

Problem -1

$n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$\sqrt[n]{1+n} = 1 + f(n)$ olsun.

$f(n) \geq 0$ olacağı açıktır.

$$\sqrt[n]{1+n} = 1 + f(n) \Rightarrow 1+n = [1+f(n)]^n$$

sağ tarafı Binom Teoremine göre açalım:

$$1+n = 1+n \cdot f(n) + \frac{n(n+1)}{2!} \cdot [f(n)]^2 + \dots$$

$$\Rightarrow 1+n \geq 1 + \frac{n(n+1)}{2} \cdot [f(n)]^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq [f(n)]^2 \leq \frac{2n}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [f(n)]^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [f(n)]^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} [f(n)]^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+n} = 1 \text{ bulunur.}$$

Bu sonucu problemimizin çözümünde kullanalım:

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{1+n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (1)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+n}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

elde edilir.

Problem -2

$x \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\left(\frac{1}{x}\right)} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

1. yol

$n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere,

$n \leq x \leq n+1$ olsun.

Her n değeri için,

$\sqrt[n]{n} > 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ olması,

en azından n 'nin büyük değerleri için,

$$(n+1)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \leq x^{\frac{1}{x}} \leq n^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

sıralamasını yapmamıza olanak verir.

$$(n+1)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \leq x^{\frac{1}{x}} \leq n^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ elde edilir.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$y = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

Buradaki, $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği türevle giderilir:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = e^0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ bulunur.}$$

Problem -3

$x \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$x = \frac{1}{t}$ dönüşümü yapalım.

x , 0'a sağdan yaklaşırken

t , $+\infty$ 'a ıraksayacaktır.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{\left(\frac{1}{t}\right)}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} t^{\left(\frac{1}{t}\right)}}$$

Problem-2'nin sonucunu kullanarak;

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \frac{1}{1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$$

elde edilir.

2. yol

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = L$ deyip $x = 2t$ dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x &= L \\ \Rightarrow L &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (2t)^{2t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (2^{2t} \cdot t^{2t}) \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} 4^t\right) \cdot \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} t^t\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L = 1 \cdot L^2$$

$$\Rightarrow L = 0 \text{ veya } L = 1 \text{ bulunur.}$$

$0 < m < n < 1$ iken $m^m > n^n$ olur.

O halde;

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1 \text{ olmalıdır.}$$

3. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Buradaki, $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği türevle giderilir:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = e^0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^x = 1 \text{ bulunur.}$$

Problem -4

$x \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

Burada bir belirsizlik yoktur.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = (+\infty) \cdot (-\infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

olur.

Problem -5

$x \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 + x \cdot \ln x}{x} \right) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln(x^x)}{x} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 + \ln(x^x) \right] \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) &= 1 \cdot +\infty \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) &= +\infty \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 + x \cdot \ln x}{x} \right)$$

Burada, L'Hospital kuralını doğrudan uygulayamayız. Çünkü; belirsizlik, $\frac{0}{0}$ ya

da $\frac{\infty}{\infty}$ biçiminde değildir. Kesrin payında $0 \cdot \infty$ belirsizliği vardır. Dolayısıyla; uzatmadan, çözümü "1. yol" daki gibi tamamlamak daha uygun olur.

Problem -6

$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 1)$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$x - 1 = t$ dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 1) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t \cdot \ln(t^2 + 2t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln \left[t^t \cdot (t + 2)^t \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t^t + \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t + 2)^t \\ &= \ln \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} t^t \right) + \ln \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} (t + 2)^t \right) \\ &= 0 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \cdot \ln(x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x^2 - 1)}{\frac{1}{x - 1}} = L$$

Burada, $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$L = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}}{\frac{-1}{(x - 1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x \cdot (x - 1)}{x + 1} = 0$$

Problem -7

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{2x^2}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ diyelim:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)}{2x^2};$$

$2 \sin^2 \frac{x}{2} = t$ dönüşümü yaparsak,

$x = 2 \cdot \text{Arcsin} \sqrt{\frac{t}{2}}$ olur.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)}{2x^2}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-t)}{8 \cdot \left(\text{Arcsin} \sqrt{\frac{t}{2}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow L = L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot \frac{1}{t} \cdot \ln(1-t)}{8 \cdot \left(\text{Arcsin} \sqrt{\frac{t}{2}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{8 \cdot \left(\text{Arcsin} \sqrt{\frac{t}{2}}\right)^2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \ln\left[(1-t)^{\frac{1}{t}}\right]$$

Soldaki limit için $u = \text{Arcsin} \sqrt{\frac{t}{2}}$ dönüşümü yaparsak, $t = 2 \sin^2 u$ olur.

$$\Rightarrow L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 u}{8 \cdot u^2} \cdot \ln \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1-t)^{\frac{1}{t}}\right]$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{4} \cdot \ln(e^{-1})$$

$$\Rightarrow L = -\frac{1}{4} \quad \text{bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{4x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{4 \cos x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{2x^2} = -\frac{1}{4} \quad \text{bulunur.}$$

Problem -8

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{\cos x}$ değerini bulunuz.

Çözüm**1. yol**

$x - \frac{\pi}{2} = t$ diyelim.

$$y = t^{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)} \Rightarrow \ln y = \cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) \cdot \ln t$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-\sin t \cdot \ln t)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{-\sin t}{t} \cdot t \cdot \ln t\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t^t$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln y = -1 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{\cos x} = 1 \text{ bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$x - \frac{\pi}{2} = t$ diyelim.

$$y = t^{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}$$

$$\Rightarrow \ln y = \cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) \cdot \ln t$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-\sin t \cdot \ln t)$$

Burada, $0 \cdot \infty$ belirsizliği vardır.

$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürelim:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{-\ln t}{\frac{1}{\sin t}}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{-\frac{1}{t}}{\frac{-\cos t}{\sin^2 t}}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{\cos t} = 1 \cdot 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{\cos x} = 1 \text{ bulunur.}$$

Problem -9

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ değerini bulunuz.

Çözüm**1. yol**

$e^x = t$ dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - \frac{1}{t}}{\ln t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1) \cdot (t+1)}{t \cdot \ln t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t+1)}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{t-1} \cdot \ln t} \\ &= 2 \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\ln(1+t) \frac{1}{t-1}} \\ &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Problem -10

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$ değerini bulunuz.

Çözüm**1. yol**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \end{aligned}$$

$e^x - 1 = t$ dönüşümü yapalım:

$x = \ln(1+t)$ olur.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{t} \cdot \ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+t) \frac{1}{t}} \\ &= \frac{1}{\ln e} \\ &= 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} &= 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Problem -11

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ değerini bulunuz.

Çözüm**1. yol**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} \end{aligned}$$

$e^x = t$ dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - \frac{1}{t}}{\ln t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1) \cdot (t+1)}{t \cdot \ln t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t+1)}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{t-1} \cdot \ln t} \\ &= 2 \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\ln(1+t-1) \frac{1}{t-1}} \\ &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Problem -12

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\ln(x^2-1)}$ değerini bulunuz.

Çözüm

Bir belirsizlik yoktur. $\left(\frac{0^+}{-\infty} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\ln(x^2-1)} = 0$$

Problem -13

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)}$ değerini bulunuz.

Çözüm**1. yol**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x-1) + \ln(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 + \frac{\ln(x+1)}{\ln(x-1)}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\ln 2}{-\infty}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{2x}{x^2-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{2x} \\ &= 1\end{aligned}$$

Problem -14

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\ln x}$ değerini bulunuz.

Çözüm**1. yol**

$1-\sqrt{x} = t$ dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\ln x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1-t)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cdot \ln(1-t) \cdot \frac{1}{t}} \\ &= -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Problem -15

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - 1}{\tan x}$ değerini bulunuz.

Çözüm**1. yol**

$e^{\tan x} - 1 = t$ dönüşümü yapalım.

$\tan x = \ln(1+t)$ olur.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - 1}{\tan x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+t) \cdot \frac{1}{t}} \\ &= 1 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - 1}{\tan x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} \cdot (1 + \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (e^{\tan x}) \\ &= 1 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Problem -16

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\tan x}$ değerini bulunuz.

Çözüm**1. yol**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{x} \cdot \frac{x}{\tan x} \right) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}}_1 \end{aligned}$$

$e^{2x} - 1 = t$ dönüşümü yapalım.

$$x = \frac{1}{2} \cdot \ln(1+t) \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{1}{2} \cdot \ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{\ln(1+t) \frac{1}{t}} \\ &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot e^{2x}}{1 + \tan^2 x} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\tan x} &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Problem -17

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{\tan x}$ değerini bulunuz.

Çözüm**1. yol**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{4x} - e^{3x}}{x} \cdot \frac{x}{\tan x} \right) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{x} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}}_1 \end{aligned}$$

$e^x = t$ dönüşümü yaparsak $x = \ln t$ olur.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 - t^3}{\ln t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3}{\ln t \left(\frac{1}{t-1} \right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3}{\ln(1+t-1) \left(\frac{1}{t-1} \right)} \\ &= \frac{1}{\ln e} \\ &= 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot e^{4x} - 3 \cdot e^{3x}}{1 + \tan^2 x} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{\tan x} &= 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Problem -18

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \cos \pi x}{1 - x^2}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \cos \pi x}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1 + 1 + \cos \pi x}{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \cos \pi x}{1 - x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{1 - x^2} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{1 - x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{1 + x} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cos^2 \frac{\pi}{2} x}{1 - x^2}$$

$$= \frac{-1}{2} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} x \right)}{1 - x^2}$$

$$= \frac{-1}{2} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} x \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} x \right) \cdot \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} \cdot (1 - x) \cdot (1 + x)}$$

$$= \frac{-1}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{0 \cdot \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$= \frac{-1}{2} \text{ bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \cos \pi x}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \pi \cdot \sin \pi x}{-2x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \cos \pi x}{1 - x^2} = \frac{-1}{2} \text{ bulunur.}$$

Problem -19

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{4x - \pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{4}}{4 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ bulunur.}$$

Problem -20

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{6x^2}$ değerini bulunuz.

Çözüm**1. yol**

$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ eşitliğini kullanalım:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{6x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)}{6x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)}{6x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \left(2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)^2}{6x^2 \cdot \left(2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)^2} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{6x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{6x^2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{x^4}{16} \\ &= 0 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{6x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x) \cdot \sin x}{12 \cdot x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{12} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\ &= 0 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Problem -21

$\lim_{x \rightarrow y} \frac{\cos x - \cos y}{x - y}$ değerini bulunuz.

Çözüm**1. yol**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow y} \frac{\cos x - \cos y}{x - y} &= \lim_{x \rightarrow y} \frac{-2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2\left(\frac{x-y}{2}\right)} \\ &= -\sin y \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

x 'e göre türev alınır:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow y} \frac{\cos x - \cos y}{x - y} &= \lim_{x \rightarrow y} \frac{-\sin y}{1} \\ &= -\sin y \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Problem -22

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2x}{x + \sin x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2x}{x + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{x} + 2}{1 + \frac{\sin x}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} (2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (1) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} \end{aligned}$$

L_1 için, $e^x = t$ dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - \frac{1}{t}}{\ln t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1) \cdot (t+1)}{t \cdot \ln t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t+1)}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{t-1} \cdot \ln t} \\ &= 2 \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\ln(1+t-1) \frac{1}{t-1}} \\ &= 2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2x}{x + \sin x} &= \frac{2+2}{1+1} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2x}{x + \sin x} &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2x}{x + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} + 2}{1 + \cos x} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2x}{x + \sin x} &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Problem -23

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$ değerini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{1 - \cos x} \cdot \sqrt{1 + \cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{\sin^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sqrt{1 + \cos x}}{|\sin x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \cdot \sqrt{1 + \cos x}}{-\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sqrt{1 + \cos x}) \\ &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Problem -24

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \sin x}} \text{ değerini bulunuz.}$$

Çözüm

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \sin x}} &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x \cdot \sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{1 - \sin x} \cdot \sqrt{1 + \sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x \cdot \sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x \cdot \sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{\cos^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x \cdot \sqrt{1 + \sin x}}{|\cos x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \sqrt{1 + \sin x}}{-\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} (-2 \cdot \sin x \cdot \sqrt{1 + \sin x}) \\ &= -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Problem -25

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \cdot \sin 2x} \text{ değerini bulunuz.}$$

Çözüm**1. yol**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \cdot \sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left\{ 1 - \left[1 - 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right] \right\} \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \cdot 4 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x}{2} \right) \cdot \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \cdot 4 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x}{2} \right) \cdot \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x)}{4 \cdot x \cdot \cos \left(\frac{x}{2} \right) \cdot \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right) \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x)}{\left(\frac{x}{2} \right) \cdot 4 \cdot \cos \left(\frac{x}{2} \right) \cdot \cos x} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \cdot \sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x \cdot \sin x}{\sin 2x + x \cdot 2 \cos 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x}{2 \cos x + \frac{x}{\sin x} \cdot 2 \cos 2x} \\ &= \frac{3}{4} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Problem -26

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{x+a} - \cos \sqrt{x})$ değerini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{x+a} - \cos \sqrt{x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-2 \sin \frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}{2} \cdot \sin \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}}{2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-2 \sin \frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}{2} \cdot \sin \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+a} + \sqrt{x})}{2(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-2 \sin \frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}{2} \cdot \sin \frac{a}{2(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-2 \sin \frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}{2} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{a}{2(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})} \\ &= \ell \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Problem -27

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$ değerini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos x - \sin x}{x^3 \cdot \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2 \cdot \cos x} \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x^2 \cdot \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{x}{2} \right)}{2 \cdot \frac{x}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \cos x} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

Problem -28

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x^2)}}{1 - \cos x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x^2)}}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 \cdot \sin^2 \left(\frac{x^2}{2} \right)}}{2 \cdot \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \cdot \left| \sin \left(\frac{x^2}{2} \right) \right|}{2 \cdot \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{x^2}{2} \right) \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

bulunur.

Problem -29

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$e^x = t$ dönüşümü yapalım:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - \frac{1}{t} - 2 \ln t}{(\ln t)^3} = L$$

Bir de $\sqrt{t} = u$ dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - \frac{1}{t} - 2 \ln t}{(\ln t)^3} \\ \Rightarrow L &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2 - \frac{1}{u^2} - 4 \ln u}{8 \cdot (\ln u)^3} \\ \Rightarrow L &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2 - \frac{1}{u^2} - 2u + \frac{2}{u} + 2u - \frac{2}{u} - 4 \ln u}{8 \cdot (\ln u)^3} \\ \Rightarrow L &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\left(u - \frac{1}{u}\right) \left(u + \frac{1}{u} - 2\right)}{8 \cdot (\ln u)^3} \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u - \frac{1}{u} - 2 \ln u}{(\ln u)^3} \\ \Rightarrow L &= \frac{(u+1) \cdot (u-1)^3}{8 \cdot u^2 \cdot (\ln u)^3} + \frac{1}{4} \cdot L \\ \Rightarrow L &= \frac{u+1}{8 \cdot u^2 \cdot \left[\ln(1+u-1) \frac{1}{u-1}\right]^3} + \frac{1}{4} \cdot L \\ \Rightarrow L &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot L \\ \Rightarrow L &= \frac{1}{3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{6} \\ &= \frac{1}{3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Problem -30

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$\sin x = 3 \sin \frac{x}{3} - 4 \sin^3 \frac{x}{3}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3 \sin \frac{x}{3} + 4 \sin^3 \frac{x}{3}}{x^3} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3 \sin \frac{x}{3}}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3 \frac{x}{3}}{x^3} \end{aligned}$$

Eşitliğin soluna L deyip sağındaki ilk terimde de $x = 3t$ dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3 \sin \frac{x}{3}}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3 \frac{x}{3}}{x^3} \\ \Rightarrow L &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - 3 \sin t}{27 \cdot t^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3 \frac{x}{3}}{27 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^3} \\ \Rightarrow L &= \frac{1}{9} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} + \frac{4}{7} \\ \Rightarrow L &= \frac{1}{9} \cdot L + \frac{4}{7} \\ \Rightarrow L &= \frac{1}{6} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

2. yol

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = L$ deyip $x = 2t$ dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \\ \Rightarrow L &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t - \sin 2t}{8t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t - 2\sin t \cdot \cos t}{8t^3} \\ \Rightarrow L &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t + \sin t - \sin t \cdot \cos t}{4t^3} \\ \Rightarrow L &= \frac{1}{4} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cdot (1 - \cos t)}{4t^3} \\ \Rightarrow L &= \frac{1}{4} \cdot L + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cdot 2\sin \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2}}{4t^3} \\ \Rightarrow L &= \frac{1}{4} \cdot L + \frac{1}{8} \\ L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

3. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} \\ &= \frac{1}{6} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Problem -31

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}}_{L_1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x^3}{x - \sin x}}_{L_2} \end{aligned}$$

Problem-28'de $L_1 = \frac{1}{3}$ ve Problem-29'da

$L_2 = 6$ olduğunu bulmuştuk.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} &= L_1 \cdot L_2 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} &= 2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} \\ &= 2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Problem -32

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x/2} - e^{-x/2})^2 - x^2}{x^4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\sin^2 x - x^2}$$

Eşitliğin sağındaki ilk terimde $x = 2t$ dönüşümü yapıp işlemin dağılma özelliğini uygulayalım:

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e^t - e^{-t})^2 - 4t^2}{16 \cdot t^4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\sin^2 x - x^2}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - e^{-t} - 2t}{t^3} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - e^{-t} + 2t}{16 \cdot t} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x - x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x + x}$$

Problem-28'den $L_1 = \frac{1}{3}$,

Problem-21'den $L_2 = \frac{1}{4}$,

Problem-29'dan $L_3 = -6$ olduğu görülür.

$L_4 = \frac{1}{2}$ olup $L = -\frac{1}{4}$ elde edilir.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{2 \sin x \cdot \cos x - 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2 \cos 2x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{-4 \sin 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{-8 \cos 2x}$$

$$= -\frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

Problem -33

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - \cos x}{x^4} \text{ değerini bulunuz.}$$

Çözüm

1. yol

$x = 2t$ dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - \cos x}{x^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - 2t^2 - \cos 2t}{16t^4} \\ \Rightarrow L &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - \sin^2 t}{8t^4} \\ \Rightarrow L &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t - \sin t) \cdot (t + \sin t)}{8t^4} \end{aligned}$$

Burada; paydayı $t^2 \cdot t^2$ diye ayırmak işe yaramaz. $t^3 \cdot t$ diye ayıralım.

$$\begin{aligned} \Rightarrow L &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sin t - t) \cdot (\sin t + t)}{8t^4} \\ \Rightarrow L &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t + t}{8t} \\ \Rightarrow L &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3} \cdot \left[\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{8t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{8t} \right] \\ \Rightarrow L &= \frac{1}{4} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Problem-29'dan $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3} = -\frac{1}{6}$ olduğu görülür.

$$L = -\frac{1}{24} \text{ olur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - \cos x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + \sin x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos x}{12x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{24x} \\ &= -\frac{1}{24} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Problem -34

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right) \text{ değerini bulunuz.}$$

Çözüm

1. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} - 1 \right) \\ &= -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} \right) \end{aligned}$$

Burada L'Hospital Kuralını hemen uygulamak işlemleri uzatır.

Parantez içini parçalayalım:

$$\begin{aligned} L &= -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x + \sin x}{\sin x} \right) \\ &= -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{x^3} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + \sin x}{\sin x} \right) \\ &= -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{3x^2} \right) \cdot 1 \cdot 2 \\ &= -1 + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{6 \cdot x} \right) \\ &= -\frac{2}{3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

2. yol

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} - 1 \right) \\ &= -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} \right) \end{aligned}$$

Parantez içini 1. yoldaki gibi parçalayalım:

$$\begin{aligned} L &= -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x + \sin x}{\sin x} \right); \\ L &= -1 + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{x^3} \right)}_{L_1} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)}_1 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + \sin x}{\sin x} \right)}_2 \end{aligned}$$

Problem-29'dan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ olduğu görülür.

$$L = -\frac{2}{3} \text{ olur.}$$

Problem -35

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \text{ değerini bulunuz.}$$

Çözüm

1. yol

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]} \\ \Rightarrow L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1 + 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]} \\ \Rightarrow L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2}(x-1)}{\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]} \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin\frac{3\pi}{2} + \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]} \\ \Rightarrow L &= -\frac{2}{\pi} \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin\left[\frac{3\pi}{4}(x-1)\right] \cdot \cos\left[\frac{3\pi}{4}(x-1)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]} \\ \Rightarrow L &= -\frac{2}{\pi} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \frac{3\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{-\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \\ &= -\frac{2}{\pi} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Problem -36

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - \cos 2x}{x^2} \text{ değerini bulunuz.}$$

Çözüm

1. yol

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - \cos 2x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cdot \cos 2x}{x^3} \\ \Rightarrow L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x - x \cdot \cos 2x}{x^3} \\ \Rightarrow L &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin x - x}{x^3}}_{L_1} + \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x - x \cdot \cos 2x}{x^3}}_{L_2} \end{aligned}$$

Problem-29'dan $L_1 = -\frac{1}{6}$ olduğu görülür.

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cdot \cos 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2$$

olup $L = \frac{11}{6}$ elde edilir.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - \cos 2x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cdot \cos 2x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x + 2x \cdot \sin 2x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 4 \cdot \sin 2x + 4x \cdot \cos 2x}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 12 \cdot \cos 2x - 8x \cdot \sin 2x}{6} \\ &= \frac{11}{6} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Problem -37

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \text{ değerini bulunuz.}$$

Çözüm

1. yol

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = L \\ \Rightarrow L &= 1 + \lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)}_{L_1} \end{aligned}$$

$x = t^2$ dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{2 \cdot \ln t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2 \cdot \ln t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1-t}{2(t^2-1)} + \frac{1}{2} \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{\ln t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot L_1 \\ \Rightarrow L_1 &= -\frac{1}{2} \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= 1 + L_1 \\ \Rightarrow L &= \frac{1}{2} \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

2. yol (Fatih Sağlam)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = L \text{ deyip}$$

$x = \frac{1}{t}$ dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}-1} - \frac{1}{\ln \frac{1}{t}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln t} \right) \\ &= -\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{\ln t} \right) \\ &= 1 - \lim_{t \rightarrow 1} \left(1 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{\ln t} \right) \\ &= 1 - \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{t}{t-1} - \frac{1}{\ln t} \right) \\ \Rightarrow L &= 1 - L \\ \Rightarrow L &= \frac{1}{2} \text{ olur.} \end{aligned}$$

3. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \cdot \ln x} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \cdot \ln x} \end{aligned}$$

Eşitliğin sağında $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= 1 + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Problem -38

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_x 3 - 1}{x - 3} \text{ değerini bulunuz.}$$

Çözüm

1. yol

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_x 3 - 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{\ln 3}{\ln x} - 1}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln 3 - \ln x}{(x - 3) \cdot \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln \frac{x}{3}}{(3 - x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\ln x} \\ &= \frac{1}{\ln 3} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln \frac{x}{3}}{(3 - x)}}_{L_1} \end{aligned}$$

$\frac{x}{3} = 1 + t$ dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln \frac{x}{3}}{(3 - x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{-3t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \ln \left[(1 + t)^t \right]^{\frac{-1}{3}} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{-1}{3} \Rightarrow L = \frac{-1}{\ln 27} \text{ bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_x 3 - 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{\ln 3}{\ln x} - 1}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{-1}{x} \cdot \ln 3}{1} \\ &= \frac{-1}{\ln 27} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Problem -39

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 1) - \ln 8}{x - 3}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 1) - \ln 8}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{1}{x - 3} \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 1}{8}\right) \right]$$

$\frac{x^2 - 1}{8} = 1 + t$ dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 1) - \ln 8}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{1}{x - 3} \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 1}{8}\right) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sqrt{9 + 8t} - 3} \cdot \ln(1 + t) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{t}{\sqrt{9 + 8t} - 3} \cdot \ln(1 + t)^{\frac{1}{t}} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{t(\sqrt{9 + 8t} + 3)}{8t} \cdot \ln(1 + t)^{\frac{1}{t}} \right] \\ &= \frac{3}{4} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 1) - \ln 8}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}}{1} \\ &= \frac{3}{4} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Problem -40

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_x 3 - 1}{\ln(x^2 - 1) - \ln 8}$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_x 3 - 1}{\ln(x^2 - 1) - \ln 8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \underbrace{\frac{\log_x 3 - 1}{x - 3}}_{L_1} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \underbrace{\frac{x - 3}{\ln(x^2 - 1) - \ln 8}}_{L_2} \end{aligned}$$

Problem-37'den $L_1 = \frac{-1}{\ln 27}$,

Problem-38'den $L_2 = \frac{4}{3}$ olduğu görülür.

$L = -\frac{4}{9 \cdot \ln 3}$ elde edilir.

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_x 3 - 1}{\ln(x^2 - 1) - \ln 8} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{\ln 3}{\ln x} - 1}{\ln(x^2 - 1) - \ln 8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{-1}{x} \cdot \ln 3}{\frac{\ln^2 x}{2x} - \ln 8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1 \cdot \ln 3}{9 \cdot \ln 3} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Problem -41

$a \neq k \cdot \pi$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$ değerini bulunuz.

Çözüm**1. yol**

$$y = \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x-a} \cdot \ln \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{x-a} \cdot \ln \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right) \right]$$

$$\frac{\sin x}{\sin a} = 1+t \text{ dönüşümü yapılırsa;}$$

$$x = \text{Arcsin}[(1+t) \cdot \sin a] \text{ olur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\ln y)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\text{Arcsin}[(1+t) \cdot \sin a] - a} \cdot \ln(1+t) \right\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{t}{\text{Arcsin}[(1+t) \cdot \sin a] - a} \cdot \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{t}{\text{Arcsin}[(1+t) \cdot \sin a] - a}}_L \cdot \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}_1$$

L ifadesinde, t yerine x türünden değerini geri koyalım:

$$L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\text{Arcsin}[(1+t) \cdot \sin a] - a}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\sin x}{\sin a} - 1}{x - a}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{(x - a) \cdot \sin a}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \left(\frac{x-a}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x+a}{2} \right)}{2 \cdot \frac{x-a}{2} \cdot \sin a}$$

$$\Rightarrow L = \cot a \text{ bulunur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\ln y) = \cot a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} y = e^{\cot a} \text{ elde edilir.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$y = \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{x-a} \cdot \ln\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(\sin x) - \ln(\sin a)}{x-a}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \ln y = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x}{1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \ln y = \cot a$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} y = e^{\cot a} \text{ elde edilir.}$$

Problem -42

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\sin x})$ değerini bulunuz.

Çözüm

1. yol

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\sin x}) = L$ deyip $x = 2t$ dönüşümü yapalım:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\sin x})$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0^+} [(2t)^{\sin(2t)}]$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \underbrace{2^{\sin(2t)}}_1 \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} [t^{\sin(2t)}]$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0^+} [t^{(2\sin t \cdot \cos t)}]$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0^+} (t^{\sin t})^{\lim_{t \rightarrow 0^+} (2\cos t)}$$

$$\Rightarrow L = L^2$$

$$\Rightarrow L = 0 \text{ veya } L = 1 \text{ bulunur.}$$

$0 < m < n < 1$ iken $m^{\sin m} > n^{\sin n}$ olur.

O halde;

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = 1 \text{ olmalıdır.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$$y = x^{\sin x}$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln(x^{\sin x})$$

$$\Rightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln x \quad (x > 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x \cdot \ln x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-\sin x \cdot \sin x}{x \cdot \cos x} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-\sin x}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\sin x}) = 1 \text{ bulunur.}$$