

Örnek Problem

1. $y = ax^2$ parabolünün, eğimlerinin farkı k olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.
2. $y = ax^2 + bx + c$ parabolünün, eğimlerinin farkı k olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

Çözüm

1. $y = ax^2$ parabolünün, eğimlerinin farkı k olan teğetlerinin denklemleri $y = mx + n$ olsun.

$y = ax^2$ parabolünün, eğimlerinin farkı k olan, $y = mx + n$ teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemi istenmektedir. Başka bir deyişle; öyle $P(x, y)$ noktaları belirlenmelidir ki, eğimleri $m_1 = m$ ve $m_2 = m - k$ olan teğetlerin $y = mx + n$ denklemlerini her m değeri için sağlasın.

$y = ax^2$ parabolü ile $y = mx + n$ doğrularının birbirlerine teğet olmaları için,

$$ax^2 = mx + n \Rightarrow ax^2 - mx - n = 0$$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır. Denklem köklerinin birbirine eşit olması

$$\Delta = m^2 + 4an = 0 \Rightarrow n = -\frac{m^2}{4a} \text{ olmasını}$$

gerektirir. n 'nin bu değeri $y = mx + n$ denkleminde yerine konulursa,

$$y = mx - \frac{m^2}{4a} \Rightarrow m^2 - 4axm + 4ay = 0 \quad (1)$$

olur.

Bu denklemi, $m_1 - m_2 = k$ koşuluyla sağlayan $P(x, y)$ noktalarının geometrik yeri istenmektedir.

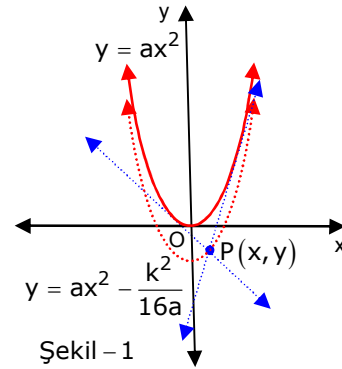
$m_1 - m_2 = k$ (2) eşitliği ile (1) denkleminden yazılabilecek $m_1 + m_2 = 4ax$ (3) eşitliğinden

$m_1 = 2ax + \frac{k}{2}$ ve $m_2 = 2ax - \frac{k}{2}$ bulunur. Bu değerler, (1) denkleminin köklerinin çarpımını veren $m_1 \cdot m_2 = 4ay$ (4) eşitliğinde yerlerine konulursa,

$$y = ax^2 - \frac{k^2}{16a} \quad (5) \text{ elde edilir.}$$

$y = ax^2$ parabolünün, eğimlerinin farkı k olan teğetlerinin kesim noktaları (5) parabolü üzerinde bulunur. Karşıt olarak; $y = ax^2$ parabolünün, (5) parabolü üzerindeki herhangi bir noktadan geçen teğetlerinin eğimlerinin farkı k kadar olur.

$y = ax^2$ parabolünün, eğimlerinin farkı k olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yeri $y = ax^2 - \frac{k^2}{16a}$ parabolüdür.



2.

$$y = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

eşitliğine göre; $y = ax^2 + bx + c$ parabolü

$$y = ax^2 \text{ parabolünün, } \vec{v} = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

vektörü ile ötelenmiş biçimindedir. Buna göre; istenen geometrik yer, 1. kısımda bulunduğumuz geometrik yerin \vec{v} ile ötelenmiş biçimi olacaktır:

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{k^2}{16a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Siz Çözünüz

1. $y = x^2$ parabolünün, eğimlerinin farkı 2 olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

(Formül kullanmayınız.)

2. $y = x^2 - 4x + 1$ parabolünün eğimlerinin farkı 4 olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

(Formül kullanmayınız.)

3. $y = x^2$ parabolünün, eğimlerinin toplamı 4 olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

4. $y = x^2 - 4x + 1$ parabolünün eğimlerinin oranı 3 olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

5. $y = x^2 - 4x + 1$ parabolünün eğimlerinin çarpımı 2 olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

6. $y = ax^2$ parabollerinin, eğimleri 2 olan teğetlerinin değme noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

7. $y = ax^2 + 2$ parabollerinin, $A(1,0)$ noktasından geçen teğetlerinin değme noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

8. $y = x^2 - kx + 1$ parabollerinin, $A(2,0)$ noktasından geçen teğetlerinin eğimlerinin çarpımı -3 olduğuna göre, değme noktalarının koordinatlarını bulunuz.

9. $y = ax^2 + bx + c$ parabollerinin, eğimlerinin çarpımı k olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

10. $y = ax^2 + bx + c$ parabollerinin, eğimlerinin oranı k olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.