

**Problem -1**

$y = x^2 - mx + 3$  parabolleri ile  
 $y = mx - 1$  doğrularından, birbirlerine  
teğet olanlarının denklemlerini bulunuz.

**Problem -2**

$y = mx + 2$  doğruları  $y = kx^2$  parabolle-  
rine teğet olduğuna göre, değme  
noktalarının geometrik yerinin denklemini  
bulunuz.

**Problem -3**

$y = x^2$  ve  $y = -x^2 + 4x - 10$  parabolle-  
rinin ortak teğetlerinin denklemlerini  
bulunuz.

**Problem -4**

$y = x^2$  ve  $y = -x^2 + 4x + k$  parabollerinin  
yalnız bir tane ortak teğeti bulunduğuna  
göre, bu teğetin denklemini bulunuz.

**Problem -5**

$m$  bir parametre olmak üzere;  
 $y = mx - m^2 + 1$  doğrularının teğet  
olduğu parabolün denklemini bulunuz.

**Problem -6**

$y = x^2 - x + k$  parabolünün başlangıç  
noktasından geçen ve birbirine dik olan  
teğetlerinin denklemlerini bulunuz.

**Problem -7**

$y = x^2 + kx + 1$  parabolü  $A(2, -1)$  nokta-  
sından dik açı altında görüldüğüne göre  $k$   
kaçtır?

**Problem -8**

$y = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$  parabolünün birbirine  
dik teğetlerinin kesim noktalarının geo-  
metrik yerinin denklemini bulunuz.

**Problem -9**

$y = x^2 + 2x + k$  parabolünün  $A(1, -1)$   
noktasından geçen teğetlerinin eğimle-  
rinin oranı  $-3$  olduğuna göre  $k$  kaçtır?

**Problem -10**

$y = x^2 + kx - 1$  parabolünün  $A(1, -2)$   
noktasından geçen teğetlerinin eğimle-  
rinin farkı  $2$  olduğuna göre  $k$  kaçtır?

**Problem -11**

$y = ax^2 + bx + c$  parabolünün, başlangıç  
noktasından geçen teğetlerinin birbirine  
dik olması için  $a$ ,  $b$  ve  $c$  kat sayılarının  
sağlaması gereken bağıntıyı bulunuz.

**Problem -12**

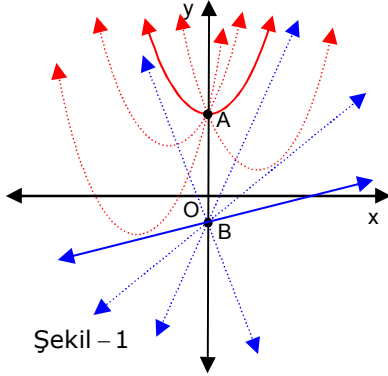
$y = ax^2 + bx + c$  parabolünün, birbirine  
dik teğetlerinin kesim noktalarının geo-  
metrik yerinin denklemini bulunuz.

**Problem -1**

$y = x^2 - mx + 3$  parabolleri ile  
 $y = mx - 1$  doğrularından, birbirlerine  
teğet olanlarının denklemlerini bulunuz.

**Çözüm**

Parabol ve doğru denklemlerinde  $m$   
parametresini yok etmek için,  $x = 0$   
konulursa; parabollerin  $A(0,3)$  noktasın-  
dan, doğruların  $B(0,-1)$  noktasından  
geçtikleri görülür.

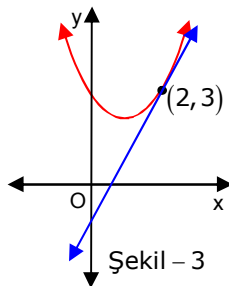
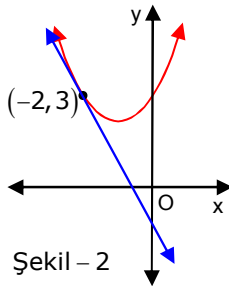


Grafiklerin birbirlerine teğet olmaları için,  
 $x^2 - mx + 3 = mx - 1 \Rightarrow x^2 - 2mx + 4 = 0$   
denkleminin kökleri birbirine eşit  
olmalıdır.

$$\Delta = m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m_1 = -2, m_2 = 2$$

$m = -2$  için parabol  $y = x^2 + 2x + 3$  ve  
teğeti  $y = -2x - 1$ ;

$m = 2$  için parabol  $y = x^2 - 2x + 3$  ve  
teğeti  $y = 2x - 1$  olur.

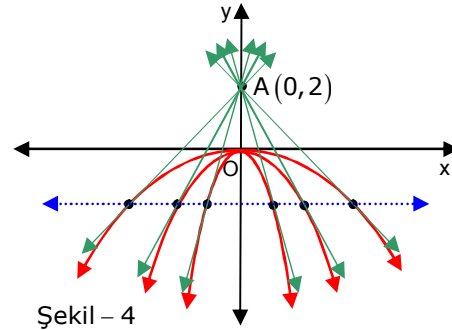


**Problem -2**

$y = mx + 2$  doğruları  $y = kx^2$  parabolle-  
rine teğet olduğuna göre, değme  
noktalarının geometrik yerinin denklemini  
bulunuz.

**Çözüm**

Tepesi başlangıç noktasında olan parabol-  
lerin  $A(0,2)$  noktasından geçen teğetle-  
rinin değme noktalarının oluşturacağı  
şeklin denklemini istemektedir.

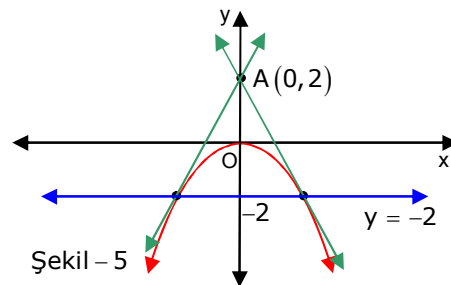


$y = kx^2$  parabolleri ile  $y = mx + 2$  doğru-  
larının birbirlerine teğet olmaları için,  
 $kx^2 = mx + 2 \Rightarrow kx^2 - mx - 2 = 0$   
denkleminin kökleri birbirine eşit  
olmalıdır.

$$\Delta = m^2 + 8k = 0 \Rightarrow k = -\frac{m^2}{8}$$

$x_1 = x_2 = \frac{m}{2k}$ ,  $k = -\frac{m^2}{8}$  ve  $y = mx + 2$   
eşitlikleri ile değme noktalarının koordi-  
natları  $P\left(-\frac{4}{m}, -2\right)$  olarak bulunur.

Geometrik yer,  $y = -2$  doğrusudur.



### Problem -3

$y = x^2$  ve  $y = -x^2 + 4x - 10$  parabollerinin ortak teğetlerinin denklemlerini bulunuz.

### Çözüm

Ortak teğetlerin birlikte denklemleri  $y = mx + n$  olsun.

$x^2 = mx + n$  ve  $-x^2 + 4x - 10 = mx + n$  denklemlerinin kökleri ayrı ayrı birbirlerine eşit olup diskriminantları sıfır olmalıdır.

$$x^2 - mx - n = 0 \quad \text{ve} \quad (1)$$

$$x^2 + (m - 4)x + n + 10 = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \Delta_1 = m^2 + 4n = 0 \quad \text{ve} \quad (3)$$

$$\Delta_2 = (m - 4)^2 - 4n - 40 = 0 \quad (4)$$

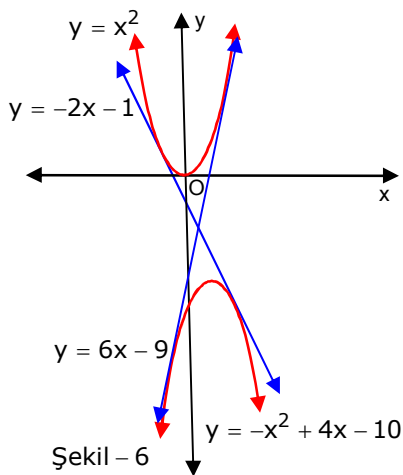
(3) ve (4)'ten,

$$(m_1, n_1) = (-2, -1) \quad \text{ve} \quad (m_2, n_2) = (6, -9)$$

bulunur.

Ortak teğetlerin denklemleri,

$$y = -2x - 1 \quad \text{ve} \quad y = 6x - 9 \quad \text{olur.}$$



### Problem -4

$y = x^2$  ve  $y = -x^2 + 4x + k$  parabollerinin yalnız bir tane ortak teğeti bulunduğuna göre, bu teğetin denklemini bulunuz.

### Çözüm

Ortak teğetlerin birlikte denklemleri  $y = mx + n$  olsun.

$x^2 = mx + n$  ve  $-x^2 + 4x + k = mx + n$  denklemlerinin kökleri ayrı ayrı birbirlerine eşit olup diskriminantları sıfır olmalıdır.

$$x^2 - mx - n = 0 \quad \text{ve} \quad (1)$$

$$x^2 + (m - 4)x + n - k = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \Delta_1 = m^2 + 4n = 0 \quad \text{ve} \quad (3)$$

$$\Delta_2 = (m - 4)^2 - 4n + 4k = 0 \quad (4)$$

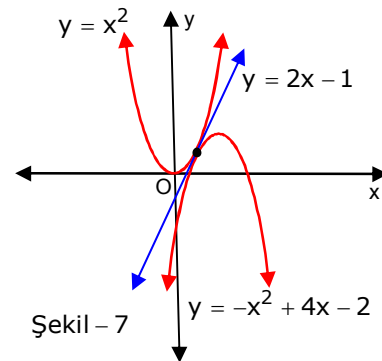
(3) ve (4)'ten,

$2m^2 - 8m + 4k + 16 = 0$  elde edilir. Yalnız bir ortak teğetin bulunması için bu denklemin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta_m = 2^2 - 8 - k = 0 \Rightarrow k = -2 \quad \text{olur.}$$

(3) ve (4)'te  $k = -2$  değeri yerlerine konulursa  $m = 2$  ve  $n = -1$  bulunur.

Ortak teğetin denklemleri,  $y = 2x - 1$  olur.



### Not

Parabollerin kolları zıt doğrultularda olduğunda yalnız bir ortak teğetin olması parabollerin teğet olmasını gerektirir.

Bu düşünce ile de çözüm yapılabilir.

### Problem -5

m bir parametre olmak üzere;  
 $y = mx - m^2 + 1$  doğrularının teğet olduğu parabolün denklemini bulunuz.

### Çözüm

$y = mx - m^2 + 1$  doğrularının teğet olduğu parabolün denklemi  $y = ax^2 + bx + c$  olsun. Bu parabolün belirtilen doğruya teğet olabilmesi için,

$$ax^2 + bx + c = mx - m^2 + 1$$
$$\Rightarrow ax^2 + (b - m)x + c + m^2 - 1 = 0$$

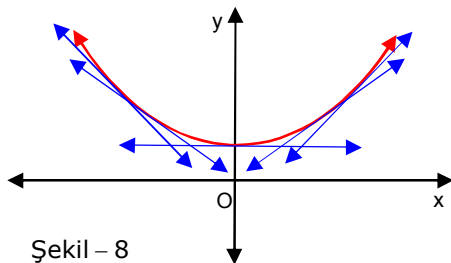
denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (b - m)^2 - 4a(c + m^2 - 1) = 0$$
$$\Rightarrow (1 - 4a)m^2 - bm + b^2 - 4ac + 4a = 0$$

Belirtilen doğrular parabole m'nin her değeri için teğet olacağından, m'nin her değeri bu son eşitliği sağlamalıdır. Öyleyse; son eşitlik, m'ye göre bir özdeşlik olmalıdır.

Özdeşliğin gerektirdiği  $1 - 4a = 0$ ,  $-b = 0$  ve  $b^2 - 4ac + 4a = 0$  eşitliklerinden  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b = 0$  ve  $c = 1$  bulunur.

Belirtilen doğruların teğet olduğu parabolün denklemi  $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$  olarak bulunur.



Bu parabole, belirtilen doğru ailesinin **zarfı** denir.

### Problem -6

$y = x^2 - x + k$  parabolünün başlangıç noktasından geçen ve birbirine dik olan teğetlerinin denklemlerini bulunuz.

### Çözüm

$y = x^2 - x + k$  parabolünün başlangıç noktasından geçen teğetlerinin denklemi  $y = mx$  olsun.

Bu parabolün  $y = mx$  doğrusuna teğet olması için,

$$x^2 - x + k = mx \Rightarrow x^2 - (m + 1)x + k = 0$$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (m + 1)^2 - 4k = 0$$
$$\Rightarrow m^2 + 2m + 1 - 4k = 0$$

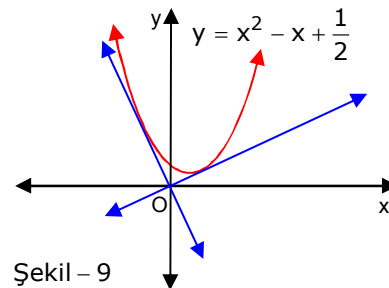
Bu son denklemin kökleri, teğetlerin eğimlerini verir. Birbirine dik olan doğruların eğimlerinin çarpımı  $-1$ 'dir. Teğetler de birbirine dik olacağına göre, bu denklemin köklerinin çarpımı  $-1$  olmalıdır.

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow 1 - 4k = -1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow m_1 = -1 - \sqrt{2} \text{ ve } m_2 = -1 + \sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

Parabolün denklemi  $y = x^2 - x + \frac{1}{2}$ ;

teğetlerin denklemleri

$$y = (-1 - \sqrt{2})x \text{ ve } y = (-1 + \sqrt{2})x \text{ olur.}$$



**Problem -7**

$y = x^2 + kx + 1$  parabolü  $A(2, -1)$  noktasından dik açı altında görüldüğüne göre  $k$  kaçtır?

**Çözüm**

" $y = x^2 + kx + 1$  parabolünün  $A(2, -1)$  noktasından dik açı altında görülmesi" demek, "parabolün grafiğinin,  $A$ 'dan geçen ve birbirine dik olan iki teğetinin arasında olması" demektir.

$A(2, -1)$  noktasından geçen doğruların eğimleri  $m$  olsun. Bu doğruların denklemi,  $y - (-1) = m(x - 2) \Rightarrow y = mx - 2m - 1$  olur.

$y = x^2 + kx + 1$  parabolü ile  $y = mx - 2m - 1$  doğrularının birbirlerine teğet olması için,  $x^2 + kx + 1 = mx - 2m - 1$

$$\Rightarrow x^2 + (k - m)x + 2m + 2 = 0$$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (k - m)^2 - 4(2m + 2) = 0$$
$$\Rightarrow m^2 - 2(k + 4)m + k^2 - 8 = 0$$

Bu son denklemin kökleri, teğetlerin eğimlerini verir. Teğetler birbirine dik olacağına göre, bu denklemin köklerinin çarpımı  $-1$  olmalıdır.

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow k^2 - 8 = -1$$
$$\Rightarrow k = -\sqrt{7} \text{ veya } k = \sqrt{7} \text{ bulunur.}$$

**Siz çözüünüz**

Bulunan  $k$  değerlerine karşılık gelen parabolere ve teğetlerinin denklemlerini, değme noktalarının koordinatlarını bulunuz.

Grafiklerini çiziniz.

**Problem -8**

$y = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$  parabolünün birbirine dik teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

**Çözüm**

$y = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$  parabolü ile  $y = mx + n$  doğrularının birbirlerine teğet olması için,  $\frac{1}{4}x^2 - x + 2 = mx + n$

$$\Rightarrow x^2 - 2(2m + 2)x - 4n + 8 = 0$$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (2m + 2)^2 + 4n - 8 = 0$$
$$\Rightarrow m^2 + 2m + n - 1 = 0$$

**Buradaki durum çok önemli!**

Bu noktada,

"Bu son denklemin kökleri, teğetlerin eğimlerini verir. Teğetler birbirine dik olacağına göre, bu denklemin köklerinin çarpımı  $-1$  olmalıdır."

" $m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow n - 1 = -1 \Rightarrow n = 0$  olur." deyip buna karşılık gelen  $m$  değerleri bulunabilirdi.

Ancak; buradan gelecek teğetlerin kesim noktası, sadece, geometrik yere ait bir nokta olurdu.

Teğetlerin kesim noktalarının değişeceği dikkate alınarak şöyle düşünülmeli:

$$\Delta = (2m + 2)^2 + 4n - 8 = 0$$

$$\Rightarrow n = -m^2 - 2m + 1$$

$n$ 'nin bu değeri  $y = mx + n$  denkleminde yerine konulursa,

$$y = mx - m^2 - 2m + 1$$

$$\Rightarrow m^2 + (2 - x)m + y - 1 = 0 \text{ olur.}$$

Bu denklemi,  $m_1 \cdot m_2 = -1$  koşuluyla, sağlayan  $P(x,y)$  noktalarının geometrik yeri istenmektedir.

$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow y-1 = -1 \Rightarrow y=0$  bulunur.  
 $y=0$  olması durumunda her  $x$  değeri için, denklemi sağlayan  $m$  değerleri bulunabileceğinden, birbirine dik teğetlerin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemi  $y=0$  olur.

### Problem -9

$y = x^2 + 2x + k$  parabolünün  $A(1, -1)$  noktasından geçen teğetlerinin eğimlerinin oranı  $-3$  olduğuna göre  $k$  kaçtır?

### Çözüm

$A(1, -1)$  noktasından geçen doğruların eğimleri  $m$  olsun. Bu doğruların denklemi,  $y - (-1) = m(x - 1) \Rightarrow y = mx - m - 1$  olur.  
 $y = x^2 + 2x + k$  parabolü ile  $y = mx - m - 1$  doğrularının birbirlerine teğet olması için,  
 $x^2 + 2x + k = mx - m - 1$

$$\Rightarrow x^2 + (2 - m)x + m + k + 1 = 0$$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (2 - m)^2 - 4(m + k + 1) = 0$$
$$\Rightarrow m^2 - 8m - 4k = 0$$

Bu son denklemin  $m_1$  ve  $m_2$  kökleri, teğetlerin eğimlerini verir.

$$\frac{m_1}{m_2} = -3 \text{ ve } m_1 + m_2 = 8 \text{ eşitliklerinden}$$

$$m_1 = -4, \quad m_2 = 12 \text{ bulunur.}$$

$$-4k = m_1 \cdot m_2 \Rightarrow -4k = -4 \cdot 12 \Rightarrow k = 12$$

olur.

### Siz çözüünüz

Bulunan  $k$  ve  $m$  değerlerine karşılık gelen grafiklerini çiziniz.

### Problem -10

$y = x^2 + kx - 1$  parabolünün  $A(1, -2)$  noktasından geçen teğetlerinin eğimlerinin farkı 2 olduğuna göre  $k$  kaçtır?

### Çözüm

$A(1, -2)$  noktasından geçen doğruların eğimleri  $m$  olsun. Bu doğruların denklemi,  $y - (-2) = m(x - 1) \Rightarrow y = mx - m - 2$  olur.

$y = x^2 + kx - 1$  parabolü ile  $y = mx - m - 2$  doğrularının birbirlerine teğet olması için,  
 $x^2 + kx - 1 = mx - m - 2$

$$\Rightarrow x^2 + (k - m)x + m + 1 = 0$$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (k - m)^2 - 4(m + 1) = 0$$
$$\Rightarrow m^2 - (k + 4)m + k^2 - 4 = 0$$

Bu son denklemin  $m_1$  ve  $m_2$  kökleri, teğetlerin eğimlerini verir.

$$m_1 - m_2 = 2, \quad m_1 + m_2 = k + 4 \text{ ve}$$

$$m_1 + m_2 = k^2 - 4 \text{ eşitliklerinden}$$

$$k_1 = -2 \text{ ve } k_2 = \frac{14}{3} \text{ bulunur.}$$

$$m_1 = -4, \quad m_2 = 12 \text{ bulunur.}$$

$$-4k = m_1 \cdot m_2 \Rightarrow -4k = -4 \cdot 12 \Rightarrow k = 12$$

olur.

### Siz çözüünüz

Bulunan  $k$  değerlerine karşılık gelen parabolere ve teğetlerinin denklemlerini, değme noktalarının koordinatlarını bulunuz.

Grafiklerini çiziniz.

### Problem -11

$y = ax^2 + bx + c$  parabolünün, başlangıç noktasından geçen teğetlerinin birbirine dik olması için  $a$ ,  $b$  ve  $c$  kat sayılarının sağlaması gereken bağıntıyı bulunuz.

### Çözüm

$y = ax^2 + bx + c$  parabolünün başlangıç noktasından geçen teğetlerinin denklemi  $y = mx$  olsun.

Bu parabolün  $y = mx$  doğrusuna teğet olması için,

$$ax^2 + bx + c = mx \Rightarrow ax^2 - (m-b)x + c = 0$$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (m-b)^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2bm + b^2 - 4ac = 0$$

Bu son denklemin kökleri, teğetlerin eğimlerini verir. Teğetler birbirine dik olacağına göre, bu denklemin köklerinin çarpımı  $-1$  olmalıdır.

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow b^2 - 4ac = -1 \text{ bulunur.}$$

$y = ax^2 + bx + c$  parabolünün, başlangıç noktasından geçen teğetlerinin birbirine dik olması için  $b^2 - 4ac = -1$  olmalıdır.

### Problem -12

$y = ax^2 + bx + c$  parabolünün, birbirine dik teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

### Çözüm

$y = ax^2 + bx + c$  parabolü ile  $y = mx + n$  doğrularının birbirlerine teğet olması için,  
 $ax^2 + bx + c = mx + n$

$$\Rightarrow ax^2 + (b-m)x + c - n = 0$$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (b-m)^2 - 4a \cdot (c-n) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2bm + b^2 + 4an - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow n = -\frac{m^2}{4a} + \frac{bm}{2a} - \frac{b^2}{4a} + c$$

$n$ 'nin bu değeri  $y = mx + n$  denkleminde yerine konulursa,

$$y = mx - \frac{m^2}{4a} + \frac{bm}{2a} - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$\Rightarrow m^2 - 2(b+2ax)m + 4ay + b^2 - 4ac = 0 \text{ olur.}$$

Bu denklemi,  $m_1 \cdot m_2 = -1$  koşuluyla, sağlayan  $P(x, y)$  noktalarının geometrik yeri istenmektedir.

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow 4ay + b^2 - 4ac = -1$$

$$\Rightarrow y = \frac{-b^2 + 4ac - 1}{4a} \text{ olur.}$$

$$y = \frac{-b^2 + 4ac - 1}{4a} \text{ olması durumunda her } x$$

değeri için, denklemi sağlayan  $m$  değerleri bulunabileceğinden, birbirine dik teğetlerin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemi

$$y = \frac{-b^2 + 4ac - 1}{4a} \text{ 'dır.}$$