❑ İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLAR

a, b ve c değişmeyen herhangi gerçek sayıları ve x bir değişkeni göstermek üzere, $a \neq 0$ ise,

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlara, **ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyonlar** denir. x değişkeni R'den (gerçek sayılar kümesi) seçilirse, **R'den R'ye ikinci dereceden fonksiyonlar** elde edilir.

Böyle fonksiyonlar,

$f: R \to R\,,\ f(x) = ax^2 + bx + c$ veya

$f: R \to R\,,\ f: x \to ax^2 + bx + c$ ya da

$f = \{(x,y) \mid x \in R\,,\ y \in R \text{ ve } y = ax^2 + bx + c\}$

biçimlerinden herhangi biriyle gösterilebilirler.

Örneğin;

$f: R \to R\,,\ f(x) = 3x^2 + \sqrt{2}$;

$g: R \to R\,,\ g: x \to x^2 - x - 1$;

$h = \{(x,y) \mid x \in R\,,\ y \in R \text{ ve } y = 2x^2 - 3x\}$

fonksiyonları, R'den R'ye ikinci dereceden bir değişkenli birer fonksiyondur.

Tanım kümesi, gerçek sayılar kümesinin herhangi bir alt kümesi olarak da seçilebilir.

Örneğin;

$A = \{x \mid |x-2| \leq 3\,,\ x \in R\}$ olmak üzere,

$f: A \to R\,,\ f(x) = x^2 - 2x - 3$

yine ikinci dereceden bir değişkenli bir fonksiyondur.

❑ İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Bu bölümde $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğini çizecek ve bu grafiğin özellikleri ile denklem ve eşitsizlik bilgilerimiz arasında ilgi kurmaya çalışacağız.

R'den R'ye $f(x) = ax^2 + bx + c$ biçimindeki fonksiyonların grafikleri **parabol** adı verilen eğrilerdir.

$f(x) = ax^2$ fonksiyonu $y = g(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun en sade biçimidir. $y = ax^2 + bx + c$ nin grafiğini $y = ax^2$ nin grafiğinden yararlanarak çizeceğiz.

Öyleyse, önce $y = f(x) = ax^2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim:

■ $y = f(x) = ax^2$ FONKSİYONUNUN GRAFİĞİ

Teorik olarak, $y = ax^2$ fonksiyonunda, x in her değeri için y nin aldığı değerler bulunur. Elde edilen (x, y) ikililerine karşılık gelen noktaların bileşimi, grafiği oluşturur.

Pratik olarak, x e sonsuz değişik değer verme-miz mümkün olmadığından biz, yeterli sayıda x değeri için (x, y) ikilileri bulacak ve bunlara karşılık elen noktaları birleştirerek eğriyi kabaca çizeceğiz.

ÖRNEK: $f: R \to R\,,\ f(x) = y = x^2$ **nin grafiğini çizelim:**

Önce, x in aldığı değişik değerlere karşılık y nin aldığı değerleri bir tablo ile gösterelim.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$y = x^2$	$+\infty$	4	1	0	1	4	$+\infty$
	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	

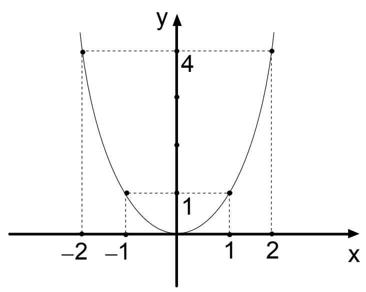
Bu tabloya fonksiyonun **değişim tablosu** denir.

($\searrow$) biçimindeki oklar, x artarken y değerinde azalma olduğunu;

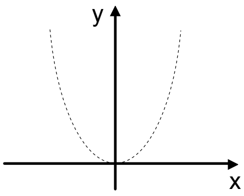
($\nearrow$) biçimindeki oklar, x artarken y değerinde artma olduğunu gösterir.

$y = x^2$ ifadesinde x yerine $(-\infty)$ a ya da $(+\infty)$ a yaklaşan değerler konulduğunda y nin $(+\infty)$ a yaklaşan değerler alacağı açıktır.

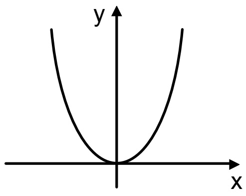
Değişim tablosunda belirlenen noktaları analitik düzlemde (x0y dik koordinat sisteminde) işaretleyip x'e vermediğimiz ara değerleri tahmin ederek birleştirirsek fonksiyonun grafiği ortaya çıkar.



x'e verdiğimiz değer sayısını arttırsaydık, elde edeceğimiz noktaların bileşimi Şekil I' deki gibi; x'e bütün gerçek sayı değerlerini verebilseydik, elde edeceğimiz noktaların bileşimi Şekil II'deki gibi olacaktı.



Þekil I



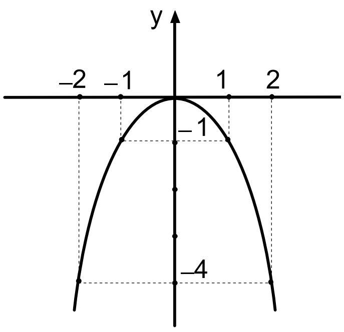
Þekil II

ÖRNEK: $f : R \to R$, $y = f(x) = -x^2$ **nin grafiğini çizelim :**

Fonksiyonun değişim tablosunu yapalım :

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$y=-x^2$	$-\infty$	-4	-1	0	-1	-4	$-\infty$

Tablodaki (x, y) ikililerine karşılık gelen noktaları analitik düzlemde işaretleyip birleştirirsek grafik çizilmiş olur.

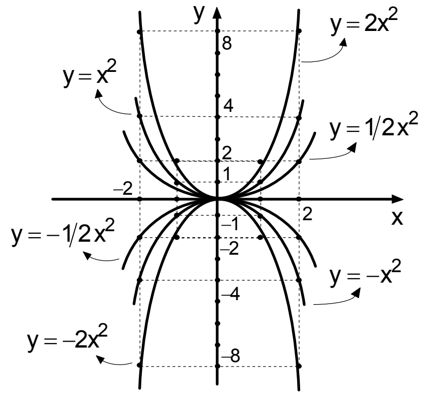


ÖRNEK : R den R ye $y = ax^2$ fonksiyonunun grafiğini a'nın -2, -1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1 ve 2 değerleri için, aynı koordinat sisteminde çizerek, a nın değeri değiştikçe grafiğin nasıl değişeceğini görelim:

x'e verilen değerler için fonksiyonların aldıkları değerleri aynı tabloda gösterelim:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$y=-2x^2$	$-\infty$	-8	-2	0	-2	-8	$-\infty$
$y=-x^2$	$-\infty$	-4	-1	0	-1	-4	$-\infty$
$y=-1/2\,x^2$	$-\infty$	-2	$-1/2$	0	$-1/2$	-2	$-\infty$
$y=1/2\,x^2$	$+\infty$	2	$1/2$	0	$1/2$	2	$+\infty$
$y=x^2$	$+\infty$	4	1	0	1	4	$+\infty$
$y=2x^2$	$+\infty$	8	2	0	2	8	$+\infty$

Her eğri için elde edilen (x, y) ikililerini koordinat sisteminde işaretleyip uygun şekilde birleştirirsek aşağıdaki grafikler elde edilir.



Grafiklerden de görülebileceği gibi;

❋ $a > 0$ iken $y = f(x) = ax^2 \geq 0$ olduğundan grafiklerin (parabollerin) kolları y ekseninin pozitif yönündedir. Fonksiyonların aldığı en küçük değer $x = 0$ için $y = 0$ dır. $(0, 0)$ noktası parabollerin tepe noktasıdır.(veya parabollerin köşesidir.)

Fonksiyonların görüntü kümesi,
$f(R) = R^+ \cup \{0\}$ dır.

Görüntü kümesinin en küçük elemanı sıfırdır.

Görüntü kümesinin en büyük elemanı yoktur.

❋ $a < 0$ iken $y = f(x) = ax^2 \leq 0$ olduğundan parabollerin kolları y ekseninin negatif yönündedir.
Fonksiyonların aldığı en büyük değer $x = 0$ için $y = 0$ dır. Bu durumda da $(0, 0)$ noktası parabollerin tepe noktasıdır.

Fonksiyonların görüntü kümesi,
$f(R) = R^- \cup \{0\}$ dır.

Görüntü kümesinin en büyük elemanı sıfırdır.

Görüntü kümesinin en küçük elemanı yoktur.

❋ $f(x) = ax^2$ fonksiyonunda $\forall k \in R$ için,
$f(k) = ak^2$ ve $f(-k) = a(-k)^2 = ak^2$

olduğundan y eksenine göre simetrik olan (k, ak^2) ve $(-k, ak^2)$ noktaları fonksiyonun grafiğine aittir. Bu da bize grafiğin kollarının y eksenine göre simetrik olduğunu gösterir. Öyleyse, y ekseni ($x = 0$ doğrusu) parabolün **simetri ekseni**dir.

❋ $|a|$ değeri büyüdükçe kollar y eksenine yaklaşır, $|a|$ değeri küçüldükçe kollar y ekseninden uzaklaşır.

■ **$f(x) = ax^2 + bx + c$ FONKSİYONUNUN GRAFİĞİNİN, YARDIMCI KOORDİNAT SİSTEMİ KULLANILARAK ÇİZİMİ**

Eşitsizlikler konusunda, $f(x) = ax^2 + bx + c$ üç terimlisinin işaretini incelemek için, üçterimliyi

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

biçiminde yazmıştık. Burada a, köşeli parantezin içi ile çarpılırsa;

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

bu da,

$$f(x) = a\left[x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right]^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

biçiminde yazılarak, $r = \frac{-b}{2a}$ ve $k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ denirse,

$$f(x) = y = a(x - r)^2 + k$$

denklemi elde edilir. Burada, $k = f(r)$ olduğuna dikkat ediniz.

$y = a(x - r)^2 + k$ denklemi de $y - k = a(x - r)^2$ biçiminde yazılarak $x - r = x'$ ve $y - k = y'$ denirse,

$$y' = a(x')^2$$

denklemi elde edilir.

$y = ax^2$ biçimindeki fonksiyonların x0y koor-dinat sisteminde tepe noktası $O(0,0)$ ve simetri ekseni $y = 0$ doğrusu olan bir parabol olduğunu biliyoruz. Öyleyse, $y' = a(x')^2$ denklemi de $x'0'y'$ koordinat sisteminde tepe noktası $O'(0,0)$ ve simetri ekseni $y' = 0$ doğrusu olan bir parabol gösterecektir.

O halde, $x'0'y'$ koordinat sisteminin x0y koordinat sistemine göre yerini belirleyebilirsek $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğini çizebilece-ğiz demektir.

$x'0'y'$ koordinat sisteminde $0'x'$ ekseni $y' = 0$ doğrusu, $0'y'$ ekseni $x' = 0$ doğrusudur.

$y - k = y'$ ve $x - r = x'$ idi. Bu ifadeleri sıfıra eşitlersek;

$y' = y - k = 0 \Rightarrow y = k$

$x' = x - r = 0 \Rightarrow x = r$ elde edilir.

Bu da bize, $x'0'y'$ koordinat sistemindeki $0'y'$ ekseninin, x0y sistemindeki $x = r$ doğrusu; $0'x'$ ekseninin de $y = k$ doğrusu olduğunu gösterir.

$x'0'y'$ koordinat sisteminin orijini, şüphesiz, x0y koordinat sistemindeki (r,k) noktasıdır.

Bu açıklamalara göre;

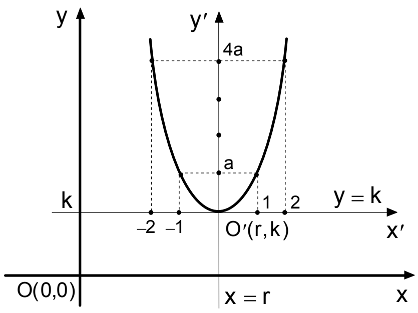
$y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için;

$r = \frac{-b}{2a}$ ve $k = f(r)$ olmak üzere x0y koordi-nat sisteminde $x = r$ ve $y = k$ doğruları çizilir.

$y = k$ ve $x = r$ doğrularının oluşturduğu sistem $x'0'y'$ koordinat sistemi olarak kabul edilir ve bu sistemde $y' = a(x')^2$ parabolünün grafiği çizilir.

Çizilen bu grafik , $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyo-nunun x0y koordinat sistemindeki grafiğidir.

(Şekli inceleyiniz!)



$r > 0$,
$k > 0$,
$a > 0$
kabul edilmiþtir.

ÖRNEKLER

1. $f(x) = x^2 - 2x + 4$ fonksiyonunun grafiğini çizelim:

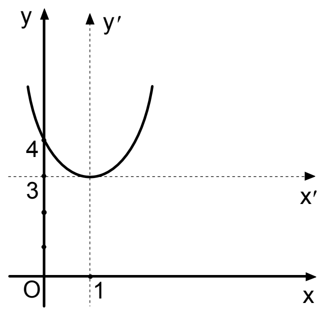
$a = 1 > 0 \Rightarrow$ grafiğin kolları y ekseninin pozitif
yönündedir.

$r = \frac{-b}{2a} = -\frac{-2}{2} \Rightarrow r = 1$

$k = f(1) = 1 - 2 + 4 \Rightarrow k = 3$

Eksenleri, x0y koordinat sisteminin $x = 1$ ve $y = 3$ doğruları olan $x'0'y'$ koordinat sisteminde $y' = (x')^2$ parabolünün grafiğini çizeceğiz. Bu grafik x0y koordinat sisteminde $y = x^2 - 2x + 4$ parabolünün grafiği olacaktır.

(Şekli inceleyiniz!)



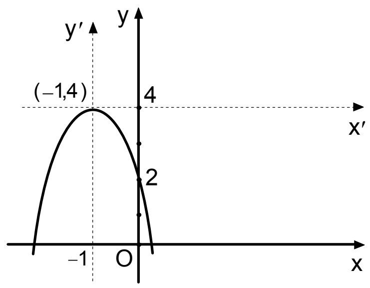
2. $\mathbf{f(x) = -2x^2 - 4x + 2}$ **fonksiyonunun grafiğini çizelim:**

$a = -2 < 0 \Rightarrow$ grafiğin kolları y ekseninin negatif yönündedir.

$r = \frac{-b}{2a} = -\frac{-4}{-4} \Rightarrow r = -1$

$k = f(-1) = -2 + 4 + 2 \Rightarrow k = 4$

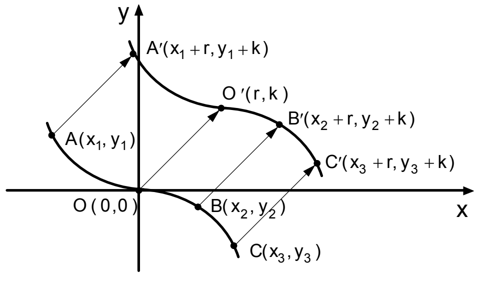
$x = -1$ ve $y = 4$ doğrularının oluşturduğu $x'0'y'$ koordinat sisteminde, $y' = -2(x')^2$ parabolü-nün grafiğini çizeceğiz. Bu grafik x0y koordinat sisteminde $y = -2x^2 - 4x + 2$ parabolünün grafiği olacaktır.



■ ÖTELEME KAVRAMI

Herhangi bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin her noktasının apsisine r, ordinatına da k ekleyerek elde edilecek noktaların bileşimine $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin (r, k) kadar ötelenmişi, bu işleme de **öteleme** denir.

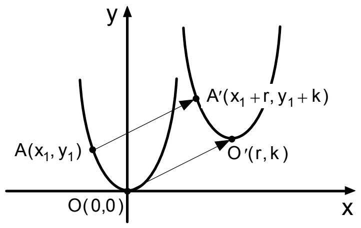
Aşağıdaki öteleme örneğini inceleyiniz.



Ötelemede grafik, üzerindeki noktaların birbirine göre konumu değiştirilmeden ve şekil bütün olarak döndürülmeden koordinat sisteminin başka bir yerine taşınmış olur.

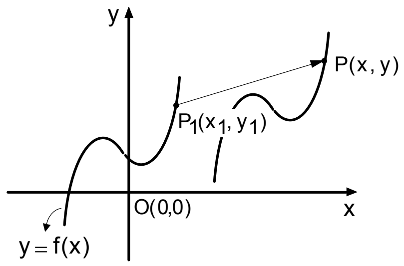
Örneğin; x0y koordinat sistemindeki $y = ax^2$ parabolünün (r, k) kadar ötelenmiş biçimi, simetri ekseni ilk durumuna paralel tutularak, tepe noktası $O'(r, k)$ noktasına gelecek biçimde kaydırılmış biçimidir.

Aşağıdaki şekli inceleyiniz.



❈ $\mathbf{y = f(x)}$ **fonksiyonunun grafiğinin** $\mathbf{(r,k)}$ **kadar ötelenmiş biçiminin denklemi ne olur?**

Şimdi, bu sorunun cevabını bulmaya çalışalım:



$y = f(x)$ üzerinde değişen $P_1(x_1, y_1)$ noktasının (r, k) kadar ötelenmesiyle elde edilen nokta $P(x, y)$ olsun. (x, y) ikililerinin sağladığı denklemi bulmak istiyoruz.

Öteleme tanımından ;
$x = x_1 + r$, $y = y_1 + k$ dır.
Buradan, $x_1 = x - r$ ve $y_1 = y - k$ bulunur.

$P_1(x_1, y_1)$ noktası, $y = f(x)$ eğrisi üzerinde değiştiğinden (x_1, y_1) ikilisi $y = f(x)$ denklemini sağlar.

$$y_1 = f(x_1)$$

$x_1 = x - r$ ve $y_1 = y - k$ olduğundan, bu değerler $y_1 = f(x_1)$ denkleminde yerlerine konursa,

$$y - k = f(x - r)$$

denklemi elde edilir.

$P(x, y)$ noktalarının sağladığı bu denklem, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin (r, k) kadar öte-lenmesiyle elde edilen grafiğin denklemidir.

$y-k=f(x-r)$ denkleminden de görülebileceği gibi;

> **$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin (r,k) kadar ötelenmiş biçiminin denklemini bulmak için, $y=f(x)$ denkleminde x yerine $x-r$ ve y yerine $y-k$ konur.**
>
> **Ötelenmiş grafiğin denklemi,**
>
> $$y-k=f(x-r) \quad \text{ya da}$$
> $$y=f(x-r)+k$$
>
> **olarak bulunur.**

ÖRNEKLER

1. $y=3x^2$ parabolünün grafiği, simetri ekseni ilk durumuna paralel tutularak, tepe noktası $A(2,-1)$ noktasına gelecek biçimde kaydırılırsa elde edilecek grafiğin denklemi ne olur ?

ÇÖZÜM

Soruda istenen, $y=3x^2$ parabolünün grafiği-nin $(2,-1)$ kadar ötelenmiş biçiminin denklemidir.

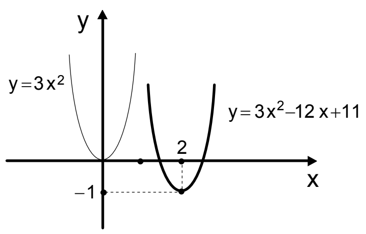
$(r=2\ ,\ \ k=-1)$

$y=3x^2$ denkleminde, x yerine $x-2$ ve y yeri-ne $y+1$ konarak istenen denklem bulunur.

$y+1=3(x-2)^2$

$\Rightarrow y=3x^2-12x+11$

Aşağıdaki şekilde, $y=3x^2$ parabolü ve ötelen-miş biçiminin grafikleri verilmiştir.



2. $D:\ 2x-y+2=0$ doğrusunun $(1,3)$ kadar ötelenmiş biçimininin denklemi nedir ?

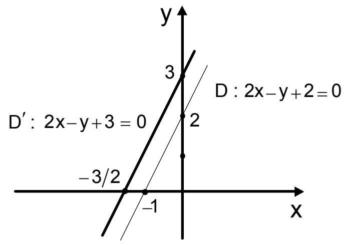
ÇÖZÜM

Verilen denklemde x yerine $x-1$ ve y yerine $y-3$ konarak istenen denklem bulunur.

$2(x-1)-(y-3)+2=0$

$\Rightarrow D':\ 2x-y+3=0$

D ve D' doğruları aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



■ **$f(x)=ax^2+bx+c$ FONKSİYONUNUN GRAFİĞİNİN, ÖTELEME YÖNTEMİ İLE ÇİZİMİ**

$f(x)=y=ax^2+bx+c$ fonksiyonunun,

$r=\dfrac{-b}{2a}$ ve $k=f(r)$ olmak üzere;

$$y-k=a(x-r)^2$$

biçiminde yazılabildiğini biliyoruz. Bu son denkle-min, $y=ax^2$ fonksiyonunun (r,k) kadar ötelenmiş biçiminin denklemi olduğu açıkça görülmektedir.

Öyleyse;

> **$f(x)=ax^2+bx+c$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için önce $y=ax^2$ parabolü çizilir; sonra bu grafik, $r=\dfrac{-b}{2a}$ ve $k=f(r)$ olmak üzere, (r,k) kadar ötelenir.**

ÖRNEKLER

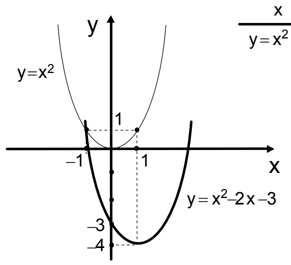
1. $f(x)=x^2-2x-3$ fonksiyonunun grafiğini çizelim:

$r=\dfrac{-b}{2a}=-\dfrac{-2}{2}\ \Rightarrow\ r=1$

$k=f(1)=1-2-3\ \Rightarrow\ k=-4$

$f(x)=(x-1)^2-4$

$f(x)=x^2-2x-3$ fonksiyonunun grafiği $y=x^2$ parabolünün $(1,-4)$ kadar ötelenmiş biçimi olacaktır.



x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$y=x^2$	$+\infty$	1	0	1	$+\infty$

2. $\mathbf{f(x) = -2x^2 + 4x + 3}$ **fonksiyonunun grafiğini çizelim:**

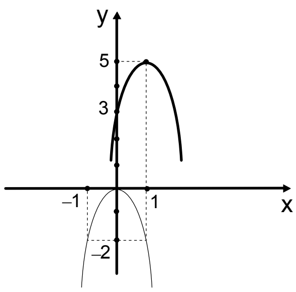
$r = \frac{-b}{2a} = -\frac{-4}{4} \Rightarrow r = 1$

$k = f(1) = -2 + 4 + 3 \Rightarrow k = 5$

$f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ fonksiyonunun grafiği $y = -2x^2$ nin $(1,5)$ kadar ötelenmiş biçimidir.

$y = -2x^2$ için değişim tablosu :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$y = -2x^2$	$-\infty$	-2	0	-2	$-\infty$



■ $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$ **FONKSİYONUNUN GRAFİĞİNİN, PRATİK ÇİZİMİ**

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinin, $r = \frac{-b}{2a}$ ve $k = f(r)$ olmak üzere, tepe noktası (r,k) ve simetri ekseni $x = r$ doğrusu olan bir parabol olduğunu biliyoruz.

Bu bilgileri kullanarak ve grafiğin koordinat ek-senlerini kestiği noktaları bularak $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğini pratik olarak çizebiliriz.

x ekseni üzerindeki bütün noktaların ordinatları sıfır olduğundan, $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu-nun x eksenini kestiği noktaların apsisleri, denklem-de y yerine sıfır konularak,

$ax^2 + bx + c = 0$

denkleminin kökleri olarak bulunur.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçek kökleri yoksa fonksiyonun grafiği x eksenini kesmiyor demektir. Denklemin iki kat kökü varsa bu kökler $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = r$ olacağından parabolün tepe noktası x ekseni üzerinde olur. Yani, parabol x eksenine teğettir. Denklemin x_1 ve x_2 gibi birbirinden farklı iki gerçek kökü varsa parabolün x eksenini kestiği noktalar $(x_1,0)$ ve $(x_2,0)$ dır.

y ekseni üzerindeki bütün noktaların apsisleri sıfır olduğundan $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ denkleminde x yerine sıfır konulduğunda elde edilen $f(0) = c$ değeri, parabolün y eksenini kestiği noktanın ordinatı olur. Fonksiyonun grafiğinin y eksenini kestiği nokta $(0,c)$dir.

Özetlersek;

$\mathbf{f(x) = y = ax^2 + bx + c}$ **fonksiyonunun grafi-ğini çizmek için;**

① $\mathbf{r = \frac{-b}{2a}}$ **ve** $\mathbf{k = f(r)}$ **hesaplanarak parabolün** $\mathbf{(r,k)}$ **tepe noktası bulunur.**

② $\mathbf{y = ax^2 + bx + c = 0}$ **denkleminin -varsa-** $\mathbf{x_1}$ **ve** $\mathbf{x_2}$ **kökleri bulunur. Böylece parabolün x eksenini kestiği noktalar** $\mathbf{(x_1,0)}$ **ve** $\mathbf{(x_2,0)}$ **olarak belirlenir.**

③ $\mathbf{f(0) = c}$ **değeri bulunur.** $\mathbf{(0,c)}$ **noktası, parabolün y eksenini kestiği noktadır.**

④ $\mathbf{(r,k)}$, $\mathbf{(x_1,0)}$, $\mathbf{(x_2,0)}$ **ve** $\mathbf{(0,c)}$ **noktaları koor-dinat sisteminde işaretlenir; grafiğin parabol olduğu dikkate alınarak birleştirilir.**

❈ $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda $a > 0$ ise, grafiğin kolları y ekseninin pozitif yönünde olaca-ğından, parabolün tepe noktasının ordinatı olan $f(-b/2a)$ değeri $f(x)$in görüntü kümesinin en küçük elemanıdır.

$a < 0$ ise, grafiğin kolları y ekseninin negatif yönünde olacağından, $f(-b/2a)$ değeri $f(x)$in görüntü kümesinin en büyük elemanı olur.

ÖRNEKLER

1. $\mathbf{f(x) = x^2 + 2x - 8}$ **fonksiyonunun grafiğini çizelim:**

Tepe noktasının koordinatları (r,k) olsun.

$r = \frac{-b}{2a} = -\frac{2}{2} \Rightarrow r = -1$

$k = f(-1) = 1 - 2 - 8 \Rightarrow k = -9$

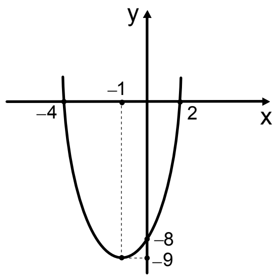
Tepe noktası $(-1,-9)$

$x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -4\ ,\ x_2 = 2$

olduğundan, fonksiyonun x eksenini kestiği noktalar $(-4,0)$ ve $(2,0)$ dır.

$f(0)=-8$ olduğundan fonksiyonun y eksenini kestiği nokta $(0,-8)$ dir.

$(-1,-9)$, $(-4,0)$, $(2,0)$ ve $(0,-8)$ noktalarını koordinat sisteminde işaretleyip, grafiğin parabol olduğunu dikkate alarak birleştirirsek, çizim tamamlanmış olur.



2. $f(x)=-x^2+3x+1$ **fonksiyonunun grafiğini çizelim:**

$r=\dfrac{-b}{2a}=-\dfrac{3}{-2}\;\Rightarrow\; r=\dfrac{3}{2}$

$k=f(\dfrac{3}{2})=-\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{2}+1\;\Rightarrow\; k=\dfrac{13}{4}$

Parabolün tepe noktası $(\dfrac{3}{2},\dfrac{13}{4})$ tür.

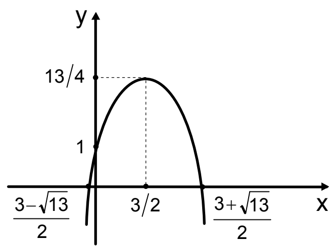
$-x^2+3x+1=0$

$\Rightarrow x_1=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\;,\;\; x_2=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

olup, parabolün x eksenini kestiği noktalar; $\left(\dfrac{3-\sqrt{13}}{2},0\right)$ ve $\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2},0\right)$ dır.

$f(0)=1$ olduğundan parabolün y eksenini kestiği nokta $(0,1)$ dir.

Buna göre, grafik şekildeki gibidir.



3. $f(x)=x^2-2x+1$ **fonksiyonunun grafiğini çizelim:**

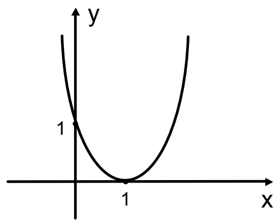
$r=-\dfrac{-2}{2}\;\Rightarrow\; r=1$

$k=f(1)=1-2+1\;\Rightarrow\; k=0$

Parabolün tepe noktası, $(1,0)$, x ekseni üzerinde olduğundan grafik x eksenine teğettir.

$f(0)=1$ olduğundan grafiğin y eksenini kestiği nokta $(0,1)$ dir.

Buna göre, grafik şekildeki gibidir.



4. $f(x)=x^2+2x+3$ **fonksiyonunun grafiğini çizelim:**

$r=-\dfrac{2}{2}\;\Rightarrow\; r=-1$

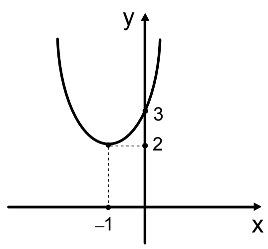
$k=f(-1)=1-2+3\;\Rightarrow\; k=2$

Parabolün tepe noktası $(-1,2)$ dir.

$x^2+2x+3=0$ denkleminde $\Delta<0$ olduğundan grafik x eksenini kesmez.

$f(0)=3$ olduğundan parabolün y eksenini kestiği nokta $(0,3)$ tür.

Buna göre, grafik şekildeki gibidir.



■ PARABOLÜN, X EKSENİNİ KESTİĞİ NOKTALAR CİNSİNDEN DENKLEMİ

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin gerçek kökleri x_1 ve x_2 ise $f(x)=ax^2+bx+c$ ifadesini;

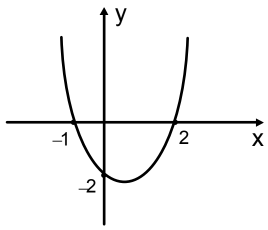
$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

biçiminde yazabileceğimizi denklemler konusunda öğrenmiştik.

Parabol denkleminin $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ biçimindeki ifadesi, bazı problemlerin çözümünde kolaylık sağlar.

ÖRNEK

Þekilde,
$f(x) = ax^2 + bx + c$
fonksiyonunun
grafiði ile ilgili
bilgiler verilmiþtir.
Buna göre,
$f(3)$ deðeri kaçtýr ?



ÇÖZÜM

Fonksiyonun x eksenini kestiği noktaların apsisleri -1 ve 2 olduğuna göre denklem;

$f(x) = a(x+1)(x-2)$ biçiminde yazılabilir.

$f(0) = -2$ olduğundan,
$f(0) = a(1)(-2) = -2 \Rightarrow a = 1$ dir.

Artık denklem,
$f(x) = (x+1)(x-2)$ olarak belli olduğundan, x yerine 3 değeri konularak,
$f(3) = 4$ bulunur.

❑ TAMAMLAYICI ÖRNEKLER

1. **$f(x) = ax^2$ fonksiyonunun grafiğinin,**

a) $(-2,1)$ noktasından,
b) $(3,-2)$ noktasından,
c) $(4,0)$ noktasından,

geçmesi için a kaç olmalıdır ?

ÇÖZÜM

a) $(-2,1)$ ikilisi denklemi sağlamalıdır.
$f(-2) = 1 \Rightarrow a(-2)^2 = 1$
$\Rightarrow a = \dfrac{1}{4}$

b) $f(3) = -2 \Rightarrow a \cdot 3^2 = -2$
$\Rightarrow a = \dfrac{-2}{9}$

c) $f(4) = 0 \Rightarrow a \cdot 16 = 0$
$\Rightarrow a = 0$

Bu durumda, grafik bir parabol değil, $y = 0$ doğrusudur.

2. **$A = \left\{-2, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1, 2\right\}$ kümesinin,**

$f: R \to R$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

fonksiyonundaki görüntü kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 1 = 15$
$f(-1/2) = 2 \cdot (-1/2)^2 - 3 \cdot (-1/2) + 1 = 3$
$f(1/2) = 2 \cdot (1/2)^2 - 3 \cdot (1/2) + 1 = 0$
$f(1) = 2 \cdot (1)^2 - 3 \cdot (1) + 1 = 0$
$f(2) = 2 \cdot (2)^2 - 3 \cdot (2) + 1 = 3$

Görüntü kümesi $= \{0, 3, 15\}$

3. **$A = \{x : -2 < x \leq 3 , x \in R\}$ olmak üzere,**

$f: A \to R$, $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

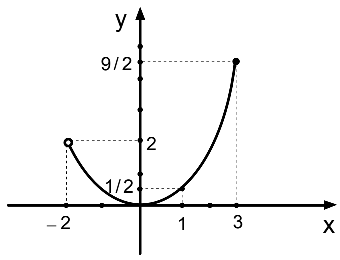
x e, tanım aralığından vereceğimiz yeterli sayıda değerler yanında, tanım aralığının sınır değerlerini de verelim ki grafiğin hangi iki nokta arasında çizileceğini bilelim.

$f(-2) = 2$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1/2$, $f(3) = 9/2$

Burada $x = -2$ değerinin tanım kümesine ait olmadığına dikkat ediniz.

Grafiğe ait olmayan noktayı grafikte küçücük bir çember "○" biçiminde; grafiğe ait uç noktasını grafikte küçücük bir daire "●" biçiminde göstereceğiz.

Yukarıda bulduğumuz, grafiğe ait noktaları koordinat sisteminde işaretleyerek grafiği çizelim:



4. **Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.**

a) $f: R \to R$, $f(x) = 1 - x^2$
b) $f: R \to R$, $f(x) = (x-2)^2$
c) $f: R \to R$, $f(x) = 2(x+1)^2 - 2$

ÇÖZÜM

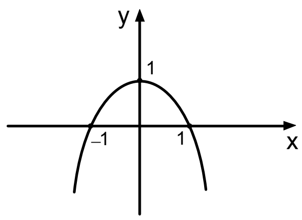
a) $f(x) = -x^2 + 1$

$r = 0$, $k = f(0) = 1$

Tepe noktası; $(0,1)$

$-x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$, $x_2 = 1$

x eksenini kestiği noktalar; $(-1,0)$, $(1,0)$



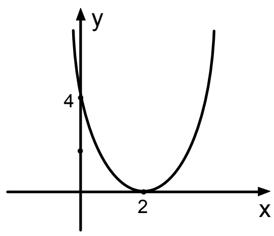
b) $f(x) = (x-2)^2 + 0$

Tepe noktası; $(2,0)$

Tepe noktası x ekseni üzerinde olduğu için grafik x eksenine teğettir.

$f(0) = (-2)^2 = 4$

y eksenini kestiği nokta; $(0,4)$

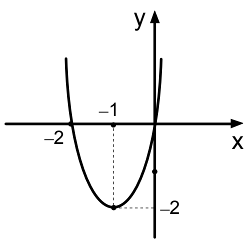


c) $f(x) = 2(x+1)^2 - 2$

Tepe noktası; $(-1,-2)$

$$2(x+1)^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2(x+1)^2 = 2$$
$$\Rightarrow (x+1)^2 = 1$$
$$\Rightarrow x+1 = -1 \text{ veya } x+1 = 1$$
$$\Rightarrow x_1 = -2 \text{ , } x_2 = 0$$

x eksenini kestiği noktalar; $(-2,0)$, $(0,0)$



5. $A = \{x : |x-2| \le 2 \text{ , } x \in R\}$ **olmak üzere,**

$f : A \to R$, $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

fonksiyonunun görüntü kümesinin en büyük ve en küçük elemanlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Önce, A tanım kümesini daha açık bir biçimde ifade edelim:

$$|x-2| \le 2 \Rightarrow -2 \le x-2 \le 2$$
$$\Rightarrow 0 \le x \le 4$$

Fonksiyonun tanım aralığı $[0,4]$ tür. Belirli bir aralıkta, $y = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun en büyük ve en küçük değerlerini bulmak için, aralığın sınırlarındaki ve tepe noktasındaki fonksiyon değerleri bulunur.

Bu değerlerden en küçüğü fonksiyonun görüntü kümesinin en küçük elemanı, en büyüğü de görüntü kümesinin en büyük elemanı olur.

Tanım kümesinin sınır değerleri tanım kümesi-nin içinde değil ise görüntü kümesinin en büyük veya en küçük elemanı bulunmayabilir.

Tepe noktasının apsisi:

$$r = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-4} = 1$$

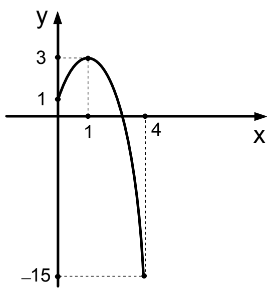
$x = 1$ için fonksiyonun değeri: $f(1) = 3$

$x = 0$ için fonksiyonun değeri: $f(0) = 1$

$x = 4$ için fonksiyonun değeri: $f(4) = -15$

Buna göre, görüntü kümesinin en küçük elemanı -15, en büyük elemanı 3 tür.

Bu bulgularımızı grafik üzerinde de görelim:



6. $f : [-2,3) \to R$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$

fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Tanım aralığının sınırlarındaki ve tepe nokta-sındaki fonksiyon değerlerini bulalım:

$$f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = -3$$

$$f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 3 = 12$$

$$r = \frac{-b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$$

$f(-1)=(-1)^2+2(-1)-3=-4$

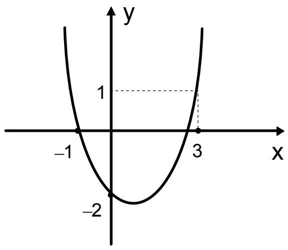
$f(-2)=-3$, $f(3)=12$ ve $f(-1)=-4$ değerlerinden en küçük ve en büyük olan iki tanesi görüntü kümesinin en büyük alt ve en küçük üst sınırlarıdır.

Öyleyse, görüntü kümesi;
$\{x: \ -4\le x<12\}$ dir.

Görüntü kümesinin en büyük elemanının bulunmadığına dikkat ediniz. Görüntü kümesinin en küçük elemanı ise -4 tür.

7.

Þekilde, $f: R\to R$, $f(x)=ax^2+bx+c$ fonksiyonunun grafiði ile ilgili bilgiler verilmiþtir. Buna göre, grafiðin denklemi nedir ?



ÇÖZÜM

Grafikten;

$f(0)=-2 \Rightarrow c=-2$ ①

$f(-1)=0 \Rightarrow a(-1)^2+b(-1)+c=0$ ②

$f(3)=1 \Rightarrow a(3)^2+b(3)+c=1$ ③

$c=-2$ değeri, ② ve ③ te yerine konursa;

$a-b-2=0$ ④

$9a+3b-2=1$ ⑤

denklemleri elde edilir.

④ ten $b=a-2$ alınıp ⑤ te yerine konursa;

$9a+3(a-2)-2=1$

$\Rightarrow 12a-6-2-1=0$

$\Rightarrow 12a=9 \Rightarrow a=3/4$ ve

$b=a-2 \Rightarrow b=(3/4)-2$

$\Rightarrow b=5/4$ elde edilir.

Öyleyse;

$f(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}x-2$ dir.

8. Tepe noktası $T(1,4)$ olan ve y eksenini A(0,3) noktasında kesen parabolün x eksenini kestiği noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM

Tepe noktası bilinen parabolün denklemi, $T(r,k)$ olmak üzere;

$f(x)=a(x-r)^2+k$ idi.

$T(1,4)$ olduğuna göre denklem;

$f(x)=a(x-1)^2+4$ biçimindedir.

$f(0)=3$ olduğundan,

$f(0)=a(0-1)^2+4=3 \Rightarrow a=-1$

olup denklem,

$f(x)=-(x-1)^2+4$ olur.

$f(x)=0$ denkleminin kökleri parabolün x eksenini kestiği noktaların apsisleridir.

$-(x-1)^2+4=0 \Rightarrow (x-1)^2=4$

$\Rightarrow x-1=-2$ veya $x-1=2$

$\Rightarrow x_1=-1$, $x_2=3$

Öyleyse, parabolün x eksenini kestiği noktalar; $(-1,0)$ ve $(3,0)$ dır.

❑ İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

■ BİRİNCİ DERECEDEN, İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

$a,b,c\in R$ ve a ile b den en az biri sıfırdan farklı olmak üzere;

$$ax+by=c$$

açık önermesine **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem** denir. Açık önermeyi doğrulayan her (x,y) ikilisi denklemin çözüm kümesinin bir elemanıdır. Denklemi sağlayan bütün (x,y) ikililerinin kümesi, denklemin **çözüm kümesi**dir.

$a\ne 0$ ve $b\ne 0$ olmak üzere, $ax+by=c$ denkleminde $\forall x$, $x\in R$ değeri için,

$ax+by=c \Rightarrow by=-ax+c$

$\Rightarrow y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$

biçiminde bir y değeri bulunur. O halde, denklemi sağlayan $(x,y)=\left(x,\ -\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}\right)$ biçiminde, sonsuz sayıda, farklı (x,y) ikilisi vardır.

Öyleyse, denklemin çözüm kümesi;

$\mathbf{Ç}=\left\{\left(\mathbf{x},\ -\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\mathbf{x}+\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}}\right) \middle| \ \mathbf{x}\in \mathbf{R}\right\}$ dir.

$ax+by=c$ denklemini sağlayan (x,y) ikililerine karşılık gelen noktalar, x0y dik koordinat sisteminde işaretlenirse, bu noktaların bileşiminin bir doğru olduğu görülür.

Bu yüzden, $ax+by=c$ biçimindeki denklemlere, **doğrusal denklemler** (lineer denklemler) de denir.

ÖRNEK: $2x-y=2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

y, eşitliğin bir tarafında yalnız bırakılırsa;

$y=2x-2$ elde edilir.

Buna göre, $(x,\,2x-2)$ biçimindeki bütün (x,y) ikilileri denklemi sağlayacaktır.

Örneğin;

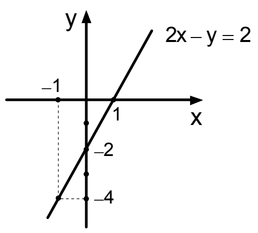
$x=-1$ için $y=2(-1)-2 \Rightarrow y=-4$
$x=0$ için $y=2\cdot(0)-2 \Rightarrow y=-2$
$x=1$ için $y=2\cdot(1)-2 \Rightarrow y=0$

olup $(-1,-4)$, $(0,-2)$, $(1,0)$ ikilileri denklemi sağlayan sonsuz sayıdaki (x,y) ikililerinden bir kaçıdır.

Denklemin çözüm kümesi;

$\mathbf{Ç=\{(x,\,2x-2)\mid x\in R\}}$ olur.

$2x-y=2$ denkleminin çözüm kümesine, x0y dik koordinat sisteminde karşılık gelen doğrunun grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



■ BİRİNCİ DERECEDEN, İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEM SİSTEMLERİ

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{array}\right\} \quad \text{veya} \quad \left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{array}\right\}$$

gibi, iki veya daha çok denklemin oluşturduğu sisteme **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir.

Denklem sistemini oluşturan denklemlerden her birinin bir çözüm kümesi vardır. Bu çözüm kümelerinin kesişimi, **denklem sisteminin çözüm kümesi** olur. Başka deyişle; sistemdeki denklem-lerin her birini sağlayan (x,y) ikililerinin oluştur-duğu küme, sistemin çözüm kümesidir.

❋ $\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{array}\right\}$

sisteminin çözüm kümesi aşağıdaki yöntemlerle bulunur.

I. YOK ETME YÖNTEMİ

Denklemlerdeki x lerin ya da y lerin katsayıları, denklemler uygun sayılarla çarpılarak eşitlenir. Gereğine göre, taraf tarafa toplama veya çıkarma yapılarak x veya y lerden biri yok edilir; elde edilen bir bilinmeyenli denklem çözülür.

ÖRNEKLER

1. $\left.\begin{array}{l} \mathbf{2x+y=1} \\ \mathbf{x-y=2} \end{array}\right\}$ **sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

y lerin katsayıları, işaretleri dikkate alınmazsa, eşittir.

Denklemler taraf tarafa toplanırsa;

$$\begin{array}{rl} 2x+y=1 & \\ +\quad x-y=2 & \\ \hline 3x=3 & \Rightarrow x=1 \end{array}$$

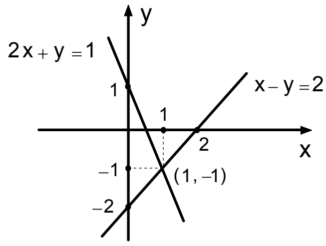
$x=1$ değeri denklemlerden birinde, örneğin birincide, yerine konursa;

$2\cdot 1+y=1 \Rightarrow y=-1$ bulunur.

Sistemi sağlayan (x,y) ikilisi $(1,-1)$ dir.

$Ç=\{(1,-1)\}$ olur.

Denklem sistemini oluşturan denklemlerin belirttiği doğruları x0y koordinat sisteminde çizerek çözümü grafik üzerinde de görelim:



Şekilden de görüldüğü gibi, sistemin çözüm kümesini oluşturan (1,–1) ikilisi, doğruların kesiştiği noktanın koordinatlarıdır.

2. $\left.\begin{aligned}3x+2y=0\\x+2y=4\end{aligned}\right\}$ **sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

y lerin katsayıları, eşittir.

Denklemler taraf tarafa çıkarılırsa;

$$\begin{aligned}3x+2y&=0\\\mp x\mp 2y&=\mp 4\\\hline 2x&=-4 \quad\Rightarrow\quad x=-2\end{aligned}$$

$x=-2$ değeri $3x+2y=0$ denkleminde yerine konursa;

$3\cdot(-2)+2y=0 \;\Rightarrow\; y=3$ bulunur.

$Ç=\{(-2,3)\}$ olur.

3. $\left.\begin{aligned}2x+3y=7\\3x-5y=-18\end{aligned}\right\}$ **sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Birinci denklemin iki tarafı 5 ile, ikinci denklemin iki tarafı 3 ile çarpılırsa y lerin katsayıları eşitlenir.

$\left.\begin{aligned}5\cdot/\;\; 2x+3y&=7\\3\cdot/\;\; 3x-5y&=-18\end{aligned}\right\}$

$\Rightarrow \left.\begin{aligned}10x+15y&=35\\+\;\;9x-15y&=-54\end{aligned}\right\}$ taraf tarafa toplanýrsa

$19x=-19 \quad\Rightarrow\quad x=-1$

$x=-1$ değeri $2x+3y=7$ denkleminde yerine konursa;

$2\cdot(-1)+3y=7 \;\Rightarrow\; y=3$ bulunur.

$Ç=\{(-1,3)\}$ olur.

II. YERİNE KOYMA YÖNTEMİ

Bilinmeyenlerden biri, denklemlerden birinden çekilerek, diğer denklemde yerine konur. Böylece elde edilen bir bilinmeyenli denklem çözülür.

ÖRNEK

$\left.\begin{aligned}2x+3y=-1\\3x+y=-5\end{aligned}\right\}$ **sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Ikinci denklemden y çekilir;

$3x+y=-5 \;\Rightarrow\; y=-3x-5$

ve $y=-3x-5$ değeri birinci denklemde yerine konursa;

$2x+3\cdot(-3x-5)=-1 \;\Rightarrow\; -7x-15=-1$

$\Rightarrow\; x=-2$ bulunur.

$x=-2$ değeri $y=-3x-5$ eşitliğinde yerine konursa;

$y=-3\cdot(-2)-5 \;\Rightarrow\; y=1$ elde edilir.

$Ç=\{(-2,1)\}$ olur.

❋ $\left.\begin{aligned}ax+by&=c\\a_1x+b_1y&=c_1\\a_2x+b_2y&=c_2\end{aligned}\right\}$

sisteminin çözüm kümesini bulmak için; denklemlerden herhangi ikisinin oluşturduğu sistem, yukarıda açıklanan yöntemlerle çözülür.

Bulunan çözüm diğer denklemi de sağlıyorsa bu çözüm, sistemin de çözümü olur; sağlamıyorsa sistemin çözümü boş kümedir.

ÖRNEK

$\left.\begin{aligned}2x-y&=7\\3x-2y&=12\\4x+3y&=-1\end{aligned}\right\}$ **sistemini çözünüz.**

ÇÖZÜM :

① ve ② numaralı denklemlerin oluşturduğu sistemi çözelim.

① $2x-y=7$
② $3x-2y=12$

① den $y=2x-7$ çekilip ② de yerine konursa;

$3x-2(2x-7)=12 \;\Rightarrow\; 3x-4x+14=12$

$\Rightarrow\; x=2$ bulunur.

$x = 2$ değeri $y = 2x - 7$ de yerine konursa;

$y = 2 \cdot (2) - 7 \Rightarrow y = -3$ elde edilir.

$(2,-3)$ ikilisi ③ numaralı denklemde yerine konursa;

$4 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = -1 \Rightarrow -1 = -1$ olur.

$(2,-3)$ ikilisi ③ numaralı denklemi de sağladığından çözüm kümesi,

$Ç = \{(2,-3)\}$ tür.

Bu sonuç, sistemi oluşturan denklemlerin belirttiği doğruların $(2,-3)$ noktasında kesiştiğini gösterir.

DENKLEM SİSTEMİNİ OLUŞTURAN DOĞRULARIN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

Analitik geometri derslerinizden hatırlayacağı-nız gibi;

$ax + by = c$ doğru denklemi $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ biçiminde yazıldığında x in katsayısı olan $-a/b$ değeri doğrunun eğimini verir.

Eğimleri eşit olan doğrular birbirine paraleldir.

Eğimleri farklı olan, aynı düzlemdeki doğrular, bir noktada kesişirler.

$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{array}\right\}$ denklem sisteminde;

I. $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k$ **ise;**

$a = a_1 \cdot k$, $b = b_1 \cdot k$ ve $c = c_1 \cdot k$ olup denklem-lerden biri, diğerinin k $(k \neq 0)$ ile çarpımıdır. Yani denklemler birbirinin dengi olup aynı doğruyu gösterirler. Başka bir deyişle; iki denklemin göster-diği doğrular çakışıktır. Bu durumda, doğrulardan biri üzerindeki bütün noktaların koordinatları, iki denklemi de sağlayacağından sistemin çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

II. $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1} = k$ **ise;**

$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} \Rightarrow \frac{-a}{b} = \frac{-a_1}{b_1}$

olup, eğimleri eşit olacağından, doğrular paraleldir.

Denklemlerin ikisini de birlikte sağlayan bir (x, y) ikilisi bulunamayacağından, sistemin çözüm kümesi boş kümedir.

III. $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$ **ise;**

$\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1} \Rightarrow \frac{a}{b} \neq \frac{a_1}{b_1} \Rightarrow \frac{-a}{b} \neq \frac{-a_1}{b_1}$

olup, eğimleri eşit olacağından, doğrular bir noktada kesişirler.

ÖRNEKLER

1. $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 2 \\ -4x + 2y = -4 \end{array}\right\}$ **sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4}$ olduğundan doğrular çakışıktır. Doğrulardan biri, örneğin, $2x - y = 2$ üzerindeki noktaların koordinatları iki denklemi de sağlayacaktır.

$2x - y = 2 \Rightarrow y = 2x - 2$ olup çözüm kümesi;

$Ç = \{(x, 2x - 2) \mid x \in R\}$ dir.

2. $\left.\begin{array}{l} x - 3y = 2 \\ 3x - 9y = 4 \end{array}\right\}$ **sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\frac{1}{3} = \frac{-3}{-9} \neq \frac{2}{4}$ olduğundan doğrular paraleldir. Sistemi sağlayan hiçbir (x, y) ikilisi bulunamaz.

$Ç = \varnothing$ dir.

NOT: Birinci denklem (-3) ile çarpılıp, iki denklem taraf tarafa toplanırsa;

$$\begin{array}{rl} & -3x + 9y = -6 \\ + & 3x - 9y = 4 \\ \hline & 0 = -2 \end{array}$$ elde edilir.

Böylece, çözüm kümesinin boş küme olacağı cebirsel olarak da görülmüş olur.

İKİNCİ DERECEDEN, İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

$a, b, c, d, e, f \in R$ ve a, b, c sayılarından en az biri sıfırdan farklı olmak üzere;

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

açık önermesine, **ikinci dereceden, iki bilinmeyenli denklem** denir. Açık önermeyi doğrulayan (x, y) ikililerinin oluşturduğu küme denklemin **çözüm kümesi**dir.

Denklemi sağlayan (x, y) ikililerine karşılık gelen noktalar x0y dik koordinat sisteminde işaretlenirse, bu noktaların bileşimi, "**konik**" adı verilen eğriler olur.

Koniklerin biçimlerini ve özelliklerini "Analitik geometri" derslerinizde inceleyeceksiniz.

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ denkleminin çözüm kümesi, sıfır elemanlı, bir elemanlı ya da sonsuz elemanlı olabilir.

ÖRNEKLER

1. $2x^2 + 3y^2 + 4 = 0$ **denkleminin çözüm küme-sini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\forall x$, $x \in R$ için $2x^2 \geq 0$,

$\forall y$, $y \in R$ için $3y^2 \geq 0$ ve $4 > 0$

olduğundan $2x^2 + 3y^2 + 4$ toplamı daima pozitif olacaktır. Denklemi sağlayan hiçbir (x, y) ikilisi yoktur.

$Ç = \varnothing$

2. $4x^2 + y^2 = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\forall x$, $x \in R$ için $4x^2 \geq 0$ ve

$\forall y$, $y \in R$ için $y^2 \geq 0$

olduğundan $4x^2 + y^2 = 0$ denklemini yalnız $x = 0$ ve $y = 0$ değerleri sağlar.

$Ç = \{(0, 0)\}$ olur.

3. $x^2 + 2x - y - 3 = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Verilen denklemde y çekilirse, $y = x^2 + 2x - 3$ elde edilir.

Buna göre $(x, x^2 + 2x - 3)$ biçimindeki ikililerin her biri denklemin bir köküdür.

$Ç = \{(x, x^2 + 2x - 3) \mid x \in R\}$ dir.

$y = x^2 + 2x - 3$ denklemini sağlayan (x, y) ikililerine x0y koordinat sisteminde karşılık gelen nok-taların bileşiminin bir parabol olduğunu biliyorsunuz. Parabol bir tür koniktir.

4. $x^2 - y^2 = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Denklemin sol tarafını çarpanlarına ayırıp her çarpanı ayrı ayrı sıfıra eşitleyebiliriz.

$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y) = 0$

$\Rightarrow x - y = 0$ veya $x + y = 0$

$\Rightarrow y = x$ veya $y = -x$

$x = t$ denirse;

(t, t) ve $(t, -t)$ biçimindeki ikililerin her biri denklemin bir köküdür. Buna göre, denklemin çözüm kümesi;

$Ç = \{(t, t) \mid t \in R\} \cup \{(t, -t) \mid t \in R\}$ veya

$Ç = \{(x, y) \mid y = x \text{ veya } y = -x;\ x \in R,\ y \in R\}$

olur.

x0y dik koordinat sisteminde çözüm kümesine karşılık gelen grafik, $y = x$ ve $y = -x$ doğrularının bileşimidir.

5. $xy + 2x - y - 2 = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Denklemin sol tarafını çarpanlarına ayırıp her çarpanı ayrı ayrı sıfıra eşitleyelim:

$xy + 2x - y - 2 = 0 \Rightarrow x(y + 2) - (y + 2) = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(y + 2) = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 0$ veya $y + 2 = 0$

$\Rightarrow x = 1$ veya $y = -2$

$t \in R$ olmak üzere $(1, t)$ ve $(t, -2)$ biçimindeki ikililerin her biri denklemin bir çözümüdür.

Buna göre denklemin çözüm kümesi;

$Ç = \{(1, t) \mid t \in R\} \cup \{(t, -2) \mid t \in R\}$ veya

$Ç = \{(x, y) \mid x = 1 \text{ veya } y = -2;\ x \in R,\ y \in R\}$

olur.

■ İKİNCİ DERECEDEN, İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEM SİSTEMLERİ

Ikinci dereceden, iki bilinmeyenli birden fazla denklemin oluşturduğu sisteme **ikinci dereceden, iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir. Her denklemin ayrı ayrı çözüm kümelerinin kesişimi sistemin **çözüm kümesi** olur.

Birinci dereceden, iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözüm yöntemleri, ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözümü için de geçerlidir.

ÖRNEKLER

1. $\left.\begin{matrix} \mathbf{xy = 4} \\ \mathbf{2x + y = 6} \end{matrix}\right\}$ **sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Ikinci denklemden y değeri çekilip, birinci denklemde yerine konarak elde edilen bir bilinme-yenli denklem çözülür.

$2x + y = 6 \Rightarrow y = 6 - 2x$
$xy = 4 \Rightarrow x(6 - 2x) = 4$
$\Rightarrow -2x^2 + 6x - 4 = 0$
$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$
$x_1 = 1 \ , \ x_2 = 2$

Elde edilen x değerleri $y = 6 - 2x$ denkleminde yerlerine konursa,

$x_1 = 1$ için $y_1 = 6 - 2 \cdot 1 \Rightarrow y_1 = 4$
$x_2 = 1$ için $y_2 = 6 - 2 \cdot 2 \Rightarrow y_2 = 2$
bulunur.

Denklemin çözüm kümesi;
$Ç = \{(1,4), (2,2)\}$ olur.

2. $\left.\begin{matrix} \mathbf{x^2 + 2y^2 = 17} \\ \mathbf{3x^2 + y^2 = 31} \end{matrix}\right\}$ **sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Ikinci denklemi (-2) ile çarpıp, denklemleri taraf tarafa toplayalım:

$$\begin{array}{rl} & x^2 + 2y^2 = 17 \\ + & -6x^2 - 2y^2 = -62 \\ \hline & -5x^2 = -45 \end{array}$$

$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_1 = -3 \ , \ x_2 = 3$ bulunur.

$3x^2 + y^2 = 31$ denkleminde x yerine $x_1 = -3$ değeri konursa;

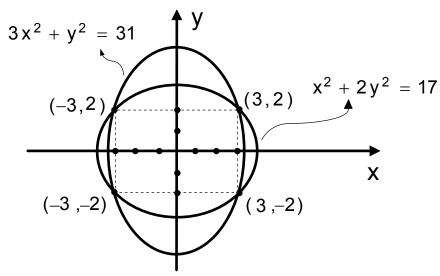
$3(-3)^2 + y^2 = 31 \Rightarrow y^2 = 4$
$\Rightarrow y_1 = -2 \ , \ y_2 = 2$

$x_2 = 3$ için de aynı y değerlerinin elde edilece-ğine dikkat ediniz.

Buna göre, çözüm kümesi;
$Ç = \{(-3,-2), (-3,2), (3,-2), (3,2)\}$ olur.

❋ Her ne kadar, $x^2 + 2y^2 = 17$ ve $3x^2 + y^2 = 31$ denklemlerine, x0y dik koordinat sisteminde karşılık gelen grafiklerin çizimi konumuz dışında ise de; çözümü grafik üzerinde incelemenizin yararlı olacağı düşüncesi ile aşağıdaki çizim yapılmıştır.

Denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanlarının, grafiklerin kesiştiği noktaların koordinatları olduğuna dikkat ediniz.



3. $\left.\begin{matrix} \mathbf{x^2 + y^2 - 3 = 0} \\ \mathbf{x^2 - y - 1 = 0} \end{matrix}\right\}$ **sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

1. yol: Denklemler taraf tarafa çıkarılırsa;

$$\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ \mp x^2 \pm y \pm 1 = 0 \\ \hline y^2 + y - 2 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow y_1 = 1 \ , \ y_2 = -2$$

Bulunan y değerleri $x^2 - y - 1 = 0$ denkleminde yerine konulursa;

$y_1 = 1$ için,
$x^2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2} \ , \ x_2 = -\sqrt{2}$
$y_2 = -2$ için, $x^2 + 2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$

$x^2 = -1$ denklemini sağlayan hiçbir gerçek sayı bulunmayacağından $y = -2$ olamaz.

Öyleyse çözüm kümesi;
$Ç = \{(\sqrt{2},1), (-\sqrt{2},1)\}$ olur.

2. yol

① $x^2+y^2-3=0$
② $x^2-y-1=0$

② numaralı denklemde y çekilip, ① numaralı denklemde yerine konursa;

$x^2-y-1=0 \Rightarrow y=x^2-1$

$x^2+(x^2-1)^2-3=0$ denklemi elde edilir.

$x^2+(x^2-1)^2-3=0 \Rightarrow x^4-x^2-2=0$

$\Rightarrow (x^2-2)(x^2+1)=0$

$\Rightarrow x^2-2=0 \vee x^2+1=0$

$x^2+1=0$ denklemini sağlayan hiçbir gerçek sayı yoktur.

$x^2-2=0 \Rightarrow x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2}$

Bulunan x değerleri $y=x^2-1$ denkleminde yerlerine konursa;

$x_1=-\sqrt{2}$ için $y_1=(-\sqrt{2})^2-1 \Rightarrow y_1=1$

$x_2=\sqrt{2}$ için $y_2=(\sqrt{2})^2-1 \Rightarrow y_2=1$

bulunur.

$Ç=\{(\sqrt{2},1),(-\sqrt{2},1)\}$ olur.

4. $\left.\begin{array}{l}\mathbf{x+y=-3}\\ \mathbf{x\cdot y=-10}\end{array}\right\}$ **sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Sistem, yerine koyma yöntemi ile çözülebilir.

Biz burada, daha pratik, başka bir yol izleyelim :

x ve y sayılarını, bir ikinci derece denkleminin kökleri olarak kabul edelim. Kökleri x ve y olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin,

$t^2-(x+y)t+x\cdot y=0$

biçiminde yazılabileceğini biliyoruz.

$x+y=-3$ ve $x\cdot y=-10$ değerleri yerlerine konursa;

$t^2+3t-10=0$ denklemi elde edilir.

Bu denklemin, $t_1=-5$ ve $t_2=2$ köklerinden herhangi biri x değeri olarak kabul edildiğinde diğeri y değeri olur.

Öyleyse çözüm kümesi;

$Ç=\{(-5,2),(2,-5)\}$ dir.

5. $\left.\begin{array}{l}\mathbf{x+y-2xy=8}\\ \mathbf{2x+2y+xy=1}\end{array}\right\}$ **sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Sistemi oluşturan denklemlerde, x ile y bilinmeyenlerinin yerleri değiştirilirse denklemlerin değişmeyeceğini görünüz. Böyle denklemlere **simetrik denklemler** denir.

Simetrik denklem sistemlerinin çözümünde, x ve y değerleri ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin kökleri olarak kabul edilir. $x+y$ ve $x\cdot y$ değerleri bulunarak bu denklem kurulur ve çözülür.

$x+y=u$ ve $x\cdot y=v$ dönüşümü yapılırsa, verilen denklem sistemi;

$\left.\begin{array}{l}u-2v=8\\ 2u+v=1\end{array}\right\}$ sistemine dönüþür.

Ikinci denklem, (2) ile çarpılarak denklemler taraf tarafa toplanırsa;

$$\begin{array}{r} u-2v=8\\ +\;\;4u+2v=2\\ \hline 5u=10\end{array} \Rightarrow u=2\,;$$

$u=2$ değeri $2u+v=1$ denkleminde yerine konursa;

$2\cdot 2+v=1 \Rightarrow v=-3$ bulunur.

Böylece verilen denklem sistemine denk olan;

$\left.\begin{array}{l}x+y=2\\ x\cdot y=-3\end{array}\right\}$ sistemi elde edilir.

Denklemi sağlayan x ve y değerleri;

$t^2-2t-3=0$ denkleminin kökleri olarak kabul edilebilir. $t_1=-1$ ve $t_2=3$ olup,

$Ç=\{(-1,3),(3,-1)\}$ bulunur.

6. $\left.\begin{array}{l}\mathbf{x^2+y^2-x-y=4}\\ \mathbf{x+y-xy=3}\end{array}\right\}$ **sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ özdeşliği kullanılarak sistem;

$\left.\begin{array}{r}(x+y)^2-2xy-(x+y)=4\\ x+y-xy=3\end{array}\right\}$ biçiminde yazýlýp,

$x+y=u$ ve $x\cdot y=v$ dönüşümü yapılırsa;

$\left.\begin{array}{l}u^2-2v-u=4\\ u-v=3\end{array}\right\}$ sistemi elde edilir.

$u-v=3 \Rightarrow v=u-3$ değeri birinci denklem-de yerine konursa;

$u^2-2(u-3)-u=4 \Rightarrow u^2-3u+2=0$

$\Rightarrow u_1=1,\ u_2=2$

Bu değerler $v=u-3$ denkleminde yerine konursa;

$u_1=1$ için $v_1=1-3 \Rightarrow v_1=-2$

$u_2=2$ için $v_2=2-3 \Rightarrow v_2=-1$ elde edilir.

Böylece; verilen ilk sisteme denk olan

$$\underset{(\mathrm{I})}{\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x\cdot y=-2 \end{array}\right\}} \vee \underset{(\mathrm{II})}{\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ x\cdot y=-1 \end{array}\right\}}$$

sistemi elde edilir.

(I) ve (II) sistemlerinin çözüm kümelerinin bileşimi, verilen sistemin çözüm kümesini oluşturur.

(I) sistemini sağlayan x ve y değerleri,

$t^2-t-2=0$ denkleminin kökleri olarak kabul edilebilir.

$t_1=-1$ ve $t_2=2$ olup

$Ç_1=\{(-1,2),(2,-1)\}$ bulunur.

(II) sistemini sağlayan x ve y değerleri,

$t^2-2t-1=0$ denkleminin kökleridir.

$t_1=1+\sqrt{2}$ ve $t_2=1-\sqrt{2}$ olup

$Ç_2=\left\{(1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}),(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})\right\}$

bulunur.

Öyleyse, verilen sistemin çözüm kümesi;

$Ç=Ç_1\cup Ç_2$

$Ç=\left\{(-1,2),(2,-1),(1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}),(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})\right\}$

olur.

7. $\left.\begin{array}{l} \mathbf{x^2-x+y=5} \\ \mathbf{|x+y|=5} \end{array}\right\}$ **sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

"$|x+y|=5$" önermesi,

"$(x+y=-5)$ veya $(x+y=5)$" önermesine denk olduğundan verilen denklem sistemi;

$$\underset{(\mathrm{I})}{\left.\begin{array}{l} x^2-x+y=5 \\ x+y=-5 \end{array}\right\}} \vee \underset{(\mathrm{II})}{\left.\begin{array}{l} x^2-x+y=5 \\ x+y=5 \end{array}\right\}}$$

sistemine denktir.

(I) sistemini çözelim:

Ikinci denklemden elde edilen $y=-x-5$ değeri, birinci denklemde yerine konursa;

$x^2-x+(-x-5)=5 \Rightarrow x^2-2x-10=0$

$x_1=1-\sqrt{11},\ x_2=1+\sqrt{11};$

Bu x değerleri, $y=-x-5$ denkleminde yerine konursa;

$y_1=-6+\sqrt{11},\ y_2=-6-\sqrt{11}$ bulunur.

$y_2=-2+5 \Rightarrow y_2=3$ bulunur.

$Ç_1=\left\{(1-\sqrt{11},-6+\sqrt{11}),(1+\sqrt{11},-6-\sqrt{11})\right\}$

olur.

(II) sistemini çözelim:

Ikinci denklemden elde edilen $y=-x+5$ değeri, birinci denklemde yerine konursa;

$x^2-x-x+5=5 \Rightarrow x^2-2x=0$

$x_1=0,\ x_2=2;$

Bu x değerleri, $y=-x+5$ denkleminde yerine konursa;

$y_1=0+5 \Rightarrow y_1=5,$

$y_2=-2+5 \Rightarrow y_2=3$ bulunur.

$Ç_2=\{(0,5),(2,3)\}$

Öyleyse, sistemin çözüm kümesi;

$Ç=Ç_1\cup Ç_2$

$Ç=\left\{\left(1-\sqrt{11},-6+\sqrt{11}\right),\left(1+\sqrt{11},-6-\sqrt{11}\right),(0,5),(2,3)\right\}$

olur.

8. $\left.\begin{array}{l} \mathbf{x^2-y^2-2x+2y=0} \\ \mathbf{x^2+y^2+y-1=0} \end{array}\right\}$ **sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Yok etme yöntemini veya yerine koyma yöntemeni doğrudan doğruya uygulamanın zor olduğunu görünüz.

Birinci denklemin sol tarafı çarpanlarına ayrılabilir.

$x^2-y^2-2x+2y=0$

$\Rightarrow (x-y)(x+y)-2(x-y)=0$

$\Rightarrow (x-y)(x+y-2)=0$

$\Rightarrow x-y=0$ veya $x+y-2=0$

" $x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0$" önermesi

" $x - y = 0$ veya $x + y - 2 = 0$" önermesine denk olduğundan,

Verilen denklem sistemi;

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 + y - 1 = 0 \end{array}\right\} \vee \left.\begin{array}{l} x + y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + y - 1 = 0 \end{array}\right\}$$

(I) (II)

sistemine denktir.

(I) sistemini çözelim:
Birinci denklemden elde edilen y=x değeri ikinci denklemde yerine konursa;

$$x^2 + x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

$x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}$ ve

$x_1 = -1$ için $y_1 = -1$;

$x_2 = \frac{1}{2}$ için $y_2 = \frac{1}{2}$

elde edilir.

9. $\left.\begin{array}{l} \mathbf{x^3 - y^3 = 9} \\ \mathbf{x - y = 3} \end{array}\right\}$ **sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$ özdeşliğini hatırlayınız!

x-y = 3 değeri yerine konursa;

$$x^3 - y^3 = 9 \Rightarrow (3)^3 + 3xy(3) = 9$$

$\Rightarrow$ xy = -2 elde edilir.

Verilen sistem;

$\left.\begin{array}{l} xy = -2 \\ x - y = 3 \end{array}\right\}$ sistemine denktir.

x-y = 3 $\Rightarrow$ y = x-3 değeri xy = -2 denkleminde yerine konursa;

$$x(x - 3) = -2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$

Bu x değerleri y = x-3 denkleminde yerlerine konursa;

$y_1 = 1 - 3 \Rightarrow y_1 = -2$
$y_2 = 2 - 3 \Rightarrow y_2 = -1$ bulunur.

Buna göre, çözüm kümesi;
Ç= $\{(1,-2),(2,-1)\}$ olur.

10. $\left.\begin{array}{l} \mathbf{\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3} \\ \mathbf{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}} \end{array}\right\}$ **sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

Birinci denklemden $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} - 3$ değeri çekilip ikinci denklemde yerine konursa;

$$\frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{x} - 3\right)^2 = 5 \Rightarrow \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x} + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$x_1 = 1$, $x_2 = 1/2$ bulunur.

Bu x değerleri $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} - 3$ denkleminde yerine konursa;

$x_1 = 1$ için $\frac{1}{y} = 1 - 3 \Rightarrow y = \frac{-1}{2}$

$x_2 = \frac{1}{2}$ için $\frac{1}{y} = 2 - 3 \Rightarrow y = -1$ elde edilir.

Ç= $\left\{\left(1,-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-1\right)\right\}$ olur.

11. $\left.\begin{array}{l} xy + y^2 = -2 \\ 2x^2 - y^2 = 14 \end{array}\right\}$ **sisteminin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM
Bilinmeyen içeren terimlerin ikinci dereceden olduğu denklem sistemlerini çözmek için y=mx dönüşümü yapılır.

Denklemlerdeki xy, y^2, $2x^2$ ve $-y^2$ terimlerinin ikinci dereceden olduğunu görünüz.

y=mx dönüşümü yapılırsa;

$$\left.\begin{array}{l} x.(mx)+(mx)^2=-2 \\ 2x^2-(mx)^2=14 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} mx^2+m^2x^2=-2 \\ 2x^2-m^2x^2=14 \end{array}\right\}$$

denklemler, taraf tarafa bölünürse;

$$\frac{m+m^2}{2-m^2}=\frac{-1}{7}$$

$\Rightarrow$ $7m+7m^2=-2+m^2$
$\Rightarrow$ $6m^2+7m+2=0$

$$m_1=\frac{-1}{2} \quad , \quad m_2=\frac{-2}{3}$$

Böylece, $y=\frac{-1}{2}x$ veya $y=\frac{-2}{3}x$ olduğu görülür.

Bu y değerlerini $2x^2 - y^2 = 14$ denkleminde yerine koyalım:

$y=\frac{-1}{2}x$ için ;

$$2x^2-y^2=14 \Rightarrow 2x^2-\frac{1}{4}x^2=14$$
$$\Rightarrow 7x^2=56$$
$$x_1=-2\sqrt{2} \quad , \quad x_2=2\sqrt{2}$$

Bu x değerlerine karşılık gelen y değerleri de

$y_1=\sqrt{2}$ ve $y_2=-\sqrt{2}$ olur.

$y=\frac{-2}{3}x$ için;

$$2x^2-y^2=14 \Rightarrow 2x^2-\frac{4}{9}x^2=14$$
$$\Rightarrow 14x^2=9\cdot 14$$
$$x_1=-3 \ , \ x_2=3$$

Bu x değerlerine karşılık gelen y değerleri de

$y_1=2$ ve $y_2=-2$ olur.

(-3,2) ve (3,-2) çözüm kümesinin diğer iki elemanıdır.

Öyleyse verilen sistemin çözüm kümesi;

$$Ç=\left\{\left(-2\sqrt{2},\sqrt{2}\right),\left(2\sqrt{2},-\sqrt{2}\right),\left(-3,2\right),\left(3,-2\right)\right\}$$

dir.

❑ BİRİNCİ DERECEDEN ÇOK BİLİNMEYENLİ DENKLEM SİSTEMLERİ

Birinci dereceden, ikiden çok bilinmeyen içe-ren denklemleri ve denklem sistemlerini, geniş biçimde, "Doğrusal Cebir" konuları içinde göreceksiniz.

Biz burada sadece, birinci dereceden iki bilin- meyenli denklem sistemine indirgenebilen çok bi- linmeyenli denklem sistemlerinin çözüm kümeleri- nin bulunması ile ilgili birkaç örnek vermekle yetineceğiz.

ÖRNEKLER

1.

$$\left.\begin{array}{ll} ① & x+y+z=2 \\ ② & 2x-y+3z=-1 \\ ③ & x+2y-z=2 \end{array}\right\}$$

sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklemler ikişer ikişer alınarak oluşturulan, iki farklı denklem sisteminde aynı bilinmeyenler yok edilerek sistem, iki bilinmeyenli iki denkleme indir- genebilir.

① ve ③ numaralı denklemler taraf tarafa topla- nırsa;

$$\begin{array}{rl} x+y+z= & 2 \\ +\ x+2y-z= & 2 \\ \hline 2x+3y= & 4 \end{array} \qquad ④$$

③ numaralı denklem (3) ile çarpılıp ② numaralı denklemle taraf tarafa toplanırsa;

$$\begin{array}{rl} 2x-y+3z = & -1 \\ 3x+6y-3z = & 6 \\ \hline 5x+5y = & 5 \end{array}$$
$$\Rightarrow \quad x+y = 1 \qquad ⑤$$

④ ve ⑤ numaralı denklemlerin oluşturduğu sistem çözülürse;

$$\left.\begin{array}{r}2x+3y=4\\ x+y=1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r}2x+3y = 4\\ +\ -2x-2y = -2\\ \hline x = 2\end{array}$$

x=2 değeri x+y=1 denkleminde yerine konursa;

2+y=1 $\Rightarrow$ y = -1

x=2 ve y= -1 değerleri x+y+z=2 denkleminde yerlerine konursa;

2-1+z=2 $\Rightarrow$ z=1 bulunur.

x=2 , y= -1 ve z=1 olup

çözüm kümesi;

Ç= $\{(2,-1,1)\}$ dir.

2. x,y,z negatif olmayan gerçek sayılar olduğuna göre;

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{3x+2y+z=14}\\ \mathbf{x+2y+3z=10}\end{array}\right\}$$

sistemini sağlayan en büyük z değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

Denklemleri taraf tarafa çıkarırsak;

$$\begin{array}{r}3x+2y+z = 14\\ \overline{+}x\ \overline{+}2y\ \overline{+}3z = \overline{+}10\\ \hline 2x-2z = 4\end{array} \Rightarrow x - z = 2$$

x = t dersek , z = t - 2 olur.

x ve z nin t cinsinden değerleri 3x+2y+z=14 denkleminde yerlerine konursa;

3(t)+2y+(t-2)=14
$\Rightarrow$ 2y=14-3t-t+2
$\Rightarrow$ y=8-2t bulunur.

Sistemin çözüm kümesi;

Ç= $\{(t, 8-2t, t-2) / t \in R\}$ olur.

x≥0 , y≥0 ve z≥0 olduğundan;

$$\left.\begin{array}{l}t \geq 0\\ 8-2t \geq 0\\ t-2 \geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow 2 \leq t \leq 4 \text{ olur.}$$

z=t-2 değerinin en büyük olması için t en büyük seçilmelidir.

t ye verilebilecek en büyük değer (4) olduğuna göre, z nin en büyük değeri,

z=4-2 $\Rightarrow$ z=2 dir.

3.

$$\left.\begin{array}{ll}① & \mathbf{x+y+z+t=5}\\ ② & \mathbf{2x+y-z=-1}\\ ③ & \mathbf{x-y+t=0}\\ ④ & \mathbf{3x+2y=1}\end{array}\right\}$$

sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

① ve ② numaralı denklemler taraf tarafa toplanarak z yok edilir.

$$\begin{array}{r}x+y+z+t = 5\\ +\ \ 2x+y-z = -1\\ \hline 3x+2y+t = 4\end{array} \quad ⑤$$

④ ve ⑤ numaralı denklemlerin oluşturduğu sistemden,

$$\left.\begin{array}{l}3x+2y=1\\ 3x+2y+t=4\end{array}\right\} \Rightarrow t=3 \text{ bulunur.}$$

t=3 değeri x-y+t=0 denkleminde yerine konursa;

x-y+3=0 $\Rightarrow$ x-y= -3 ⑥

④ ve ⑥ numaralı denklemlerin oluşturduğu sistemden;

$$\left.\begin{array}{r}3x+2y=1\\ x-y=-3\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r}3x+2y = 1\\ +\ 2x-2y = -6\\ \hline 5x = -5\end{array}$$

X= -1 ve y=2 bulunur.

Bu x ve y değerleri ② numaralı denklemde yerine konursa;

2x+y-z= -1 $\Rightarrow$ 2(-1)+2-z= -1
$\Rightarrow$ z=1 bulunur.

x=-1 , y=2 , z=1 ve t=3 olduğuna göre sistemin çözüm kümesi;

Ç={(-1,2,1,3)} olur.

❑ DÜZLEMDE, PARABOL İLE DOĞRUNUN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

$$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{array}\right\}$$

sisteminin çözüm kümesinin, $y=ax^2+bx+c$ parabolü ile $y=mx+n$ doğrusunun kesiştiği noktala-rın koordinatlarının oluşturduğu ikililer kümesi olduğunu biliyoruz.

Ikinci denklemdeki $y=mx+n$ değerinin birinci denklemde yerine konulmasıyla elde edilen,
$ax^2+bx+c=mx+n$
$ax^2+(b-m)x+c-n=0$ denkleminin kökleri, parabol ile doğrunun kesim noktalarının apsislerini verir.

$ax^2+(b-m)x+c-n$ denkleminin birbirinden farklı iki gerçek kökü varsa, yani denklemin diskrimi-nantı $\Delta>0$ ise parabol ile doğru, farklı iki noktada kesişir.

$ax^2+(b-m)x+c-n=0$ denkleminin iki kat kökü varsa, yani $\Delta=0$ ise parabol ile doğrunun kesiştiği noktalar çakışıktır. Bu durumda parabol ile doğru birbirine teğettir.

$ax^2+(b-m)x+c-n=0$ denkleminin gerçek kökü yoksa, yani $\Delta>0$ ise parabol ile doğru kesişmez.

ÖRNEKLER

1. $y=x^2-2x+3$ parabolü ile $y=-x+5$ doğrusunun kesiştikleri noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM

Parabol denkleminde y yerine -x+5 değeri konulmasıyla elde edilen,

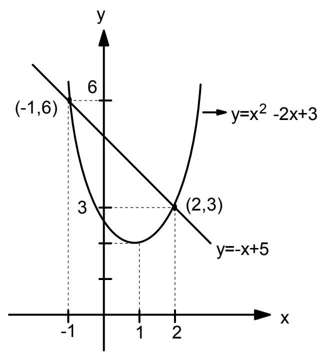
$x^2-2x+3= -x+5$
$\Rightarrow$ $x^2-x-2=0$ denkleminin $x_1 = -1$ ve $x_2=2$ kökleri kesim noktalarının apsisleri olur.

Bu x değerleri $y= -x+5$ denkleminde yerine konursa;

$x_1= -1$ için $y_1 =-(-1)+5 \Rightarrow y_1 =6$
$x_2=2$ için $y_2 =-(2)+5 \Rightarrow y_2 =3$
elde edilir.

Buna göre, parabol ile doğrunun kesim noktala- rının koordinatları (-1,6) ve (2,3) olur.

Aşağıdaki şekli inceleyiniz.



2. $y=-x^2-x+2$ parabolü ile $y=x+3$ doğrusunun kesim noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Parabol denkleminde y=x+3 değeri yerine konursa,

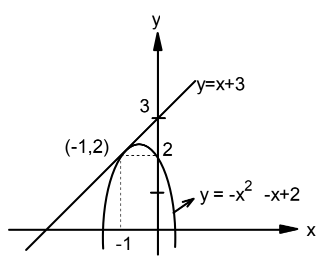
$x+3=-x^2-x+2 \Rightarrow x^2+2x+1=0$
$x_1 = x_2 = -1$ bulunur.

Kökler birbirine eşit olduğundan parabol ile doğru birbirine teğettir. Bu x değeri y=x+3 denkleminde yerine konursa;

$y=(-1)+3 \Rightarrow y=2$ olur.

Parabol ile doğrunun değme noktası (-1,2) dir.

Aşağıdaki şekli inceleyiniz.



3. $y=x+k$ doğrusunun $y=x^2-3x$ parabolüne teğet olması için k ne olmalıdır?

ÇÖZÜM

Parabol ve doğrunun birbirlerine teğet olması için, bunların kesim noktalarının apsislerini veren,

$x^2-3x=x+k$

denkleminin iki kat kökü olmalıdır.

Bunun için de denklemin diskriminantının sıfıra eşit olması gerekir.

$x^2-3x=x+k \Rightarrow x^2-4x-k=0$

$$\Delta=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=(2)^2+k=0$$

$$k=-4$$

k=-4 için $y=x+k$ doğrusu $y=x^2-3x$ parabolüne teğet olur.

4. $y=2x-1$ doğrusu $y=x^2+ax+b$ parabolüne $x=2$ apsisli noktada teğet ise (a,b) ikilisi nedir?

ÇÖZÜM

Parabol ve doğrunun kesim noktalarının apsislerini veren denklem;

$x^2+ax+b=2x-1$
$\Rightarrow x^2+(a-2)x+b+1=0$ dır.

Bu denklemin iki kat kökü olduğunu ve bu kökün (2) olduğunu biliyoruz.

O halde;

$x_1+x_2=-(a-2)=2+2 \Rightarrow a=-2$
$x_1.x_2=b+1=2.2 \Rightarrow b=3$ tür.

$(a,b)=(-2,3)$ olur.

❑ DÜZLEMDE, İKİ PARABOLÜN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

$y=ax^2+bx+c$ ve
$y=a'x^2+b'x+c'$ parabollerinin kesim noktalarının apsislerini veren denklem;

$ax^2+bx+c=a+x^2+b'x+c$
$\Rightarrow (a-a')x2+(b-b')x+c-c'=0$ dır.

Bu denklemin, birbirinden farklı iki gerçek kökü varsa paraboller iki noktada kesişir. Denklemin iki kat kökü varsa paraboller birbirine teğettir. Denkle- min gerçek kökü yoksa parabollerin ortak noktası yoktur.

ÖRNEK

k>0 olmak üzere,
$y=x^2-kx+2$ ve
$y=-3x^2+kx+1$ parabolleri birbirine teğet ise değme noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Paraboller birbirine teğet ise bunların kesim noktalarının apsislerini veren,

$x^2-kx+2=-3x^2+kx+1$
$\Rightarrow 4x^2-2kx+1=0$

denkleminin iki kat kökü olmalıdır.

$$\Delta'=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=k^2-4=0,\ k=2$$

k=2 değeri $4x^2-2kx+1=0$ denkleminde yerine konursa,

$4x^2-4x+1=0 \Rightarrow x_1=x_2-\frac{1}{2}$ bulunur.

k =2 ve $x=\frac{1}{2}$ değerleri
$y=x^2-kx+2$ denkleminde yerine konursa,

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}+2 \Rightarrow y=\frac{5}{4}$$ bulunur.

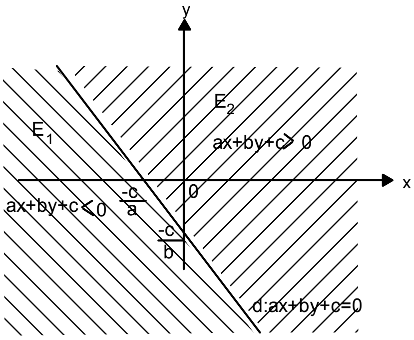
Öyleyse parabollerin değme noktası $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$ tür.

❑ İKİ BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLER; EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ

d:ax+by+c=0 doğrusu, düzlemi iki yarı düzlem ve bir de d doğrusunun kendisi olmak üzere üç ayrık bölgeye ayırır.

ax+by+c>0 eşitsizliği diğer yarı düzlemi belirtir.

a>0 , b>0 ve c>0 olmak üzere, d:ax+by+c=0 doğrusunu kabaca çizerek bu bölgeleri analitik düzlemde gösterelim:



E_1 ve E_2 yarı düzlemlerinden hangisinin ax+by+c>0 eşitsizliği ile hangisinin ax+by+c<0 eşit- sizliği ile gösterileceğini şöyle belirleyebiliriz:

E_2 yarı düzlemi içinde olduğunu bildiğimiz sonsuz sayıda nokta vardır. Bunlardan birinin, örne- ğin 0(0,0) noktasının koordinatlarını ax+by+c ifadesinde yerlerine koyarsak a.0+b.0+c=c değerini elde ederiz. c değerini pozitif olarak almıştık.

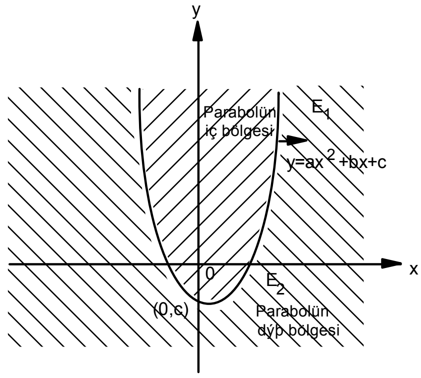
Demek ki 0(0,0) noktasının koordinatları ax+by+c ifadesini pozitif yapmaktadır.

Öyleyse 0(0,0) noktasını kapsayan E_2 yarı düzlemi ax+by+c>0 eşitsizliği ile ifade edilecektir. Buna göre d doğrusunun ayırdığı diğer yarıdüzlemin (E_1) ifadesi de ax+by+c<0 olacaktır.

✶ Yukarıda, d doğrusunun ayırdığı bölgeyi belirtmek için söylediklerimiz:

p:y=ax^2+bx+c parabolünün ayırdığı bölgeleri belirtmek için de tekrarlayabiliriz.

p:y=ax^2+bx+c parabolünün grafiği şekildeki gibi olsun:



p parabolü düzlemi parabolün iç bölgesi (E_1), parabolün dış bölgesi (E_2) ve parabolün kendisi olmak üzere üç ayrık bölgeye ayırır.

y>ax^2+bx+c eşitsizliği parabolün iç veya dış bölgelerinden birini, y<ax^2+bx+c eşitsizliği diğerini gösterir.

Şekilden, parabolün iç bölgesinde olduğunu gördüğümüz 0(0,0) noktasının koordinatlarını,
y>ax^2+bx+c eşitsizliğinde yerlerine koyalım:

$0>a.(0)^2+b.(0)+c \Rightarrow 0>c$ elde edilir.

Grafikteki c değeri negatif olduğundan, eşitsizlik sağlanmıştır.

Öyseyse şekildeki grafiğe göre, y< ax^2+bx+c eşitsizliği parabolün iç bölgesini;
y>ax^2+bx+c eşitsizliği parabolün dış bölgesini belirtir.

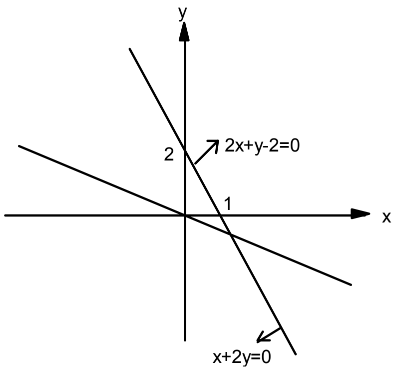
ÖRNEKLER

1. $\left.\begin{array}{l}\mathbf{2x+y-2\le 0}\\ \mathbf{x+2y\ge 0}\end{array}\right\}$

sisteminin belirttiği bölgeyi, analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

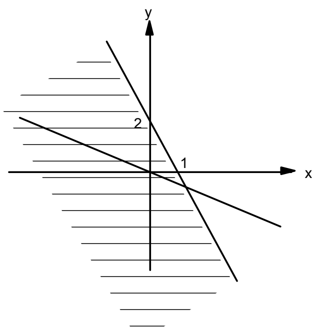
Önce, eşitsizlik sisteminin belirlediği bölgenin sınırları olan doğruları çizelim:



0(0,0) noktasının koordinatlarını 2x+y-2≤0 eşitsizliğinde yerlerine koyarsak,

2.(0)+(0)-2≤0 ⇒ -2≤0 eşitsizliği sağlanır.

Öyleyse 2x+y-2≤0 eşitsizliğinin belirttiği bölge, 2x+y-2=0 doğrusu ile bu doğrunun 0(0,0) noktası tarafında kalan yarı düzlemin bileşimidir.



Ve çözümü tamamlamadan bırakmışım…