

2. Dereceden Denklem, Eşitsizlik, Fonksiyon-2 Muharrem Şahin

□ ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki denklemleri R'de çözünüz.

1. $(3-x)(x^2+4)=0$

2. $-2x^2(x-2)^2=0$

3. $(x+3)^2(x^2-4)=0$

4. $(x-1)^5+(1-x)^3=0$

5. $\frac{x+7}{x-5}+\frac{3x+1}{2}=0$

6. $\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}=\frac{x-1}{x^2+x}$

7. $x^3+2x^2-4x-8=0$

8. $(x-2)(x^2+x-5)=4-x^2$

9. $x^4+5x^2+4=0$

10. $x^4-x^2-12=0$

11. $(x^2-2x)^2-3(x^2-2x)=0$

12. $(x^2+2)^2-4x^2=5$

13. $x^6-7x^3-8=0$

14. $(x^2-2x)^2-2x^2+4x-3=0$

15. $(2x-\frac{1}{x})^2=1$

16. $\frac{x^2-6}{x}-\frac{5x}{x^2-6}=4$

17. $\frac{1}{4^x}-3\cdot 2^x+2=0$

18. $3^x-\frac{1}{3^{x-2}}-8=0$

19. $2^{2+x}+2^{1-x}-9=0$

20. $3\cdot(\frac{3}{2})^x-6(\frac{2}{3})^x+7=0$

21. $3\cdot 4^x-5\cdot 6^x+2\cdot 9^x=0$

22. $\sqrt{x+6}=x$

23. $\sqrt{5x-6}=x$

24. $\sqrt{x^2-5}=x+1$

25. $\frac{1-\sqrt{2x+1}}{x}=1$

26. $\sqrt{x^2+2x}+x=2$

27. $\sqrt{5-x}-\sqrt{x}=1$

28. $\sqrt{x^2-4}-2x=4$

29. $x^2-2x+4=3\sqrt{2x-x^2}$

30. $\sqrt{x^2-5}=x^2-7$

31. $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x^2-8}=2x+2$

32. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=\sqrt{5x+5}$

33. $\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x-2\sqrt{x}}=\sqrt{6}$

34. $\sqrt{3x+2}+\sqrt{2x-2}=3\sqrt{x}$

35. $\sqrt{x^2+2x-3}=(x-1)\sqrt{x+1}$

36. $1-x=\sqrt{\frac{x}{2}}$

37. $\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}=2$

38. $x^2-3x-2=\sqrt{2x^2-6x-4}$

39. $\sqrt{\frac{x}{x+1}}-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}=1$

2. Dereceden Denklem, Eşitsizlik, Fonksiyon-2 Muharrem Şahin

□ ÇÖZÜMLER; ÇÖZÜM YOLLARI

1. $(3-x)(x^2+4)=0 \Rightarrow (3-x=0) \vee (x^2+4=0)$
 $x^2+4=0$ denkleminin gerçek kökü yoktur.
 $3-x=0 \Rightarrow x=3 \quad \Ç = \{3\}$

2. $-2x^2(x-2)^2=0 \Rightarrow (-2x^2=0) \vee [(x-2)^2=0]$
 $-2x^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=0$
 $(x-2)^2=0 \Rightarrow x_3=x_4=2 \quad \Ç = \{0,2\}$

3. $\Ç = \{-3,-2,2\}$

4. $(x-1)^5+(1-x)^3=0 \Rightarrow (x-1)^5-(x-1)^3=0$
 $\Rightarrow (x-1)^3[(x-1)^2-1]=0$
 $\Rightarrow [(x-1)^3=0] \vee (x^2-2x=0)$
 $x_1=x_2=x_3=1, x_4=0, x_5=2$
 $\Ç = \{0,1,2\}$

5. $\frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} = 0$

Ortak payda $2(x-5)$ tir. Denklemin iki tarafı ortak payda ile çarpılırsa;

$$2(x+7)+(x-5)(3x+1)=0$$
$$\Rightarrow 3x^2-12x+9=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0$$
$$x_1=1, x_2=3 \quad \Ç = \{1,3\}$$

6. $\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} = \frac{x-1}{x^2+x}$

Ortak payda $x(x+1)$ dir. Denklemin iki tarafı ortak payda ile çarpılırsa;

$$x+1-2x=x-1 \Rightarrow x=1 \quad \Ç = \{0\}$$

7. $x^3+2x^2-4x-8=0$

Sol taraf çarpanlarına ayrılırsa ;

$$x^2(x+2)-4(x+2)=0 \Rightarrow (x+2)(x^2-4)=0$$
$$x_1=-2, x_2=-2, x_3=2 \quad \Ç = \{-2,2\}$$

8. $(x-2)(x^2+x-5)=4-x^2$

$$\Rightarrow (x-2)(x^2+x-5)+x^2-4=0$$
$$\Rightarrow (x-2)(x^2+x-5)+(x-2)(x+2)=0$$
$$\Rightarrow (x-2)(x^2+x-5+x+2)=0$$
$$\Rightarrow (x-2)(x^2+2x-3)=0$$
$$\Rightarrow (x-2=0) \vee (x^2+2x-3=0)$$
$$x_1=2, x_2=1, x_3=-3 \quad \Ç = \{-3,1,2\}$$

9. $x^4+5x^2+4=0$

$x^2=t$ dönüşümü yapılır.

$$t^2+5t+4=0 \Rightarrow t_1=-1, t_2=-4$$

$x^2=-1$ ve $x^2=-4$ denklemlerini sağlayan gerçek sayı yoktur. $\Ç = \emptyset$

10. $x^4-x^2-12=0, \quad x^2=t$

$$t^2-t-12=0 \Rightarrow t_1=-3, t_2=4$$

$x^2=-3$ denkleminin gerçek kökü yoktur.

$$x^2=4 \Rightarrow x_1=-2, x_2=2 \quad \Ç = \{-2,2\}$$

11. $(x^2-2x)^2-3(x^2-2x)=0$

$$\Rightarrow (x^2-2x)(x^2-2x-3)=0$$

$$\Rightarrow (x^2-2x=0) \vee (x^2-2x-3=0)$$

$$x_1=0, x_2=2, x_3=-1, x_4=3$$

$$\Ç = \{-1,0,2,3\}$$

12. $(x^2+2)^2-4x^2=5$

$x^2+2=t$ dönüşümü yapılırsa, $x^2=t-2$ olup denklem;

$$t^2-4(t-2)-5=0$$

$$\Rightarrow t^2-4t+3=0 \text{ biçimine dönüşür.}$$

$$t_1=1, t_2=3$$

$$x^2+2=1 \Rightarrow x^2=-1 \text{ gerçek kök yok.}$$

$$x^2+2=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x_1=-1, x_2=1$$

$$\Ç = \{-1,1\}$$

13. $x^6-7x^3-8=0, \quad x^3=t$

$$t^2-7t-8=0 \Rightarrow t_1=-1, t_2=8$$

$$x^3=-1 \Rightarrow x^3+1=0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0$$

$$\Rightarrow (x+1=0) \vee (x^2-x+1=0)$$

$$x+1=0 \Rightarrow x_1=-1$$

$$x^2-x+1=0, \quad \Delta=1-4 < 0 \text{ gerçek kök yoktur.}$$

$$x^3=8 \Rightarrow x^3-8=0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x^2+2x+4)=0$$

$$x-2=0 \Rightarrow x_2=2 \text{ bulunur.}$$

$$x^2+2x+4=0, \quad \Delta < 0 \text{ gerçek kök yoktur.}$$

$$\Ç = \{-1,2\}$$

14. $(x^2-2x)^2-2x^2+4x-3=0$

$$\Rightarrow (x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3=0,$$

$$x^2-2x=t \text{ dönüşümü yapınız. } \Ç = \{-1,1,3\}$$

15. $(2x - \frac{1}{x})^2 = 1$

$$2x - \frac{1}{x} = -1 \text{ ve } 2x - \frac{1}{x} = 1$$

denklemlerini çözünüz.

$$\mathcal{C} = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

16. $\frac{x^2 - 6}{x} - \frac{5x}{x^2 - 6} = 4$

$$\frac{x^2 - 6}{x} = t \text{ dönüşümü yapılırsa } \frac{5x}{x^2 - 6} = \frac{5}{t}$$

olur.

Denklem, $t - \frac{5}{t} = 4$ biçimine dönüşür.

$$t - \frac{5}{t} = 4 \Rightarrow t^2 - 4t - 5 = 0; \quad t_1 = -1, \quad t_2 = 5$$

$$\frac{x^2 - 6}{x} = -1, \quad \frac{x^2 - 6}{x} = 5 \text{ denklemlerini çözünüz.}$$

$$\mathcal{C} = \{-3, -1, 2, 6\}$$

17. $4^{\frac{1}{x}} - 3 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 2 = 0$

$$\frac{1}{2^x} = t \text{ dönüşümü yapılırsa, } 4^{\frac{1}{x}} = (2^{\frac{1}{x}})^2 = t^2$$

olur.

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, \quad t_2 = 2$$

$$\frac{1}{2^x} = 1 = 2^0 \Rightarrow \frac{1}{x} = 0 \text{ kök yok.}$$

$$\frac{1}{2^x} = 2 = 2^1 \Rightarrow \frac{1}{x} = 1, \quad x = 1 \quad \mathcal{C} = \{1\}$$

18. $3^x - \frac{1}{3^{x-2}} - 8 = 0, \quad 3^x = t$ denirse

$$\frac{1}{3^{x-2}} = \frac{1}{3^x \cdot 3^{-2}} = \frac{3^2}{3^x} = \frac{9}{t} \text{ olur.}$$

$$t - \frac{9}{t} - 8 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t - 9 = 0$$

$$t_1 = -1, \quad t_2 = 9$$

$$3^x = -1 \text{ gerçek kök yok.}$$

$$3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2 \quad \mathcal{C} = \{2\}$$

19. $2^{2+x} + 2^{1-x} - 9 = 0, \quad 2^x = t$ denirse

$$2^2 \cdot 2^x + \frac{2}{2^x} - 9 = 0 \Rightarrow 4t + \frac{2}{t} - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 4t^2 - 9t + 2 = 0$$

$$\text{Çözümü tamamlayınız. } \mathcal{C} = \{-2, 1\}$$

20. $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 7 = 0$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = t, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{1}{t} \text{ dönüşümü yapınız.}$$

$$\mathcal{C} = \{-1\}$$

21. $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$

Denklemin iki tarafı 9^x ile bölünürse;

$$3 \cdot \frac{4^x}{9^x} - 5 \cdot \frac{6^x}{9^x} + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 = 0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = t \text{ dönüşümü yapınız. } \mathcal{C} = \{0, 1\}$$

22. $\sqrt{x+6} = x$

$x+6 \geq 0$ ve $x \geq 0$ koşuluyla iki tarafın karesi alınır;

$$x+6 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 3$$

$x_1 = -2$ koşullara uymaz. $\mathcal{C} = \{3\}$

23. $\mathcal{C} = \{2, 3\}$

24. $\mathcal{C} = \emptyset$

25. $\frac{1 - \sqrt{2x+1}}{x} = 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{2x+1} = x$

$$\Rightarrow 1 - x = \sqrt{2x+1}, \quad 1 - x \geq 0 \text{ ve } 2x+1 \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2x + x^2 = 2x+1 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 4$$

$x_1 = 0$ kesrin paydasını sıfır yaptığından kök olamaz.

$$x_2 = 4, \quad 1 - x \geq 0 \text{ koşuluna uymaz. } \mathcal{C} = \emptyset$$

26. $\sqrt{x^2 + 2x} + x = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x} = 2 - x$

$$\text{çözümü tamamlayınız. } \mathcal{C} = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

27. $\sqrt{5-x} - \sqrt{x} = 1 \Rightarrow \sqrt{5-x} = \sqrt{x} + 1$

$5-x \geq 0, \quad x \geq 0, \quad \sqrt{x} + 1 \geq 0$ koşuluyla iki tarafın karesi alınır;

$$5-x = x + 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow 4-2x = 2\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} = t \text{ denirse;}$$

$$2t^2 + 2t - 4 = 0 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0;$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = -2$$

$$\sqrt{x} = -2 \text{ gerçek kök yok.}$$

$$\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \quad \mathcal{C} = \{1\}$$

28. $\zeta = \{-2\}$

29. $x^2 - 2x + 4 = 3\sqrt{2x - x^2}$
 $\sqrt{2x - x^2} = t$ denirse
 $2x - x^2 = t^2 \Rightarrow x^2 - 2x = -t^2$ olur.
 $-t^2 + 4 = 3t \Rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0$
 $t_1 = 1, t_2 = -4$
 $\sqrt{2x - x^2} = -4$, gerçek kök yoktur.
 $\sqrt{2x - x^2} = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$
 $x_1 = x_2 = 1 \quad \zeta = \{1\}$

30. $\sqrt{x^2 - 5} = x^2 - 7$
 $\sqrt{x^2 - 5} = t \Rightarrow x^2 = t^2 + 5$
 $t = t^2 + 5 - 7 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$
 Çözümü tamamlayınız. $\zeta = \{-3, 3\}$

31. $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x^2 - 8} = 2x + 2$
 $x+1 \geq 0, x^2 - 8 \geq 0, 2x+2 \geq 0$ koşuluyla iki tarafın karesi alınırsa;
 $(x+1)(x^2 - 8) = (2x+2)^2$
 $\Rightarrow (x+1)(x^2 - 8) - 4(x+1)^2 = 0$
 $\Rightarrow (x+1)[(x^2 - 8) - 4(x+1)] = 0$
 $\Rightarrow (x+1)(x^2 - 4x - 12) = 0$
 $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 6 \quad \zeta = \{6\}$

32. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = \sqrt{5x+5}$
 $2x+1 \geq 0, x \geq 0, 5x+5 \geq 0$ koşuluyla iki tarafın karesi alınırsa;
 $2x+1 + 2\sqrt{x(2x+1)} + x = 5x+5$
 $\Rightarrow 2\sqrt{x(2x+1)} = 2x+4 \Rightarrow \sqrt{x(2x+1)} = x+2$
 $x+2 \geq 0$ koşuluyla iki tarafın yeniden karesini alalım;
 $x(2x+1) = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$
 $x_1 = -1, x_2 = 4 \quad \zeta = \{4\}$

33. $\sqrt{x+2\sqrt{x}} - \sqrt{x-2\sqrt{x}} = \sqrt{6}$
 $x \geq 0, x+2\sqrt{x} \geq 0, x-2\sqrt{x} \geq 0$ koşuluyla iki tarafın karesi alınırsa,
 $x+2\sqrt{x} - 2\sqrt{(x+2\sqrt{x})(x-2\sqrt{x})} + x - 2\sqrt{x} = 6$
 $\Rightarrow 2x - 6 = 2\sqrt{x^2 - 4x} \Rightarrow x - 3 = \sqrt{x^2 - 4x}$
 $x - 3 \geq 0$ koşuluyla yeniden karesini alalım:
 $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 4x \Rightarrow -2x = -9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$
 $\zeta = \{9/2\}$

34. $\zeta = \{2\}$

35. $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = (x-1)\sqrt{x+1}$
 $x^2 + 2x - 3 \geq 0, x-1 \geq 0, x+1 \geq 0$ koşulu ile iki tarafın karesini alalım:
 $x^2 + 2x - 3 = (x-1)^2(x+1)$
 $\Rightarrow (x-1)(x+3) - (x-1)^2(x+1) = 0$
 $\Rightarrow (x-1)[(x+3) - (x-1)(x+1)] = 0$
 $\Rightarrow (x-1)(-x^2 + x + 4) = 0$
 $x_1 = 1, x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}, x_3 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$
 $\zeta = \left\{1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$

36. $\sqrt{\frac{x}{2}} = t$ dönüşümü yapınız. $\zeta = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

37. $\sqrt{x} = t$ dönüşümü yapınız. $\zeta = \{9\}$

38. $x^2 - 3x - 2 = \sqrt{2x^2 - 6x - 4}$
 $\sqrt{2x^2 - 6x - 4} = t$ denirse,
 $2x^2 - 6x - 4 = t^2 \Rightarrow x^2 - 3x - 2 = \frac{t^2}{2}$ olur.
 $\frac{t^2}{2} = t \Rightarrow t^2 - 2t = 0$ Çözümü tamamlayınız.
 $\zeta = \left\{-1, \frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}, 4\right\}$

39. $\sqrt{\frac{x}{x+1}} = t$ denirse $\sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{1}{t}$ olur.
 $t - \frac{2}{t} = 1 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$
 Çözümü tamamlayınız. $\zeta = \{-4/3\}$