$.

$A(\widehat{ABC}) = S$, $A(\widehat{A'BC}) = S'$ ile gösterilirse $S' = S \cdot \cos\alpha$ olur.

b. Teoremin ispatını, bir kenarı iz düşüm düzlemine paralel olan bir üçgen için yapalım.



ABC üçgeninin [BC] kenarı, E iz düşüm düzlemine paraleldir.

ABC üçgeninin [BC] kenarını kapsayan ve E düzlemine paralel olan P düzlemini çizelim.

$\widehat{ABC}$ nin P düzlemindeki dik iz düşümü $\widehat{DBC}$, E düzlemindeki dik iz düşümü $\widehat{A'B'C'}$ dir.

(ABC) düzlemi ile P düzleminin ölçek açısının ölçüsü $m(\widehat{AHD}) = \alpha$ ise E // P olduğundan, (ABC) düzlemi ile E düzleminin ölçek açısının ölçüsü de $m(\widehat{AKA'}) = \alpha$ dır.

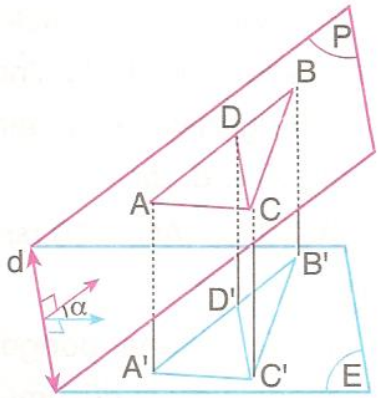
$A(\widehat{DBC}) = A(\widehat{ABC}) \cdot \cos\alpha$ dır. (1)

P // E olduğundan,

$\widehat{DBC} \cong \widehat{A'B'C'} \Rightarrow A(\widehat{DBC}) = A(\widehat{A'B'C'})$ dır. (2)

(1) ve (2) ye göre, $A(\widehat{A'B'C'}) = A(\widehat{ABC}) \cdot \cos\alpha$ dır.

c. Teoremin ispatını herhangi bir üçgen için yapalım.



ABC üçgeninin bulunduğu P düzlemi ile E iz düşüm düzleminin ara kesiti d doğrusudur.

ABC üçgeninin C köşesinden d ara kesit doğrusuna paralel olacak biçimde [CD] nı çizelim. [CD] // E olur.

P düzlemi ile E düzleminin ölçek açısının ölçüsü α dır.

Birer kenarları ([CD]) iz düşüm düzlemine paralel olan ADC ve DBC üçgenlerinin dik iz düşümleri olan A'D'C' ve D'B'C' üçgenlerinin alanları,

$$\left.\begin{aligned} A(\widehat{A'D'C'}) &= A(\widehat{ADC}) \,.\, \cos\alpha \\ A(\widehat{D'B'C'}) &= A(\widehat{DBC}) \,.\, \cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

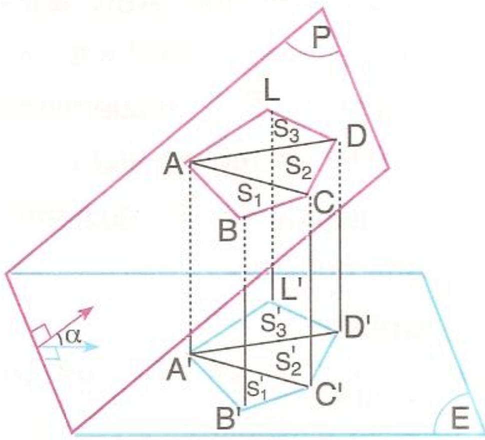
dır. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplayalım:

$$\underbrace{A(\widehat{A'D'C'}) + A(\widehat{D'B'C'})} = A(\widehat{ADC}) \,.\, \cos\alpha + A(\widehat{DBC}) \,.\, \cos\alpha$$

$$A(\widehat{A'B'C'}) = \underbrace{[A(\widehat{ADC}) + A(\widehat{DBC})]} \,.\, \cos\alpha$$

$$A(\widehat{A'B'C'}) = A(\widehat{ABC}) \,.\, \cos\alpha \text{ olur.}$$

ç. Teoremin ispatını herhangi bir çokgen için yapalım.



ABCDL çokgeninin (beşgenin) bulunduğu P düzlemi ile E iz düşüm düzleminin ölçek açısının ölçüsü α dır.

Çokgensel bölge, çokgenin bir köşesinden geçen köşegenleri çizilerek üçgensel bölgelere ayrılır. Bu üçgensel bölgelerin alanları S_1, S_2 ve S_3; iz düşümlerinin alanları S_1', S_2' ve S_3' dür.

$$\left.\begin{aligned} S_1' &= S_1 \,.\, \cos\alpha \\ S_2' &= S_2 \,.\, \cos\alpha \\ S_3' &= S_3 \,.\, \cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

Eşitlikleri taraf tarafa toplayalım.

$$S_1' + S_2' + S_3' = S_1 \,.\, \cos\alpha + S_2 \,.\, \cos\alpha + S_3 \,.\, \cos\alpha$$

$$\underbrace{S_1' + S_2' + S_3'} = \underbrace{(S_1 + S_2 + S_3)} \,.\, \cos\alpha$$

$$A(A'B'C'D'L') = A(ABCDL) \,.\, \cos\alpha \text{ olur.}$$