

Problem -1

$y = x^2 - mx + 3$ parabolü ile
 $y = mx - 1$ doğrularından, birbirlerine
teğet olanlarının denklemlerini bulunuz.

Problem -2

$y = mx + 2$ doğruları $y = kx^2$ parabolle-
rine teğet olduğuna göre, değme
noktalarının geometrik yerinin denklemini
bulunuz.

Problem -3

$y = x^2$ ve $y = -x^2 + 4x - 10$ parabolle-
rinin ortak teğetlerinin denklemlerini
bulunuz.

Problem -4

$y = x^2$ ve $y = -x^2 + 4x + k$ parabolle-
rinin yalnız bir tane ortak teğeti bulunduğuna
göre, bu teğetin denklemini bulunuz.

Problem -5

m bir parametre olmak üzere;
 $y = mx - m^2 + 1$ doğrularının teğet
olduğu parabolün denklemini bulunuz.

Problem -6

$y = x^2 - x + k$ parabolünün başlangıç
noktasından geçen ve birbirine dik olan
teğetlerinin denklemlerini bulunuz.

Problem -7

$y = x^2 + kx + 1$ parabolü $A(2, -1)$ nokta-
sından dik açı altında görüldüğüne göre k
kaçtır?

Problem -8

$y = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$ parabolünün birbirine
dik teğetlerinin kesim noktalarının geo-
metrik yerinin denklemini bulunuz.

Problem -9

$y = x^2 + 2x + k$ parabolünün $A(1, -1)$
noktasından geçen teğetlerinin eğimle-
rinin oranı -3 olduğuna göre k kaçtır?

Problem -10

$y = x^2 + kx - 1$ parabolünün $A(1, -2)$
noktasından geçen teğetlerinin eğimle-
rinin farkı 2 olduğuna göre k kaçtır?

Problem -11

$y = ax^2 + bx + c$ parabolünün, başlangıç
noktasından geçen teğetlerinin birbirine
dik olması için a , b ve c kat sayılarının
sağlaması gereken bağıntıyı bulunuz.

Problem -12

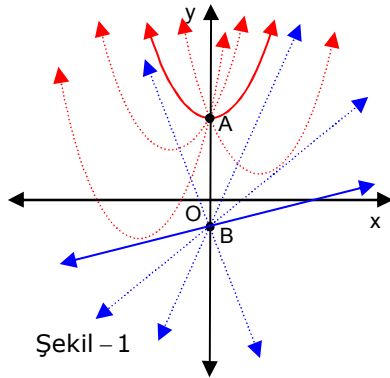
$y = ax^2 + bx + c$ parabolünün, birbirine
dik teğetlerinin kesim noktalarının geo-
metrik yerinin denklemini bulunuz.

Problem -1

$y = x^2 - mx + 3$ parabolleri ile
 $y = mx - 1$ doğrularından, birbirlerine
teğet olanlarının denklemlerini bulunuz.

Çözüm

Parabol ve doğru denklemlerinde m
parametresini yok etmek için, $x = 0$
konulursa; parabollerin $A(0,3)$ noktasın-
dan, doğruların $B(0,-1)$ noktasından
geçtikleri görülür.

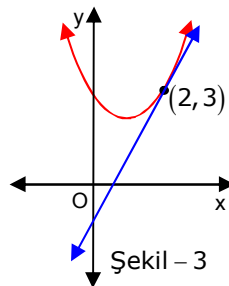
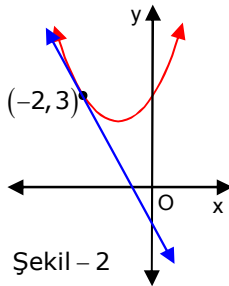


Grafiklerin birbirlerine teğet olmaları için,
 $x^2 - mx + 3 = mx - 1 \Rightarrow x^2 - 2mx + 4 = 0$
denkleminin kökleri birbirine eşit
olmalıdır.

$$\Delta = m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m_1 = -2, m_2 = 2$$

$m = -2$ için parabol $y = x^2 + 2x + 3$ ve
teğeti $y = -2x - 1$;

$m = 2$ için parabol $y = x^2 - 2x + 3$ ve
teğeti $y = 2x - 1$ olur.

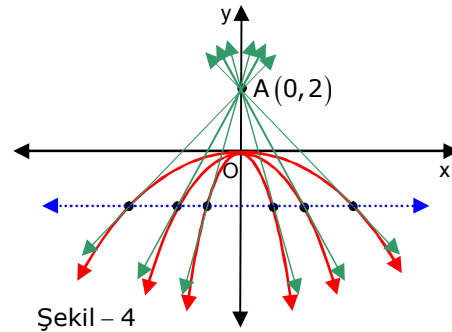


Problem -2

$y = mx + 2$ doğruları $y = kx^2$ parabolle-
rine teğet olduğuna göre, değme
noktalarının geometrik yerinin denklemini
bulunuz.

Çözüm

Tepesi başlangıç noktasında olan parabol-
lerin $A(0,2)$ noktasından geçen teğetle-
rinin değme noktalarının oluşturacağı
şeklin denklemini istemektedir.

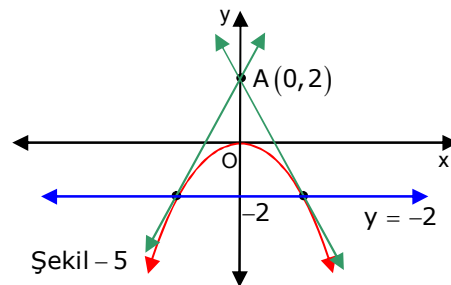


$y = kx^2$ parabolleri ile $y = mx + 2$ doğru-
larının birbirlerine teğet olmaları için,
 $kx^2 = mx + 2 \Rightarrow kx^2 - mx - 2 = 0$
denkleminin kökleri birbirine eşit
olmalıdır.

$$\Delta = m^2 + 8k = 0 \Rightarrow k = -\frac{m^2}{8}$$

$x_1 = x_2 = \frac{m}{2k}$, $k = -\frac{m^2}{8}$ ve $y = mx + 2$
eşitlikleri ile değme noktalarının koordi-
natları $P\left(-\frac{4}{m}, -2\right)$ olarak bulunur.

Geometrik yer, $y = -2$ doğrusudur.



Problem -3

$y = x^2$ ve $y = -x^2 + 4x - 10$ parabollerinin ortak teğetlerinin denklemlerini bulunuz.

Çözüm

Ortak teğetlerin birlikte denklemleri $y = mx + n$ olsun.

$x^2 = mx + n$ ve $-x^2 + 4x - 10 = mx + n$ denklemlerinin kökleri ayrı ayrı birbirlerine eşit olup diskriminantları sıfır olmalıdır.

$$x^2 - mx - n = 0 \quad \text{ve} \quad (1)$$

$$x^2 + (m - 4)x + n + 10 = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \Delta_1 = m^2 + 4n = 0 \quad \text{ve} \quad (3)$$

$$\Delta_2 = (m - 4)^2 - 4n - 40 = 0 \quad (4)$$

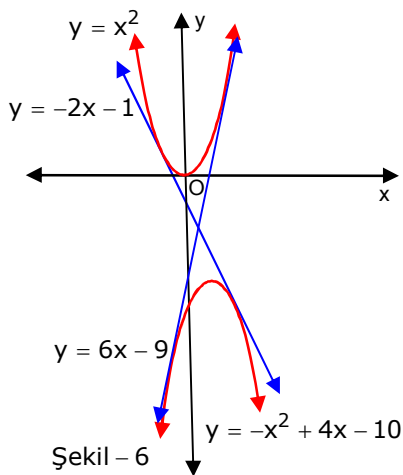
(3) ve (4)'ten,

$$(m_1, n_1) = (-2, -1) \quad \text{ve} \quad (m_2, n_2) = (6, -9)$$

bulunur.

Ortak teğetlerin denklemleri,

$$y = -2x - 1 \quad \text{ve} \quad y = 6x - 9 \quad \text{olur.}$$



Problem -4

$y = x^2$ ve $y = -x^2 + 4x + k$ parabollerinin yalnız bir tane ortak teğeti bulunduğuna göre, bu teğetin denklemini bulunuz.

Çözüm

Ortak teğetlerin birlikte denklemleri $y = mx + n$ olsun.

$x^2 = mx + n$ ve $-x^2 + 4x + k = mx + n$ denklemlerinin kökleri ayrı ayrı birbirlerine eşit olup diskriminantları sıfır olmalıdır.

$$x^2 - mx - n = 0 \quad \text{ve} \quad (1)$$

$$x^2 + (m - 4)x + n - k = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \Delta_1 = m^2 + 4n = 0 \quad \text{ve} \quad (3)$$

$$\Delta_2 = (m - 4)^2 - 4n + 4k = 0 \quad (4)$$

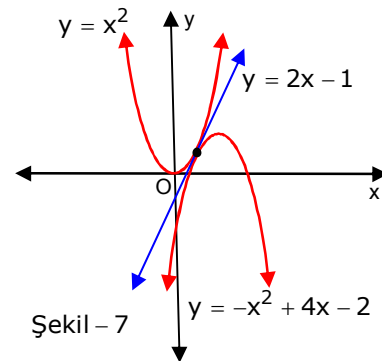
(3) ve (4)'ten,

$2m^2 - 8m + 4k + 16 = 0$ elde edilir. Yalnız bir ortak teğetin bulunması için bu denklemin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta_m = 2^2 - 8 - k = 0 \Rightarrow k = -2 \quad \text{olur.}$$

(3) ve (4)'te $k = -2$ değeri yerlerine konulursa $m = 2$ ve $n = -1$ bulunur.

Ortak teğetin denklemleri, $y = 2x - 1$ olur.



Not

Parabollerin kolları zıt doğrultularda olduğunda yalnız bir ortak teğetin olması parabollerin teğet olmasını gerektirir.

Bu düşünce ile de çözüm yapılabilir.

Problem -5

m bir parametre olmak üzere;
 $y = mx - m^2 + 1$ doğrularının teğet olduğu parabolün denklemini bulunuz.

Çözüm

$y = mx - m^2 + 1$ doğrularının teğet olduğu parabolün denklemi $y = ax^2 + bx + c$ olsun. Bu parabolün belirtilen doğruya teğet olabilmesi için,

$$ax^2 + bx + c = mx - m^2 + 1$$
$$\Rightarrow ax^2 + (b - m)x + c + m^2 - 1 = 0$$

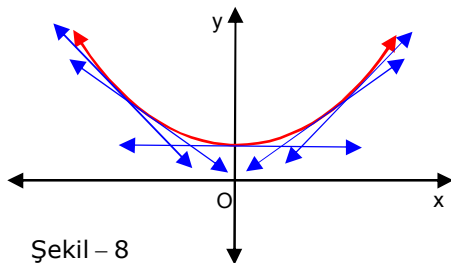
denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (b - m)^2 - 4a(c + m^2 - 1) = 0$$
$$\Rightarrow (1 - 4a)m^2 - bm + b^2 - 4ac + 4a = 0$$

Belirtilen doğrular parabole m'nin her değeri için teğet olacağından, m'nin her değeri bu son eşitliği sağlamalıdır. Öyleyse; son eşitlik, m'ye göre bir özdeşlik olmalıdır.

Özdeşliğin gerektirdiği $1 - 4a = 0$, $-b = 0$ ve $b^2 - 4ac + 4a = 0$ eşitliklerinden $a = \frac{1}{4}$, $b = 0$ ve $c = 1$ bulunur.

Belirtilen doğruların teğet olduğu parabolün denklemi $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ olarak bulunur.



Bu parabole, belirtilen doğru ailesinin **zarfı** denir.

Problem -6

$y = x^2 - x + k$ parabolünün başlangıç noktasından geçen ve birbirine dik olan teğetlerinin denklemlerini bulunuz.

Çözüm

$y = x^2 - x + k$ parabolünün başlangıç noktasından geçen teğetlerinin denklemi $y = mx$ olsun.

Bu parabolün $y = mx$ doğrusuna teğet olması için,

$$x^2 - x + k = mx \Rightarrow x^2 - (m + 1)x + k = 0$$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (m + 1)^2 - 4k = 0$$
$$\Rightarrow m^2 + 2m + 1 - 4k = 0$$

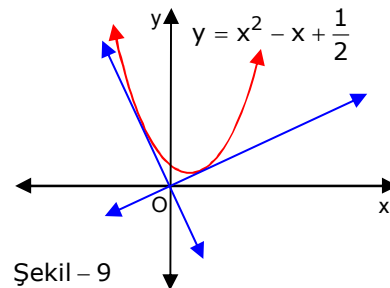
Bu son denklemin kökleri, teğetlerin eğimlerini verir. Birbirine dik olan doğruların eğimlerinin çarpımı -1 'dir. Teğetler de birbirine dik olacağına göre, bu denklemin köklerinin çarpımı -1 olmalıdır.

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow 1 - 4k = -1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow m_1 = -1 - \sqrt{2} \text{ ve } m_2 = -1 + \sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

Parabolün denklemi $y = x^2 - x + \frac{1}{2}$;

teğetlerin denklemleri

$$y = (-1 - \sqrt{2})x \text{ ve } y = (-1 + \sqrt{2})x \text{ olur.}$$



Problem -7

$y = x^2 + kx + 1$ parabolü $A(2, -1)$ noktasından dik açı altında görüldüğüne göre k kaçtır?

Çözüm

" $y = x^2 + kx + 1$ parabolünün $A(2, -1)$ noktasından dik açı altında görülmesi" demek, "parabolün grafiğinin, A 'dan geçen ve birbirine dik olan iki teğetinin arasında olması" demektir.

$A(2, -1)$ noktasından geçen doğruların eğimleri m olsun. Bu doğruların denklemi, $y - (-1) = m(x - 2) \Rightarrow y = mx - 2m - 1$ olur. $y = x^2 + kx + 1$ parabolü ile $y = mx - 2m - 1$ doğrularının birbirlerine teğet olması için,

$$x^2 + kx + 1 = mx - 2m - 1$$

$\Rightarrow x^2 + (k - m)x + 2m + 2 = 0$ denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (k - m)^2 - 4(2m + 2) = 0$$
$$\Rightarrow m^2 - 2(k + 4)m + k^2 - 8 = 0$$

Bu son denklemin kökleri, teğetlerin eğimlerini verir. Teğetler birbirine dik olacağına göre, bu denklemin köklerinin çarpımı -1 olmalıdır.

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow k^2 - 8 = -1$$
$$\Rightarrow k = -3 \text{ veya } k = 3 \text{ bulunur.}$$

Siz çözünüz

Bulunan k değerlerine karşılık gelen parabolere ve teğetlerinin denklemlerini, değme noktalarının koordinatlarını bulunuz.

Grafiklerini çiziniz.

Problem -8

$y = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$ parabolünün birbirine dik teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

Çözüm

$y = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$ parabolü ile $y = mx + n$ doğrularının birbirlerine teğet olması için,

$$\frac{1}{4}x^2 - x + 2 = mx + n$$

$$\Rightarrow x^2 - 2(2m + 2)x - 4n + 8 = 0$$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (2m + 2)^2 + 4n - 8 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 2m + n - 1 = 0$$

Buradaki durum çok önemli!

Bu noktada,

"Bu son denklemin kökleri, teğetlerin eğimlerini verir. Teğetler birbirine dik olacağına göre, bu denklemin köklerinin çarpımı -1 olmalıdır."

" $m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow n - 1 = -1 \Rightarrow n = 0$ olur." deyip buna karşılık gelen m değerleri bulunabilirdi.

Ancak; buradan gelecek teğetlerin kesim noktası, sadece, geometrik yere ait bir nokta olurdu.

Teğetlerin kesim noktalarının değişeceği dikkate alınarak şöyle düşünülmeli:

$$\Delta = (2m + 2)^2 + 4n - 8 = 0$$

$$\Rightarrow n = -m^2 - 2m + 1$$

n 'nin bu değeri $y = mx + n$ denkleminde yerine konulursa,

$$y = mx - m^2 - 2m + 1$$

$$\Rightarrow m^2 + (2 - x)m + y - 1 = 0 \text{ olur.}$$

Bu denklemi, $m_1 \cdot m_2 = -1$ koşuluyla, sağlayan $P(x,y)$ noktalarının geometrik yeri istenmektedir.

$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow y-1 = -1 \Rightarrow y=0$ bulunur. $y=0$ olması durumunda her x değeri için, denklemi sağlayan m değerleri bulunabileceğinden, birbirine dik teğetlerin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemi $y=0$ olur.

Problem -9

$y = x^2 + 2x + k$ parabolünün $A(1, -1)$ noktasından geçen teğetlerinin eğimlerinin oranı -3 olduğuna göre k kaçtır?

Çözüm

$A(1, -1)$ noktasından geçen doğruların eğimleri m olsun. Bu doğruların denklemi, $y - (-1) = m(x - 1) \Rightarrow y = mx - m - 1$ olur. $y = x^2 + 2x + k$ parabolü ile $y = mx - m - 1$ doğrularının birbirlerine teğet olması için, $x^2 + 2x + k = mx - m - 1$

$$\Rightarrow x^2 + (2 - m)x + m + k + 1 = 0$$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (2 - m)^2 - 4(m + k + 1) = 0 \\ \Rightarrow m^2 - 8m - 4k = 0$$

Bu son denklemin m_1 ve m_2 kökleri, teğetlerin eğimlerini verir.

$$\frac{m_1}{m_2} = -3 \text{ ve } m_1 + m_2 = 8 \text{ eşitliklerinden}$$

$$m_1 = -4, \quad m_2 = 12 \text{ bulunur.}$$

$$-4k = m_1 \cdot m_2 \Rightarrow -4k = -4 \cdot 12 \Rightarrow k = 12 \text{ olur.}$$

Siz çözüünüz

Bulunan k ve m değerlerine karşılık gelen grafiklerini çiziniz.

Problem -10

$y = x^2 + kx - 1$ parabolünün $A(1, -2)$ noktasından geçen teğetlerinin eğimlerinin farkı 2 olduğuna göre k kaçtır?

Çözüm

$A(1, -2)$ noktasından geçen doğruların eğimleri m olsun. Bu doğruların denklemi, $y - (-2) = m(x - 1) \Rightarrow y = mx - m - 2$ olur.

$y = x^2 + kx - 1$ parabolü ile $y = mx - m - 2$ doğrularının birbirlerine teğet olması için, $x^2 + kx - 1 = mx - m - 2$

$$\Rightarrow x^2 + (k - m)x + m + 1 = 0$$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (k - m)^2 - 4(m + 1) = 0 \\ \Rightarrow m^2 - (k + 4)m + k^2 - 4 = 0$$

Bu son denklemin m_1 ve m_2 kökleri, teğetlerin eğimlerini verir.

$$m_1 - m_2 = 2, \quad m_1 + m_2 = k + 4 \text{ ve}$$

$$m_1 + m_2 = k^2 - 4 \text{ eşitliklerinden}$$

$$k_1 = -2 \text{ ve } k_2 = \frac{14}{3} \text{ bulunur.}$$

$$m_1 = -4, \quad m_2 = 12 \text{ bulunur.}$$

$$-4k = m_1 \cdot m_2 \Rightarrow -4k = -4 \cdot 12 \Rightarrow k = 12 \text{ olur.}$$

Siz çözüünüz

Bulunan k değerlerine karşılık gelen parabolere ve teğetlerinin denklemlerini, değme noktalarının koordinatlarını bulunuz.

Grafiklerini çiziniz.

Problem -11

$y = ax^2 + bx + c$ parabolünün, başlangıç noktasından geçen teğetlerinin birbirine dik olması için a , b ve c kat sayılarının sağlaması gereken bağıntıyı bulunuz.

Çözüm

$y = ax^2 + bx + c$ parabolünün başlangıç noktasından geçen teğetlerinin denklemi $y = mx$ olsun.

Bu parabolün $y = mx$ doğrusuna teğet olması için,

$$ax^2 + bx + c = mx \Rightarrow ax^2 - (m-b)x + c = 0$$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (m-b)^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2bm + b^2 - 4ac = 0$$

Bu son denklemin kökleri, teğetlerin eğimlerini verir. Teğetler birbirine dik olacağına göre, bu denklemin köklerinin çarpımı -1 olmalıdır.

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow b^2 - 4ac = -1 \text{ bulunur.}$$

$y = ax^2 + bx + c$ parabolünün, başlangıç noktasından geçen teğetlerinin birbirine dik olması için $b^2 - 4ac = -1$ olmalıdır.

Problem -12

$y = ax^2 + bx + c$ parabolünün, birbirine dik teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

Çözüm

$y = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = mx + n$ doğrularının birbirlerine teğet olması için,
 $ax^2 + bx + c = mx + n$

$$\Rightarrow ax^2 + (b-m)x + c - n = 0$$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\Delta = (b-m)^2 - 4a \cdot (c-n) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2bm + b^2 + 4an - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow n = -\frac{m^2}{4a} + \frac{bm}{2a} - \frac{b^2}{4a} + c$$

n 'nin bu değeri $y = mx + n$ denkleminde yerine konulursa,

$$y = mx - \frac{m^2}{4a} + \frac{bm}{2a} - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$\Rightarrow m^2 - 2(b+2ax)m + 4ay + b^2 - 4ac = 0 \text{ olur.}$$

Bu denklemi, $m_1 \cdot m_2 = -1$ koşuluyla, sağlayan $P(x, y)$ noktalarının geometrik yeri istenmektedir.

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow 4ay + b^2 - 4ac = -1$$

$$\Rightarrow y = \frac{-b^2 + 4ac - 1}{4a} \text{ olur.}$$

$$y = \frac{-b^2 + 4ac - 1}{4a} \text{ olması durumunda her } x$$

değeri için, denklemi sağlayan m değerleri bulunabileceğinden, birbirine dik teğetlerin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemi

$$y = \frac{-b^2 + 4ac - 1}{4a} \text{ 'dır.}$$