

Problem -1

$y = x^2 + 2x - 1$ parabolünün y eksenini kestiği noktasındaki teğetin denklemini bulunuz.

Problem -2

$y = x^2 - 2x - 3$ parabolünün $A(4,1)$ noktasından geçen teğetlerinin denklemlerini bulunuz.

Problem -3

$y = 4x + 2$ doğrusu $y = ax^2$ parabolüne teğet olduğuna göre, değme noktasının koordinatlarını bulunuz.

Problem -4

$y = x^2$ parabolünün $y = 2x + 1$ doğrusuna paralel teğetinin denklemini ve değme noktasını bulunuz.

Problem -5

$y = x^2 + mx - 3$ parabollerinden ikisi $y = -x^2 + 6x - 5$ parabolüne teğet olduğuna göre, değme noktalarının koordinatlarını bulunuz.

Problem -6

Tepe noktası, $T(2,-4)$ olan bir parabol $y = x^2$ parabolüne teğet olduğuna göre değme noktasının koordinatlarını bulunuz.

Problem -7

$y = x^2$ ve $y = x^2 - 4x + 2$ parabollerinin ortak teğetlerinin denklemini bulunuz.

Problem -8

$y = 4x - 11$ doğrusuna $A(2,-3)$ noktasında teğet olan parabollerden biri $x = 1$ doğrusuna göre simetriktir. Bu parabolün denklemini bulunuz.

Problem -9

$y = x^2 + 2x + 3$ parabolünün $y = 2x - 1$ doğrusuna en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz.

Problem -10

$y = -2x$ doğrusunun $y = x^2 - 4x + 6$ parabolüne en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz.

Problem -11

$y = x^2$ parabolü, $y = -2x + 6$ doğrusu ile $y = 2x - 2$ doğrusunun ikisine de teğet olacak biçimde öteleniyor. İki doğruya da teğet olan parabolün denklemini bulunuz.

Problem -12

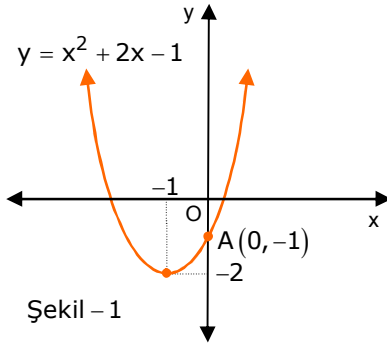
$y = 2x^2$ parabolü, tepe noktası $x - 2y = 0$ doğrusu üzerinde kalacak biçimde ötelenerek $y = 4x + 5$ doğrusuna teğet konuma getiriliyor. Değme noktasının koordinatlarını bulunuz.

Problem -1

$y = x^2 + 2x - 1$ parabolünün y eksenini kestiği noktasındaki teğetin denklemini bulunuz.

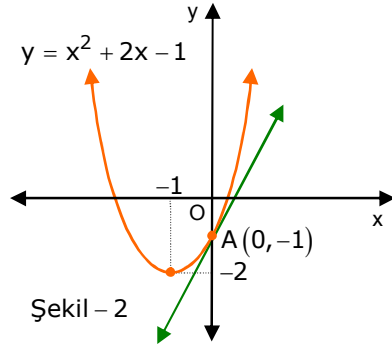
Çözüm

$x = 0$ için $y = -1$ olup parabolün y eksenini kestiği nokta $A(0, -1)$ noktasıdır.



Parabolün A noktasındaki teğetin eğimi m ise, teğetin denklemini

$$y - (-1) = m(x - 0) \Rightarrow y = mx - 1 \text{ olur.}$$



Parabol ile doğrunun birbirine teğet olması için, kesim noktalarının apsilerini veren $x^2 + 2x - 1 = mx - 1$ denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$x^2 - (m - 2)x = 0$ denkleminin kökleri eşit olduğunda, diskriminantı sıfır olur.

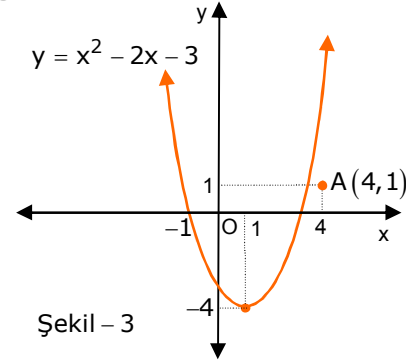
$$\Delta = (m - 2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2 \text{ olmalıdır.}$$

Teğetin denklemini, $y = 2x - 1$ bulunur.

Problem -2

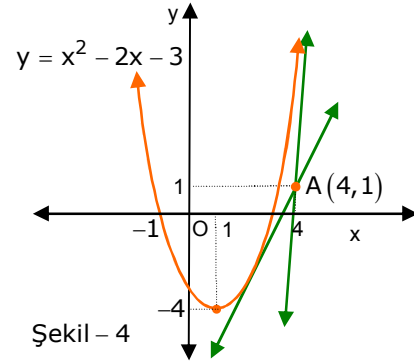
$y = x^2 - 2x - 3$ parabolünün $A(4, 1)$ noktasından geçen teğetlerinin denklemlerini bulunuz.

Çözüm



Parabolün A noktasındaki teğetlerinin eğimleri m olsun. Teğetlerin denklemini

$$y - 1 = m(x - 4) \Rightarrow y = mx - 4m + 1 \text{ olur.}$$



Grafiklerin birbirlerine teğet olmaları için, kesim noktalarının apsilerini veren

$x^2 - 2x - 3 = mx - 4m + 1$ denkleminin kökleri eşit olmalı; bunun için de $x^2 - (2 + m)x + 4m - 4 = 0$ denkleminin diskriminantı sıfır olmalıdır.

$$\Delta = (2 + m)^2 - 4(4m - 4) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 12m + 20 = 0$$

$$\Rightarrow m_1 = 2 \text{ ve } m_2 = 10 \text{ olur.}$$

Teğetlerin denklemleri $y = 10x - 39$ ve $y = 2x - 7$ olarak bulunur.

Problem -3

$y = 4x + 2$ doğrusu $y = ax^2$ parabolüne teğet olduğuna göre, değme noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

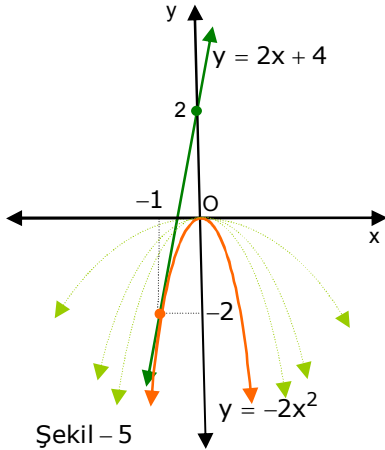
Parabol ile doğru birbirine teğet ise, kesim noktalarının apsilerini veren $ax^2 = 4x + 2$ denkleminin kökleri birbirine eşit olup diskriminantı sıfır olmalıdır.

$$ax^2 - 4x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 2^2 - a \cdot (-2) = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = -1 \text{ ve } y = -2 \text{ olur.}$$

Değme noktası $A(-1, -2)$ olarak bulunur.



Problem -4

$y = x^2$ parabolünün $y = 2x + 1$ doğrusuna paralel teğetinin denklemini ve değme noktasını bulunuz.

Çözüm

$y = 2x + 1$ doğrusuna paralel doğruların denklemleri $y = 2x + n$ biçimindedir. Bu doğrulardan, parabole teğet olanı istenmektedir.

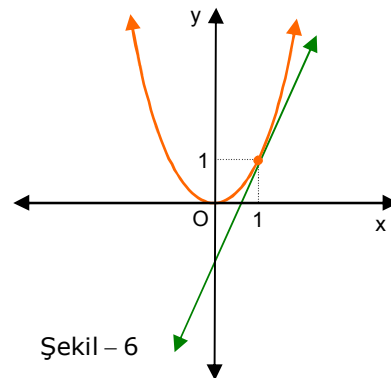
$y = x^2$ parabolünün $y = 2x + n$ doğrusuna teğet olması için, kesim noktalarının apsilerini veren $x^2 = 2x + n$ denkleminin kökleri birbirine eşit olup diskriminantı sıfır olmalıdır.

$$x^2 - 2x - n = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 1^2 - (-n) = 0 \Rightarrow n = -1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 1 \text{ ve } y = 1 \text{ olur.}$$

Teğetin denklemi $y = 2x - 1$ ve değme noktası $A(1, 1)$ olarak bulunur.



Problem -5

$y = x^2 + mx - 3$ parabollerinden ikisi
 $y = -x^2 + 6x - 5$ parabolüne teğet
olduğuna göre, değme noktalarının
koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

$y = x^2 + mx - 3$ parabolleri ile

$y = -x^2 + 6x - 5$ parabolünün birbirlerine
teğet olması için, kesim noktalarının
apsislerini veren

$x^2 + mx - 3 = -x^2 + 6x - 5$
denkleminin kökleri birbirine eşit olup
diskriminantı sıfır olmalıdır.

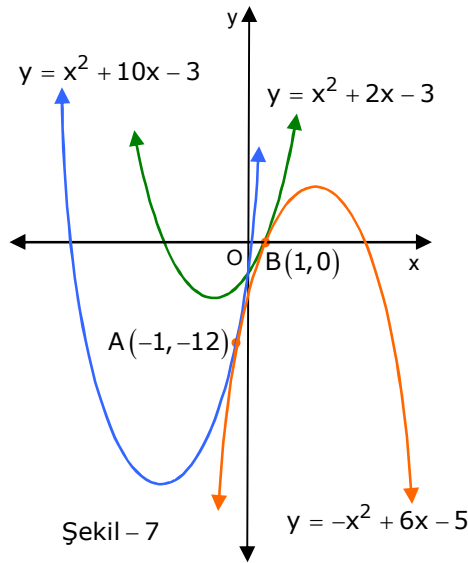
$$2x^2 + (m - 6)x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (m - 6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$$

$$\Rightarrow m_1 = 10 \text{ ve } m_2 = 2 \text{ olur.}$$

$m = 10$ için $x = -1$, $y = -12$ ve

$m = 2$ için $x = 1$, $y = 0$ olup değme
noktaları $A(-1, -12)$ ve $B(1, 0)$ olarak
bulunur.



Şekil - 7

Problem -6

Tepe noktası $T(2, -4)$ olan bir parabol
 $y = x^2$ parabolüne teğet olduğuna göre
değme noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

Tepe noktası $T(2, -4)$ olan parabollerin
denklemleri $y = a(x - 2)^2 - 4$ biçiminde-
dir.

$y = a(x - 2)^2 - 4$ parabolleri ile $y = x^2$
parabolünün birbirlerine teğet olması için,
kesim noktalarının apsislerini veren

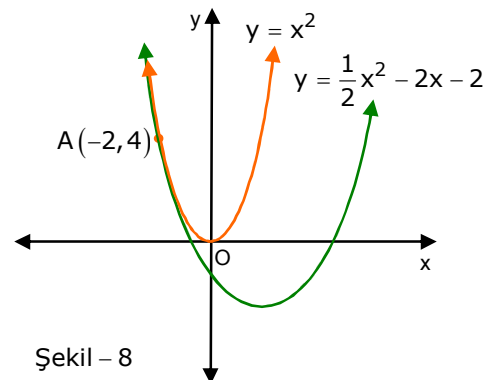
$a(x - 2)^2 - 4 = x^2$ denkleminin kökleri
birbirine eşit olup diskriminantı sıfır
olmalıdır.

$$(a - 1)x^2 - 4ax + 4a - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (2a)^2 - (a - 1) \cdot (4a - 4) = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

$a = \frac{1}{2}$ için $x = -2$, $y = 4$ olup değme
noktası $A(-2, 4)$ olarak bulunur. Teğet
parabolün denklemi de $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$
olur.



Şekil - 8

Problem -7

$y = x^2$ ve $y = x^2 - 4x + 2$ parabollerinin ortak teğetlerinin denklemini bulunuz.

Çözüm

Ortak teğetin denklemi $y = mx + n$ olsun.
 $x^2 = mx + n$ ve $x^2 - 4x + 2 = mx + n$
denklemlerinin kökleri ayrı ayrı birbirlerine eşit olup diskriminantları sıfır olmalıdır.

$$x^2 - mx - n = 0 \quad (1)$$

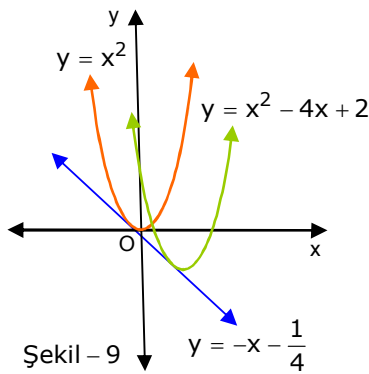
$$x^2 - (m + 4)x - n + 2 = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \Delta_1 = m^2 + 4n = 0 \quad (3)$$

$$\Delta_2 = (m + 4)^2 + 4n - 8 = 0 \quad (4)$$

(3) ve (4)'ten $m = -1$ ve $n = -\frac{1}{4}$ bulunur.

Ortak teğetin denklemi $y = -x - \frac{1}{4}$ olur.



Problem -8

$y = 4x - 11$ doğrusuna $A(2, -3)$ noktasında teğet olan parabollerden biri $x = 1$ doğrusuna göre simetriktir. Bu parabolün denklemini bulunuz.

Çözüm

Simetri eksenini $x = 1$ doğrusu olan parabolün tepe noktaları $(1, k)$ noktaları, denklemleri de $y = a(x - 1)^2 + k$ olur. İstenilen parabol, $A(2, -3)$ noktasından geçenlerden biridir:

$$-3 = a \cdot (2 - 1)^2 + k \Rightarrow k = -a - 3$$

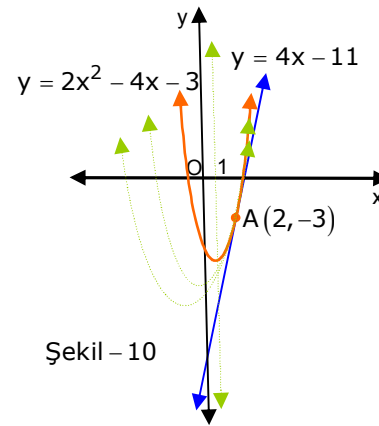
Buna göre; ilk koşullara uyan parabolün denklemi $y = ax^2 - 2ax - 3$ biçimindedir. Bu parabol $y = 4x - 11$ doğrusuna teğet olacağına göre, $ax^2 - 2ax - 3 = 4x - 11$ denkleminin köklerinin birbirine eşit olması gerekir.

$$ax^2 - 2(a + 2)x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (a + 2)^2 - 8a = 0$$

$$\Rightarrow a = 2 \quad \text{bulunur.}$$

Parabolün denklemi $y = 2x^2 - 4x - 3$ olur.



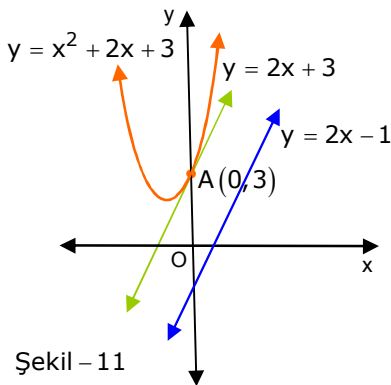
Problem -9

$y = x^2 + 2x + 3$ parabolünün $y = 2x - 1$ doğrusuna en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

Bir parabolün, kendisi ile ortak noktası bulunmayan bir doğruya en yakın noktası, o doğruya paralel teğetinin değme noktasıdır. Buna göre; $y = 2x + n$ doğrularından, $y = x^2 + 2x + 3$ parabolüne teğet olan doğrunun değme noktası istenen noktadır. Bu doğrulardan biri ile parabolün teğet olması için,

$x^2 + 2x + 3 = 2x + n \Rightarrow x^2 - n + 3 = 0$ denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır. Bu da, $n = 3$ olmasını gerektirir. $n = 3$ ise $x = 0$ ve $y = 3$ olup parabolün $y = 2x - 1$ doğrusuna en yakın noktası $A(0,3)$ olarak bulunur.



Şekil - 11

Problem -10

$y = -2x$ doğrusunun $y = x^2 - 4x + 6$ parabolüne en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

Bir doğrunun, kendisi ile ortak noktası bulunmayan bir parabole en yakın noktası, o parabolün o doğruya paralel teğetinin değme noktasından o doğruya çizilen dikmenin ayağıdır.

Önce; $y = -2x$ doğrusuna paralel olan $y = -2x + n$ doğrularından, $y = x^2 - 4x + 6$ parabolüne teğet olan doğrunun değme noktasını bulalım: Değme koşulu,

$$x^2 - 4x + 6 = -2x + n$$

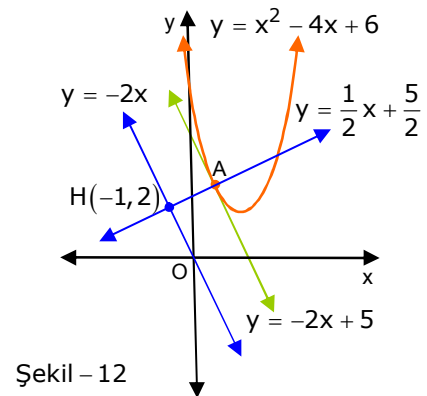
$$\Rightarrow x^2 - 2x - n + 6 = 0$$

denkleminin köklerinin birbirine eşit olmasıdır. Eşit kökler $x_1 = x_2 = 1$ ve bunlar için $y = 3$ olup değme noktası $A(1,3)$ olarak bulunur.

A'dan geçen ve $d_1 : y = -2x$ doğrusuna dik olan doğrunun denklemi,

$$d_2 : y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow d_2 : y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$d_1 \cap d_2 = (-1,2)$ olup d_1 'in parabole en yakın noktası $H(-1,2)$ olarak bulunur.



Şekil - 12

Problem -11

$y = x^2$ parabolü, $y = -2x + 6$ doğrusu ile $y = 2x - 2$ doğrusunun ikisine de teğet olacak biçimde öteleniyor. İki doğruya da teğet olan parabolün denklemini bulunuz.

Çözüm

I. yol

$d_1 : y = -2x + 6$ ile $d_2 : y = 2x - 2$ doğrusu $A(2,2)$ noktasında kesişir. $d_1 \cap d_2 = A(2,2)$

Parabolün d_1 doğrusuna paralel teğeti $y = 2x + n$ doğrularından biridir. Bu teğetin denklemini bulalım:

$x^2 = 2x + n \Rightarrow x^2 - 2x - n = 0$ denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

Eşit kökler $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = 1$ ve bunlar için $n = -1$ olup teğetin denklemi $d_3 : y = 2x - 1$ olur.

$y = x^2$ eğrisi y eksenine göre simetrik olduğundan, eğrinin eğimi -2 olan teğeti de $d_4 : y = -2x - 1$ olur.

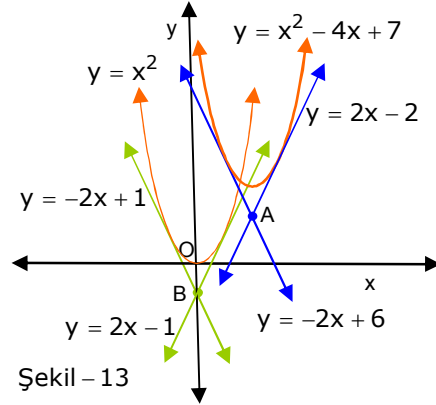
$$d_3 \cap d_4 = B(0, -1)$$

$d_1 \cup d_2$ sistemi, $d_3 \cup d_4$ sisteminin $B(0, -1)$ noktasından $A(2,2)$ noktasına ötelenmiş biçimindedir. Ötelenmiş parabolün tepe noktası $T(r,k)$ olsun.

$$(r,k) - (0,0) = (2,2) - (0,-1) \Rightarrow (r,k) = (2,3)$$

olup parabolün denklemi

$$y - 3 = (x - 2)^2 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 7 \text{ olarak bulunur.}$$



Şekil - 13

II. yol

$y = x^2$ parabolünün ötelenmiş biçiminin tepe noktası $T(r,k)$ olsun.

Ötelenmiş parabolün denklemi,

$$y = (x - r)^2 + k \Rightarrow y = x^2 - 2rx + r^2 + k \text{ olur.}$$

Bu parabolün $y = 2x - 2$ ve $y = -2x + 6$ doğrularına teğet olması istenmektedir.

$$x^2 - 2rx + r^2 + k = 2x - 2 \text{ ve} \quad (1)$$

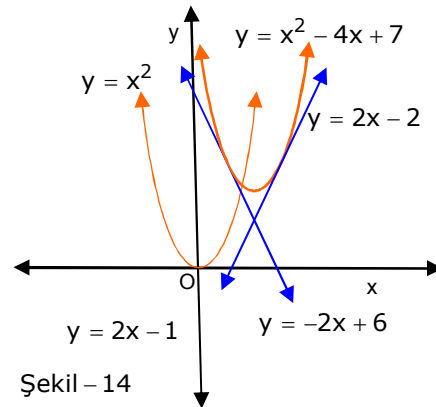
$$x^2 - 2rx + r^2 + k = -2x + 6 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \Delta_1 = (r + 1)^2 - r^2 - k - 2 = 0 \text{ ve} \quad (3)$$

$$\Delta_2 = (r - 1)^2 - r^2 - k + 6 = 0 \quad (4)$$

(3) ve (4)'ten $r = 2$ ve $k = 3$ bulunur.

Parabolün denklemi $y = x^2 - 4x + 7$ olur.



Şekil - 14

Problem -12

$y = 2x^2$ parabolü, tepe noktası $x - 2y = 0$ doğrusu üzerinde kalacak biçimde ötelenerek $y = 4x + 5$ doğrusuna teğet konuma getiriliyor. Değme noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

Parabollerin tepe noktası $x - 2y = 0$ doğrusu üzerinde olduğuna göre, koordinatları $T(2k, k)$ biçimindedir.

Bu parabollerin denklemleri

$$y - k = 2(x - 2k)^2$$

$$\Rightarrow y = 2x^2 - 8kx + 8k^2 + k$$

biçimindedir. Bu parabollerden $y = 4x + 5$ doğrusuna teğet olanının denklemini istenmektedir.

Parabol ile doğrunun kesim noktalarının apsislerini veren denklemin diskriminantı sıfıra eşitlenir:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8kx + 8k^2 + k &= 4x + 5 \\ \Rightarrow 2x^2 - 2(4k + 2)x + 8k^2 + k - 5 &= 0 \\ \Delta &= (4k + 2)^2 - 2 \cdot (8k^2 + k - 5) = 0 \\ \Rightarrow k &= -1 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu değer denklemde yerine konulursa $x_1 = x_2 = 1$; bu da $y = 2x^2 + 8x + 7$ parabol denkleminde yerine konulursa değme noktası $A(1, 17)$ olarak bulunur.

