❑ İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ ... \ + a_1 x + a_0$ n inci dereceden bir polinom olmak üzere;

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ ... \ + a_1 x + a_0 = 0$$

açık önermesine **n inci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir. Bu açık önermeyi doğrulayan x sayılarına **denklemin kökleri**, köklerin oluştur-duğu kümeye denklemin **çözüm kümesi**, çözüm kümesini bulmak için yapılan işlemlere de **denklemin çözümü** denir.

Bu tanıma göre a,b,c∈R ve a≠0 olmak üzere;

$ax + b = 0$ birinci dereceden,
$ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden,

bir bilinmeyenli denklemlerdir.

❑ DENKLEM ÇÖZÜMÜ

$ax + b = 0$ denkleminin kökü;

$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \dfrac{-b}{a}$ olarak bulunur.

$\text{Çözüm kümesi} = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$ dır. Denklemin kökü bir gerçek sayıdır.

ÖRNEK

$3x - 7 = 0 \Rightarrow 3x = 7 \Rightarrow x = \dfrac{7}{3}$ $\quad Ç = \left\{\dfrac{7}{3}\right\}$

❈ $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $b = 0$ veya $c = 0$ ise denklemin çözümü birinci dereceden denklemin çözümüne indirgenebilir.

■ $ax^2 = 0$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

$$ax^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x.x = 0$$
$$\Rightarrow (x = 0) \vee (x = 0)$$

Kökleri x_1 ve x_2 ile gösterirsek;

$x_1 = x_2 = 0$ ve $Ç = \{0\}$ olur.

❈ Kaçıncı dereceden olursa olsun, bir denklemin köklerinden ikisi birbirine eşit birer sayı ise, bu sayıya denklemin **iki kat kökü** denir.

ÖRNEK :

$9x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x.x = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (x = 0)$

Denklemin iki kat kökü vardır.

$x_1 = x_2 = 0$ ve $Ç = \{0\}$

■ $ax^2 + bx = 0$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Denklemin sol tarafı x parantezine alınarak her çarpan ayrı ayrı sıfıra eşitlenir.

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$$
$$\Rightarrow (x = 0) \vee (ax + b = 0)$$
$$\Rightarrow (x = 0) \vee \left(x = \frac{-b}{a}\right)$$

$x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{-b}{a}$; $\quad Ç = \left\{0, \dfrac{-b}{a}\right\}$

ÖRNEK : $5x^2 - \sqrt{3}x = 0$ **denklemini çözelim:**

$$5x^2 - \sqrt{3}x = 0 \Rightarrow x(5x - \sqrt{3}) = 0$$
$$\Rightarrow (x = 0) \vee (5x - \sqrt{3} = 0)$$

$x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$; $\quad Ç = \left\{0, \dfrac{\sqrt{3}}{5}\right\}$

■ $ax^2 + c = 0$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

I. a ile c aynı işaretli ise;

$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \dfrac{-c}{a} < 0$ olur.

Karesi negatif olan hiçbir gerçek sayı bulunmadığından denklemin R deki (gerçek sayılar kümesindeki) çözümü ∅ dir.

Böyle denklemlerin **karmaşık sayılar** kümesindeki çözümü karmaşık sayılar bölümünde anlatılacaktır.

II. a ile c ters işaretli ise;

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}}$$
$$\Rightarrow |x| = \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

$x_1 = -\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$, $x_2 = \sqrt{\dfrac{-c}{a}}$ ve

$Ç = \left\{-\sqrt{\dfrac{-c}{a}}, \sqrt{\dfrac{-c}{a}}\right\}$ olur.

ÖRNEKLER :

1. $\mathbf{4x^2+1=0}$ **denklemini çözelim:**

$$4x^2+1=0 \Rightarrow 4x^2=-1 \Rightarrow x^2=\frac{-1}{4}<0$$

olduğundan gerçek kök yoktur. $Ç=\varnothing$

2. $\mathbf{\frac{2}{3}x^2-3=0}$ **denklemini çözelim:**

$$\frac{2}{3}x^2-3=0 \Rightarrow \frac{2}{3}x^2=3$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{9}{2} \Rightarrow |x|=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Payda rasyonel yapılırsa, $|x|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ olur.

$$x_1=\frac{-3\sqrt{2}}{2},\quad x_2=\frac{3\sqrt{2}}{2};\qquad Ç=\left\{\frac{-3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right\}$$

■ $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$ **DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ**

ax^2+bx ifadesi tam kareye dönüştürülerek denklemin çözümü $AX^2+C=0$ denkleminin çözümüne indirgenir.

Işlem aşağıdaki gibi yapılır:

$ax^2+bx+c=0$ denkleminde her terim a ile bölünür. (a≠0)

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

x in katsayısının yarısının karesi bir eklenip bir çıkarılırsa;

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Buradan, gerçek köklerin var olması için $b^2-4ac\geq 0$ olması gerektiği görülür.

Iki tarafın karekökü alınırsa;

$$\Rightarrow \left|x+\frac{b}{2a}\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}=\frac{-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\vee\left(x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

Buradan $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ elde edilir.

$$Ç=\left\{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$ dır.

Özetlersek;

> $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$ **denkleminin kökleri,**
>
> $\mathbf{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ **formülü ile bulunur.**
>
> $\mathbf{\Delta=b^2-4ac}$ **ifadesine denklemin diskriminantı denir.**
>
> $\mathbf{\Delta>0}$ **ise, denklemin birbirinden farklı iki gerçek kökü vardır.** $\mathbf{(x_1\neq x_2\in R)}$
>
> $\mathbf{\Delta=0}$ **ise, denklemin iki kat kökü vardır.**
> $\mathbf{(x_1=x_2=\frac{-b}{2a}\in R)}$
>
> $\mathbf{\Delta<0}$ **ise, denklemin gerçek kökü yoktur.**

ÖRNEKLER

1. $\mathbf{2x^2+3x-2=0}$ **denklemini, formül kullanmadan çözelim:**

$$2x^2+3x-2=0 \Rightarrow x^2+\frac{3}{2}x-1=0$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}-1=0$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow \left|x+\frac{3}{4}\right|=\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow (x+\frac{3}{4}=\frac{-5}{4})\vee(x+\frac{3}{4}=\frac{5}{4})$$

$$\Rightarrow (x=-2)\vee(x=\frac{1}{2})$$

$x_1=-2$, $x_2=\frac{1}{2}$ ve $Ç=\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$ bulunur.

2. $\mathbf{3x^2+6x-4=0}$ **denklemini formül kullanmadan çözelim:**

$$3x^2+6x-4=0 \Rightarrow x^2+2x+\frac{4}{3}=0$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1-1+\frac{4}{3}=0 \Rightarrow (x+1)^2=\frac{-1}{3}<0$$

olduğundan gerçek kök yoktur. $Ç=\varnothing$

UYARI

$ax^2+bx+c=0$ denkleminde a ile c ters işaretli ise $a.c<0$ olacağından $-4ac>0$ ve $b^2-4ac>0$ olur. Öyleyse, **a ile c ters işaretli ise** $\Delta=b^2-4ac$ ye bakılmaksızın **denklemin birbirinden farklı iki gerçek kökünün var olduğu** söylenebilir.

ÖRNEK: $183x^2 \pm 67x - 95 = 0$ denkleminde $a = 183$ ve $c = -95$ ters işaretli olduğundan denkle-min birbirinden farklı iki gerçek kökü vardır.

UYARI

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $a + b + c = 0$ ise köklerden biri 1; $a - b + c = 0$ ise köklerden biri -1 dir.

Köklerden biri biliniyorsa, üç terimli kolayca çarpanlarına ayrılıp diğer kök bulunabilir.

Örneğin; köklerden birine x_1 dersek, üç terimlinin bir çarpanı $x - x_1$ olur. Diğer çarpan da ax^2 ve c ye bakılarak, birinci terimlerin çarpımı ax^2 yi, ikinci terimlerin çarpımı c yi verecek biçimde bulunur.

$$ax^2 + bx + c \equiv (x - x_1)(ax - \frac{c}{x_1})$$

ÖRNEKLER

1. $\mathbf{3x^2 + 4x - 7 = 0}$ **denklemini çözelim:**

$a + b + c = 3 + 4 - 7 = 0$ olup köklerden biri 1 dir.

$3x^2 + 4x - 7 = (x - 1)(3x + 7) = 0$

$x_1 = 1$, $x_2 = \frac{-7}{3}$; $Ç = \left\{-\frac{7}{3}, 1\right\}$

2. $\mathbf{4x^2 + 5x + 1 = 0}$ **denklemini çözelim:**

$a - b + c = 4 - 5 + 1 = 0$ olup köklerden biri -1 dir.

$4x^2 + 5x + 1 = (x + 1)(4x + 1) = 0$

$x_1 = -1$, $x_2 = \frac{-1}{4}$; $Ç = \left\{-1, \frac{-1}{4}\right\}$

UYARI

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ formülünde, kesrin payı ve paydası 2 ile bölünürse;

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}}$$

yarım formülü ve denklemin diskriminantı olarak;

$$\boxed{\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}$$

elde edilir.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde **b çift ise yarım formülün kullanılması** işlemlerde büyük kolaylık sağlar.

TAMAMLAYICI ÖRNEKLER

1. $\mathbf{5x^2 - 8x + 2 = 0}$ **denklemini çözelim:**

$\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = (4)^2 - (5.2) = 16 - 10 = 6 > 0$

$x_1 \neq x_2 \in R$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{5}$, $Ç = \left\{\frac{4 - \sqrt{6}}{5}, \frac{4 + \sqrt{6}}{5}\right\}$

2. $\mathbf{4x^2 + 9x + 2 = 0}$ **denklemini çözelim:**

$\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4.4.2 = 81 - 32 = 49$

$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{2.4}$ $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{-1}{4}$

$Ç = \left\{-2, \frac{-1}{4}\right\}$

3. $\mathbf{x^2 - \sqrt{5}x + \frac{5}{4} = 0}$ **denklemini çözelim:**

$\Delta = b^2 - 4ac = (-\sqrt{5})^2 - 4.\frac{5}{4} = 0$

Iki kat kök var.

$x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $Ç = \left\{\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

4. $\mathbf{5x^2 - 7x + 8 = 0}$ **denklemini çözelim:**

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-7)^2 - 4.5.8 = 49 - 160 = -111 < 0$

$Ç = \varnothing$

5. $\mathbf{x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m = 0}$ **denklemini çözelim:**

$a = 1$, $b = -2(m - 1)$, $c = m^2 - 2m$

$\Delta' = [-(m-1)]^2 - (m^2 - 2m)$

$\Delta' = m^2 - 2m + 1 - m^2 + 2m = 1$

$x_{1,2} = \frac{m - 1 \pm 1}{1}$; $x_1 = m$, $x_2 = m - 2$

$Ç = \{m, m - 2\}$

6. $\mathbf{ax^2-(ab+1)x+b=0}$ **denklemini çözelim:**

$$\Delta=\left[-(ab+1)\right]^2-4ab=a^2b^2+2ab+1-4ab$$

$$\Delta=a^2b^2-2ab+1=(ab-1)^2$$

$$x_{1,2}=\frac{ab+1\pm\sqrt{(ab-1)^2}}{2a}$$

$$x_1=\frac{ab+1+ab-1}{2a}=\frac{2ab}{2a}=b$$

$$x_2=\frac{ab+1-ab+1}{2a}=\frac{2}{2a}=\frac{1}{a}$$

$$Ç=\left\{\frac{1}{a},b\right\}$$

7. $\mathbf{mx^2-4x+6=0}$ **denkleminin iki kat kökü varsa m kaçtır ?**

ÇÖZÜM

$x_1=x_2$ olması için $\Delta=0$ olmalıdır.

$$\Delta'=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=(-2)^2-6m=4-6m=0$$

$$m=\frac{2}{3}$$

8. $\mathbf{(m-2)x^2-2(m+1)x+m+3=0}$ **denkleminin birbirinden farklı iki gerçek kökünün olması için m ne olmalıdır ?**

ÇÖZÜM

$x_1\neq x_2\in R$ ise $\Delta>0$ olmalıdır.

$$\Delta'=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=\left[-(m+1)\right]^2-(m-2)(m+3)>0$$

$$\Rightarrow m^2+2m+1-m^2-m+6>0$$

$$\Rightarrow m+7>0\ \Rightarrow\ m>-7$$

9. $\mathbf{P(x)=x^2-2(m+1)x+m+3}$ **polinomunun tamkare olması için m ne olmalıdır ?**

ÇÖZÜM

ax^2+bx+c ifadesi tamkare ise,

$ax^2+bx+c\equiv(mx+n)^2=0$ denkleminin,

$x_1=x_2=\frac{-n}{m}$ olmak üzere iki kat kökü vardır.

Öyleyse; $\mathbf{ax^2+bx+c}$ **ifadesi tamkare ise** $\mathbf{\Delta=b^2-4ac=0}$ **olmalıdır.**

$$\Delta'=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=(m+1)^2-(m+3)=0$$

$$\Rightarrow m^2+m-2=0$$

$$\Rightarrow (m+2)(m-1)=0$$

$m=-2$ veya $m=1$ bulunur.

P(x) in tamkare olması için $m\in\{-2,1\}$ olmalıdır.

$m=-2$ ise $P(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$,

$m=1$ ise $P(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$ olur.

10. $\mathbf{(m^2-1)x^2-(2m+1)x-m=0}$ **denkleminin bir kökü 2 ise diğer kökü kaçtır ?**

ÇÖZÜM

2, denklemin kökü olduğundan denklemi doğrular.

$$(m^2-1).2^2-(2m+1).2-m=0$$

$$\Rightarrow 4m^2-4-4m-2-m=0$$

$$\Rightarrow 4m^2-5m-6=0$$

$$\Delta_m=5^2-4.4.(-6)=121=11^2$$

$$m_1=\frac{5+11}{8}=2\ ,\ m_2=\frac{5-11}{8}=\frac{-3}{4}$$

$m\in\left\{2,\frac{-3}{4}\right\}$ bulunur.

$m=2$ için;

$3x^2-5x-2=0\ \Rightarrow\ (x-2)(3x+1)=0$

Denklemin diğer kökü $x=\frac{-1}{3}$ olur.

$m=\frac{-3}{4}$ için;

$$\frac{-7}{16}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}=0$$

$$\Rightarrow -7x^2+8x+12=0\ \Rightarrow\ (x-2)(-7x-6)=0$$

Denklemin diğer kökü $x=\frac{-6}{7}$ olur.

Öyleyse;

$x_1=2$ ise $(x_2=\frac{-1}{3})\vee(x_2=\frac{-6}{7})$ olur.

11. $x^3-(m+1)x^2-mx+m+1=0$ **denkleminin bir kökü 2 ise denklemin çözüm kümesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$x=2$ denklemi sağlamalıdır.
$2^3-(m+1).2^2-m.2+m+1=0$

$\Rightarrow 8-4m-4-2m+m+1=0$

$\Rightarrow -5m=-5 \Rightarrow m=1$

$m=1$ değerini denklemde yerine koyarsak:
$x^3-2x^2-x+2=0$ elde edilir.

$x=2$ bu denklemin kökü olduğuna göre; $P(x)=x^3-2x^2-x+2$ polinomu $x-2$ ile bölünebilir.

Horner yöntemi ile bölelim:

	1	−2	−1	2	
2		2	0	−2	
	1	0	−1	0	Kalan

Bölüm (x^2-1) olur.

Öyleyse;
$P(x)=x^3-2x^2-x+2=(x-2)(x^2-1)$ olup denklem, $(x-2)(x^2-1)=0$ biçiminde yazılabilir.

$(x-2)(x^2-1)=0 \Rightarrow (x-2=0)\vee(x^2-1=0)$
$\Rightarrow (x=0)\vee(x=\pm 1)$

$Ç=\{2,-1,1\}$

$x^3-2x^2-x+2=0$ denklemi, sol taraf çarpan-larına ayrılarak da çözülebilir:

$x^3-2x^2-x+2=0 \Rightarrow x^2(x-2)-(x-2)=0$
$\Rightarrow (x-2)(x^2-1)=0$
$\Rightarrow (x=2)\vee(x=\pm 1)$

$Ç=\{2,-1,1\}$

❑ ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki denklemlerin R deki çözüm kümelerini bulunuz.

a) $4x^2-1=0$ b) $3x^2+2x=0$

c) $(3-x).(x+2)=0$ d) $3x^2-x-4=0$

e) $(5-2x)^2=9$ f) $6x^2+5x-1=0$

g) $x^2-4x+2=0$ h) $10x^2-x-2=0$

i) $x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}=0$

k) $\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{2}x+1=0$

l) $-2x^2+7x-3=0$

m) $\sqrt{2}x^2-2x-4\sqrt{2}=0$

n) $(1-2x)^2=(4x-2)(3x+2)$

o) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$

p) $ax^2-(a^2+2)x+2a=0$

r) $ax^2-(ab+1)x+b=0$

s) $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0$

t) $abx^2-(a^2b+ab^2+1)x+a+b=0$

u) $a^2x^2-(a^2+2b^2)x+2b^2=0$

v) $(a^2-b^2)x^2-(a^2+3ab-2b^2)x+2ab=0$

2. $x^2+ax+4a+2=0$ **denkleminin köklerinden biri a ise diğeri nedir ?**

3. $mx^2+2mx-2=0$ **denkleminin birbirine eşit iki kökü olması için m ne olmalıdır ?**

4. $ax^2+(2a+1)x+a+1=0$ **denkleminin birbirinden farklı iki gerçek kökü olması için a ne olmalıdır ?**

5. $x^2-2ax+a^2+a-2=0$ **denkleminin gerçek köklerinin olmaması için a ne olmalıdır ?**

6. $P(x)=mx^2-2(m+1)x+m+3$ **polinomunun tamkare olması için m ne olmalıdır ?**

❑ ÇÖZÜMLER; ÇÖZÜM YOLLARI

1.

a) $Ç=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$ **b)** $Ç=\left\{0,\frac{-2}{3}\right\}$

c) $Ç=\{-2,3\}$ **d)** $Ç=\left\{-1,\frac{4}{3}\right\}$

e) $(5-2x)^2=9 \Rightarrow (5-2x=-3)\vee(5-2x=3)$
$\Rightarrow (x=4)\vee(x=1)$
$Ç=\{1,4\}$

f) $a-b+c=0$ olup köklerden biri -1 dir.
$6x^2+5x-1=0 \Rightarrow (x+1)(6x-1)=0$
$Ç=\left\{-1,\frac{1}{6}\right\}$

g) $\Delta'=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=(-2)^2-2=2$
$x_{1,2}=2\pm\sqrt{2}$; $Ç=\left\{2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}\right\}$

h) $Ç=\left\{\frac{-2}{5},\frac{1}{2}\right\}$

i) Denklemin iki tarafı 2 ile çarpılırsa:
$2x^2-3x-5=0 \Rightarrow (x+1)(2x-5)=0$;
$Ç=\left\{-1,\frac{5}{2}\right\}$

k) Denklemin iki tarafı 16 ile çarpılırsa:
$x^2-8x+16=0 \Rightarrow (x-4)^2=0$; $x_1=x_2=4$
$Ç=\{4\}$

l) $Ç=\left\{\frac{1}{2},3\right\}$ **m)** $Ç=\left\{-\sqrt{2},2\sqrt{2}\right\}$

n) Denklemde,
$(1-2x)^2=(2x-1)^2$ ve $4x-2=2(2x-1)$
yerlerine konursa:
$$(2x-1)^2=2(2x-1)(3x+2)$$
$$\Rightarrow (2x-1)^2-2(2x-1)(3x+2)=0$$
$$\Rightarrow (2x-1)\left[(2x-1)-2(3x+2)\right]=0$$
$$\Rightarrow (2x-1)(-4x-5)=0$$
$x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{-5}{4}$ ve $Ç=\left\{\frac{-5}{4},\frac{1}{2}\right\}$

o) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$
$\Delta'=(-a)^2-(a^2-b^2)=b^2$; $x_{1,2}=\frac{a\pm b}{1}$
$Ç=\{a-b,a+b\}$

p) $ax^2-(a^2+2)x+2a=0$
$\Delta=(a^2+2)^2-8a^2=a^4+4a^2+4-8a^2$
$\Delta=a^4-4a^2+4=(a^2-2)^2$
$x_{1,2}=\frac{(a^2+2)\pm(a^2-2)}{2a}$; $Ç=\left\{a,\frac{2}{a}\right\}$

r) $ax^2-(ab+1)x+b=0$
$\Delta=(ab+1)^2-4ab=a^2b^2-2ab+1=(ab-1)^2$
$x_{1,2}=\frac{(ab+1)\pm(ab-1)}{2a}$; $Ç=\left\{\frac{1}{a},b\right\}$

s) $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0$
$\Delta'=(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$
$\Delta'=a^4+2a^2b^2+b^4-a^4+2a^2b^2-b^4=4a^2b^2$
$x_{1,2}=\frac{(a^2+b^2)\pm 2ab}{a^2-b^2}$
$x_1=\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{a+b}{a-b}$
$x_2=\frac{a^2+b^2-2ab}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{(a-b)}{(a+b)}$
$Ç=\left\{\frac{(a-b)}{(a+b)},\frac{(a+b)}{(a-b)}\right\}$

t) $abx^2-(a^2b+ab^2+1)x+a+b=0$
$\Delta=(a^2b+ab^2+1)^2-4ab(a+b)$
$\Delta=\left[ab(a+b)+1\right]^2-4ab(a+b)$
$\Delta=\left[ab(a+b)\right]^2+2ab(a+b)+1-4ab(a+b)$
$\Delta=\left[ab(a+b)\right]^2-2ab(a+b)+1$
$\Delta=\left[ab(a+b)-1\right]^2=(a^2b+ab^2-1)^2$

$$x_1=\frac{(a^2b+ab^2+1)-(a^2b+ab^2-1)}{2ab}=\frac{1}{2ab}$$
$$x_2=\frac{(a^2b+ab^2+1)+(a^2b+ab^2-1)}{2ab}$$
$$x_2=\frac{2a^2b+2ab^2}{2ab}=a+b\ ;\qquad Ç=\left\{a+b,\frac{1}{ab}\right\}$$

u) $a^2x^2-(a^2+2b^2)x+2b^2=0$
$$\Delta=(a^2+2b^2)^2-8a^2b^2$$
$$\Delta=a^4+4a^2b^2+4b^4-8a^2b^2$$
$$\Delta=a^4-4a^2b^2+4b^4=(a^2-2b^2)^2$$
$$x_1=\frac{(a^2+2b^2)-(a^2-2b^2)}{2a^2}=\frac{2b^2}{a^2}$$
$$x_2=\frac{a^2+2b^2+a^2-2b^2}{2a^2}=1$$
$$Ç=\left\{1,\frac{2b^2}{a^2}\right\}$$

v) $(a^2-b^2)x^2-(a^2+3ab-2b^2)x+2ab=0$
$$\Delta=(a^2+3ab-2b^2)^2-8ab(a^2-b^2)$$
$$\Delta=a^4+9a^2b^2+4b^4+6a^3b-4a^2b^2-12ab^3-8a^3b+8ab^3$$
$$\Delta=a^4-2a^3b+5a^2b^2-4a^3b+4b^4$$

Δ , kökten çıkabiliyorsa bu son ifade tamkare olmalıdır.

$$a^4-2a^3b+5a^2b^2-4a^3b+4b^4\equiv(a^2+ka+2b^2)^2$$
$$\equiv a^4+2ka^3+(k^2+4b^2)a^2+4kab^2+4b^4$$

özdeşliğinden $k=-b$ bulunur.

Öyleyse;

$\Delta=(a^2-ab+2b^2)^2$ dir.
$$x_1=\frac{a^2+3ab-2b^2+a^2-ab+2b^2}{2(a^2-b^2)}$$
$$x_1=\frac{2a^2+2ab}{2(a^2-b^2)}=\frac{2a(a+b)}{2(a-b)(a+b)}=\frac{a}{a-b}$$
$$x_2=\frac{a^2+3ab-2b^2-a^2+ab-2b^2}{2(a^2-b^2)}$$
$$x_2=\frac{4ab-4b^2}{2(a^2-b^2)}=\frac{4b(a-b)}{2(a-b)(a+b)}=\frac{2b}{a+b}$$
$$Ç=\left\{\frac{a}{a-b},\frac{2b}{a+b}\right\}$$

2. $x^2+ax+4a+2=0$ denkleminin bir kökü a olduğuna göre a denklemi sağlar.

$x^2+ax+4a+2=0$

$\Rightarrow a^2+2a+1=0$ ve $a=-1$ bulunur.

Öyleyse denklem; $x^2-x-2=0$ dır.

$x_1=-1$, $x_2=2$

$a=-1$ verilen kök olduğu için $x_2=2$ denkle-min diğer köküdür.

3. Denklemin eşit iki kökünün olması için $\Delta=0$ olmalıdır.

$\Delta'=m^2+2m=0;\ m_1=0$ ve $m_2=-2$ olur.

$m=0$ için denklem ikinci derece denklemi olamayacağından, eşit iki kökten söz edilemez.

Öyleyse;

Denklemin iki kat kökünün olması için $m=-2$ olmalıdır.

4. Denklemin birbirinden farklı iki gerçek kökünün olması için $\Delta>0$ olmalıdır.

$\Delta=(2a+1)^2-4a(a+1)$

$\Delta=4a^2+4a+1-4a^2-4a$

$\Delta=1>0$

Δ, a ya bağlı olmaksızın pozitif olduğuna göre, $\forall a\in R$ için denklemin farklı iki gerçek kökü olmalı-dır. Yalnız $a=0$ için denklem birinci dereceye indirgeneceğinden $a\in R-\{0\}$ olmalıdır.

5. Gerçek köklerin olmaması için $\Delta<0$ olmalıdır.

$\Delta'=a^2-(a^2+a-2)=-a+2<0$

$a>2$ için denklemin gerçek kökü yoktur.

6. ax^2+bx+c üç terimlisinin tamkare olması için

$\Delta=b^2-4ac=0$ olmalıdır.

$\Delta'=(m+1)^2-m(m+3)=0$

$\Delta'=m^2+2m+1-m^2-3m=0$

$1-m=0\ \Rightarrow\ m=1$

$m=1$ için $P(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$ olur.

❑ İKİNCİ DERECEDEN DENKLEME İNDİRGENEBİLEN DENKLEMLER

I. Yüksek dereceden denklemler, $P(x)$ ve $Q(x)$ birinci veya ikinci dereceden birer polinom olmak üzere, $P(x).Q(x)=0$ biçimine dönüştürülebiliyorsa her çarpan ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek kökler bulu-nur.

$$\boxed{P(x).Q(x)=0\ \Leftrightarrow\ P(x)=0 \text{ veya } Q(x)=0}$$

ÖRNEKLER

1. $\mathbf{(2x-3)(x^2-x-6)=0}$

$\Rightarrow 2x-3=0$ veya $x^2-x-6=0$

$\Rightarrow x=\frac{3}{2}$ veya $x=-2$ veya $x=3$

$Ç=\left\{-2,\frac{3}{2},3\right\}$

2. $\mathbf{(x^2-4)(x^2+2x-8)=0}$

$\Rightarrow x^2-4=0$ veya $x^2+2x-8=0$

$\Rightarrow [(x=-2)\vee(x=2)]\vee[(x=-4)\vee(x=2)]$

$Ç=\{-4,-2,2\}$

3. $\mathbf{(x^2-3x-2)^2=(x^2+x-10)^2}$

$\Rightarrow (x^2-3x-2)^2-(x^2+x-10)^2=0$

$\Rightarrow (x^2-3x-2-x^2-x+10)(x^2-3x-2+x^2+x-10)=0$

$\Rightarrow (-4x+8)(2x^2-2x-12)=0$

$\Rightarrow (-4x+8=0)\vee(2x^2-2x-12=0)$

$\Rightarrow (x=2)\vee[(x=-2)\vee(x=3)]$, $Ç=\{-2,2,3\}$

4. $\mathbf{x^3-x^2-4x+4=0}$

$\Rightarrow x^2(x-1)-4(x-1)=0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2-4)=0$

$\Rightarrow (x-1=0)\vee(x^2-4=0)$

$\Rightarrow (x=1)\vee[(x=-2)\vee(x=2)]$

$Ç=\{-2,1,2\}$

5. $\mathbf{x^3-7x+6=0}$ **denklemini çözelim:**

Katsayılar toplamı sıfır olduğundan denklemin köklerinden biri 1 dir. Öyleyse denklemin sol tarafı $x-1$ ile bölünebilir.

Horner yöntemiyle bölelim:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -7 & 6 \\
 & & 1 & 1 & -6 \\
1 & & & & \\
\hline
 & 1 & 1 & -6 & \vert\ 0
\end{array}$$

Bölüm; x^2+x-6 olur. Öyleyse denklem;

$(x-1)(x^2+x-6)=0$ dır.

$\Rightarrow (x-1=0)\vee(x^2+x-6=0)$

$\Rightarrow (x=1)\vee[(x=-3)\vee(x=2)]$

$Ç=\{-3,1,2\}$

II. $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ biçimindeki denklemlerde payın köklerinden, paydayı sıfır yapmayanlar,denklemin de kökleridir.

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \Leftrightarrow P(x)=0 \text{ ve } Q(x)\neq 0}$$

ÖRNEKLER

1. $\mathbf{\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x+1}=0}$

$\Rightarrow (x^2-2x-3=0)$ ve $(x^2+2x+1\neq 0)$

$\Rightarrow (x=-1$ veya $x=3)$ ve $(x\neq 1)$ $Ç=\{3\}$

2. $\mathbf{\frac{x^2+5x}{x^2-9}-\frac{2}{x+3}+\frac{4}{3-x}=0}$

$\frac{4}{3-x}$ kesrinde pay ve payda -1 ile çarpılırsa ortak payda $(x-3)(x+3)$ olur.

$$\frac{x^2+5x}{(x-3)(x+3)}-\underset{(x-3)}{\frac{2}{x+3}}-\underset{(x+3)}{\frac{4}{x-3}}=0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+5x-2(x-3)-4(x+3)}{(x-3)(x+3)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-x-6}{(x-3)(x+3)}=0$$

$\Rightarrow (x^2-x-6=0)$ ve $[(x-3)(x+3)\neq 0]$

$\Rightarrow (x=3$ veya $x=-2)$ ve $(x\neq -3$ ve $x\neq 3)$

$Ç=\{-2\}$

UYARI

Kesirli denklemlerin çözümünde, işlemlerde kolaylık sağlamak için her terim ortak payda ile çarpılarak denklem, polinom denklemine dönüştürülebilir.

Bu durumda polinom denklemin köklerinden, ortak paydayı sıfır yapanlar çözüm kümesine alınmaz.

3. $\mathbf{\frac{4}{x(x-2)}+\frac{3}{x-1}=\frac{2}{x-2}}$ **denklemini çözelim:**

Ortak payda $x(x-1)(x-2)$ olup her terim $x(x-1)(x-2)$ ile çarpılırsa;

$4(x-1)+3x(x-2)=2x(x-1)$ denklemi elde edilir.

Buradan;

$4x-4+3x^2-6x=2x^2-2x$

$\Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow (x=-2)\vee(x=2)$

$x=2$ değeri ortak paydayı sıfır yaptığından, $Ç=\{-2\}$ olur.

III. YARDIMCI BİLİNMEYEN KULLANILARAK DENKLEM ÇÖZÜMÜ

ÖRNEKLER

1. $\mathbf{x^4 + x^2 - 12 = 0}$ **denklemini çözelim:**

$x^2 = t$ dönüşümü yapılırsa denklem,
$t^2 + t - 12 = 0$ biçimine dönüşür.

$t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow (t = -4) \vee (t = 3)$

Bulunan t değerleri $x^2 = t$ de yerine konursa, $x^2 = -4$ ile $x^2 = 3$ denklemleri elde edilir.

$x^2 = -4$ denkleminin çözümü $\varnothing$ dir.
$x^2 = 3$ denkleminden $x_1 = -\sqrt{3}$ ve $x_2 = \sqrt{3}$ bulunur.

$Ç = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ olur.

2. $\mathbf{(x^2 + 2x)^2 - 2x^2 - 4x - 3 = 0}$ **denklemini çözelim:**

$(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3 = 0$

$x^2 + 2x = t$ dönüşümü yapılırsa;
$t^2 - 2t - 3 = 0$ denklemi elde edilir.

$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t = -1) \vee (t = 3)$

Bulunan t değerlerini $x^2 + 2x = t$ denkleminde yerine koyarsak;

$x^2 + 2x = -1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$
$\Rightarrow x_1 = x_2 = -1$

$x^2 + 2x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$
$\Rightarrow x_3 = -3\ ,\ x_4 = 1$

$Ç = \{-3, -1, 1\}$ olur.

3. $\mathbf{3^{2x+1} + 2.3^x - 1 = 0}$ **denklemini çözelim:**

$3^x = t$ dönüşümü yapılırsa;
$3^{2x+1} = 3.3^{2x} = 3.(3^x)^2 = 3t^2$ olup denklem,
$3t^2 + 2t - 1 = 0$ biçimine dönüşür.

$3t^2 + 2t - 1 = 0 \Rightarrow (t = -1) \vee (t = \frac{1}{3})$

Bulunan t değerleri $3^x = t$ denkleminde yerine konursa;

$3^x = -1$ denkleminin çözümü $\varnothing$ dir.

$3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = 3^{-1} \Rightarrow x = -1$

$Ç = \{-1\}$ olur.

4. $\mathbf{\frac{x^2 - 3}{x} + \frac{x}{x^2 - 3} = \frac{5}{2}}$ **denklemini çözelim:**

$\frac{x^2 - 3}{x} = t$ dönüşümü yapılırsa; $\frac{x}{x^2 - 3} = \frac{1}{t}$ olup denklem; $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$ biçimine dönüşür.

$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0$

$\Rightarrow (t = \frac{1}{2}) \vee (t = 2)$

Buradan;
$\frac{x^2 - 3}{x} = \frac{1}{2}$ ve $\frac{x^2 - 3}{x} = 2$ denklemleri elde edilir.

$\frac{x^2 - 3}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0$;

$x_1 = 2$ ve $x_2 = \frac{-3}{2}$

$\frac{x^2 - 3}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$;

$x_3 = -1$ ve $x_4 = 3$

$Ç = \left\{\frac{-3}{2}, -1, 2, 3\right\}$

IV. KÖKLÜ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

$\sqrt[m]{f(x)} = g(x)$ denklemini çözmek için iki tarafın m inci kuvveti alınarak elde edilen $f(x) = [g(x)]^m$ denkleminin kökleri bulunur.

m tek ise;
$f(x) = [g(x)]^m$ denkleminin kökleri $\sqrt[m]{f(x)} = g(x)$ denkleminin de kökleridir.

m çift ise;
$\sqrt[m]{f(x)}$ ifadesinin gerçek sayılar kümesinde tanımlı olması için,
$f(x) \geq 0$ olması gerektiğinden $\sqrt[m]{f(x)} \geq 0$ ve dolayısıyla $g(x) \geq 0$ olmalıdır.

Öyleyse; m çift iken
$f(x) = [g(x)]^m$ denkleminin kökleri $f(x) \geq 0$ ve $g(x) \geq 0$ koşullarına uyuyorsa $\sqrt[m]{f(x)} = g(x)$ denkleminin de kökleri olur.

ÖRNEKLER

1. $\sqrt{3x+1} = 2x$ **denklemini çözelim:**

Bulunacak köklerin verilen denklemi sağlaması için kökler;

$$(3x+1 \geq 0) \text{ ve } (2x \geq 0) \Rightarrow (x \geq \frac{-1}{3}) \text{ ve } (x \geq 0)$$
$$\Rightarrow x \geq 0$$

koşuluna uymalıdır. Iki tarafın karesi alınırsa;

$$3x+1 = 4x^2 \Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-1}{4}$$

$x_2 = \frac{-1}{4}$ istenen koşula uymaz.

Öyleyse, $Ç = \{1\}$ olur.

2. $\sqrt[3]{1-x^2} = -2$ **denklemini çözelim:**

Iki tarafın küpü alınırsa,

$1 - x^2 = -8 \Rightarrow x^2 = 9;\quad x_1 = -3,\ x_2 = 3$

$Ç = \{-3, 3\}$

3. $2x - \sqrt{x+1} = 4$ **denklemini çözelim:**

Köklü terim bir tarafta yalnız bırakılırsa;
$2x - 4 = \sqrt{x+1}$ denklemi elde edilir.

$x+1 \geq 0$ ve $2x-4 \geq 0$ koşuluyla iki tarafın karesi alınırsa;

$$4x^2 - 16x + 16 = x + 1 \Rightarrow 4x^2 - 17x + 15 = 0$$
$$x_1 = 3,\ x_2 = \frac{5}{4}$$

$2 \cdot (\frac{5}{4}) - 4 < 0$ olduğundan $x_2 = \frac{5}{4}$ değeri $2x - 4 \geq 0$ koşuluna uymaz.

Öyleyse; $Ç = \{3\}$ olur.

4. $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x+6} = 1$ **denklemini çözelim:**

Denklem birden fazla köklü terim içeriyorsa, işlemlerde kolaylık sağlamak için, köklü terimlerden biri eşitliğin bir tarafında yalnız bırakılır.

$$\sqrt{x+4} = 1 - \sqrt{2x+6}$$

Bu durumda, bulunacak köklerin denklemi sağlaması için;

① $2x + 6 \geq 0$
② $x + 4 \geq 0$
③ $1 - \sqrt{2x+6} \geq 0$

koşullarına uyması gerektiğine dikkat ediniz!

Iki tarafın karesi alınırsa;

$$x + 4 = 1 - 2\sqrt{2x+6} + 2x + 6$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{2x+6} = x + 3$$

Buradan da;

④ $x + 3 \geq 0$

olması gerektiği görülür. Iki tarafın yeniden karesi alınırsa;

$$4(2x+6) = x^2 + 6x + 9$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15$$
$$x_1 = -3 \qquad x_2 = 5$$

$x_2 = 5$ değeri ③ numaralı koşula uymaz.

$Ç = \{-3\}$ olur.

❑ ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki denklemleri R'de çözünüz.

1. $(3-x)(x^2+4) = 0$

2. $-2x^2(x-2)^2 = 0$

3. $(x+3)^2(x^2-4) = 0$

4. $(x-1)^5 + (1-x)^3 = 0$

5. $\frac{x+7}{x-5} + \frac{3x+1}{2} = 0$

6. $\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} = \frac{x-1}{x^2+x}$

7. $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$

8. $(x-2)(x^2+x-5) = 4 - x^2$

9. $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

10. $x^4 - x^2 - 12 = 0$

11. $(x^2-2x)^2 - 3(x^2-2x) = 0$

12. $(x^2+2)^2 - 4x^2 = 5$

13. $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

14. $(x^2-2x)^2-2x^2+4x-3=0$

15. $(2x-\frac{1}{x})^2=1$

16. $\frac{x^2-6}{x}-\frac{5x}{x^2-6}=4$

17. $4^{\frac{1}{x}}-3.2^{\frac{1}{x}}+2=0$

18. $3^x-\frac{1}{3^{x-2}}-8=0$

19. $2^{2+x}+2^{1-x}-9=0$

20. $3.(\frac{3}{2})^x-6(\frac{2}{3})^x+7=0$

21. $3.4^x-5.6^x+2.9^x=0$

22. $\sqrt{x+6}=x$

23. $\sqrt{5x-6}=x$

24. $\sqrt{x^2-5}=x+1$

25. $\frac{1-\sqrt{2x+1}}{x}=1$

26. $\sqrt{x^2+2x}+x=2$

27. $\sqrt{5-x}-\sqrt{x}=1$

28. $\sqrt{x^2-4}-2x=4$

29. $x^2-2x+4=3\sqrt{2x-x^2}$

30. $\sqrt{x^2-5}=x^2-7$

31. $\sqrt{x+1}.\sqrt{x^2-8}=2x+2$

32. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=\sqrt{5x+5}$

33. $\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x-2\sqrt{x}}=\sqrt{6}$

34. $\sqrt{3x+2}+\sqrt{2x-2}=3\sqrt{x}$

35. $\sqrt{x^2+2x-3}=(x-1)\sqrt{x+1}$

36. $1-x=\sqrt{\frac{x}{2}}$

37. $\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}=2$

38. $x^2-3x-2=\sqrt{2x^2-6x-4}$

39. $\sqrt{\frac{x}{x+1}}-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}=1$

❑ ÇÖZÜMLER; ÇÖZÜM YOLLARI

1. $(3-x)(x^2+4)=0 \Rightarrow (3-x=0)\vee(x^2+4=0)$
$x^2+4=0$ denkleminin gerçek kökü yoktur.
$3-x=0 \Rightarrow x=3$ $\quad Ç=\{3\}$

2. $-2x^2(x-2)^2=0 \Rightarrow (-2x^2=0)\vee\left[(x-2)^2=0\right]$
$-2x^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=0$
$(x-2)^2=0 \Rightarrow x_3=x_4=2$ $\quad Ç=\{0,2\}$

3. $Ç=\{-3,-2,2\}$

4. $(x-1)^5+(1-x)^3=0 \Rightarrow (x-1)^5-(x-1)^3=0$
$\Rightarrow (x-1)^3\left[(x-1)^2-1\right]=0$
$\Rightarrow \left[(x-1)^3=0\right]\vee(x^2-2x=0)$
$x_1=x_2=x_3=1,\ x_4=0,\ x_5=2$
$Ç=\{0,1,2\}$

5. $\frac{x+7}{x-5}+\frac{3x+1}{2}=0$

Ortak payda $2(x-5)$ tir. Denklemin iki tarafı ortak payda ile çarpılırsa;

$2(x+7)+(x-5)\ (3x+1)=0$
$\Rightarrow 3x^2-12x+9=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0$
$x_1=1,\ x_2=3$ $\quad Ç=\{1,3\}$

6. $\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}=\frac{x-1}{x^2+x}$

Ortak payda $x(x+1)$ dir. Denklemin iki tarafı ortak payda ile çarpılırsa;

$x+1-2x=x-1 \Rightarrow x=1$ $\quad Ç=\{0\}$

7. $x^3+2x^2-4x-8=0$

Sol taraf çarpanlarına ayrılırsa ;

$x^2(x+2)-4(x+2)=0 \Rightarrow (x+2)(x^2-4)=0$

$x_1=-2\,,\ x_2=-2\,,\ x_3=2$ $\quad Ç=\{-2,2\}$

8. $(x-2)(x^2+x-5)=4-x^2$

$\Rightarrow (x-2)(x^2+x-5)+x^2-4=0$

$\Rightarrow (x-2)(x^2+x-5)+(x-2)(x+2)=0$

$\Rightarrow (x-2)(x^2+x-5+x+2)=0$

$\Rightarrow (x-2)(x^2+2x-3)=0$

$\Rightarrow (x-2=0)\vee(x^2+2x-3=0)$

$x_1=2\ ,\ x_2=1\ ,\ x_3=-3$ $\quad Ç=\{-3,1,2\}$

9. $x^4+5x^2+4=0$

$x^2=t$ dönüşümü yapılır.

$t^2+5t+4=0 \Rightarrow t_1=-1\,,\ t_2=-4$

$x^2=-1$ ve $x^2=-4$ denklemlerini sağlayan gerçek sayı yoktur. $\quad Ç=\varnothing$

10. $x^4-x^2-12=0,\qquad x^2=t$

$t^2-t-12=0 \Rightarrow t_1=-3\,,\ t_2=4$

$x^2=-3$ denkleminin gerçek kökü yoktur.

$x^2=4 \Rightarrow x_1=-2\,,\ x_2=2$ $\quad Ç=\{-2,2\}$

11. $(x^2-2x)^2-3(x^2-2x)=0$

$\Rightarrow (x^2-2x)(x^2-2x-3)=0$

$\Rightarrow (x^2-2x=0)\vee(x^2-2x-3=0)$

$x_1=0\,,\ x_2=2\,,\ x_3=-1\,,\ x_4=3$

$Ç=\{-1,0,2,3\}$

12. $(x^2+2)^2-4x^2=5$

$x^2+2=t$ dönüşümü yapılırsa, $x^2=t-2$ olup denklem;

$t^2-4(t-2)-5=0$

$\Rightarrow t^2-4t+3=0$ biçimine dönüşür.

$t_1=1\,,\quad t_2=3$

$x^2+2=1 \Rightarrow x^2=-1$ gerçek kök yok.

$x^2+2=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x_1=-1\,,\ x_2=1$

$Ç=\{-1,1\}$

13. $x^6-7x^3-8=0\,,\qquad x^3=t$

$t^2-7t-8=0 \Rightarrow t_1=-1\,,\ t_2=8$

$x^3=-1 \Rightarrow x^3+1=0$

$\Rightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0$

$\Rightarrow (x+1=0)\vee(x^2-x+1=0)$

$x+1=0 \Rightarrow x_1=-1$

$x^2-x+1=0,\ \ \Delta=1-4<0$ gerçek kök yoktur.

$x^3=8 \Rightarrow x^3-8=0$

$\Rightarrow (x-2)(x^2+2x+4)=0$

$x-2=0 \Rightarrow x_2=2$ bulunur.

$x^2+2x+4=0,\qquad \Delta<0$ gerçek kök yoktur.

$Ç=\{-1,2\}$

14. $(x^2-2x)^2-2x^2+4x-3=0$

$\Rightarrow (x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3=0\,,$

$x^2-2x=t$ dönüşümü yapınız. $\quad Ç=\{-1,1,3\}$

15. $(2x-\frac{1}{x})^2=1$

$2x-\frac{1}{x}=-1$ ve $2x-\frac{1}{x}=1$

denklemlerini çözünüz.

$Ç=\left\{-1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$

16. $\frac{x^2-6}{x}-\frac{5x}{x^2-6}=4$

$\frac{x^2-6}{x}=t$ dönüşümü yapılırsa $\frac{5x}{x^2-6}=\frac{5}{t}$ olur.

Denklem, $t-\frac{5}{t}=4$ biçimine dönüşür.

$t-\frac{5}{t}=4 \Rightarrow t^2-4t-5=0\,;\quad t_1=-1\,,\ t_2=5$

$\frac{x^2-6}{x}=-1\,,\ \frac{x^2-6}{x}=5$ denklemlerini çözünüz.

$Ç=\{-3,-1,2,6\}$

17. $4^{\frac{1}{x}}-3.2^{\frac{1}{x}}+2=0$

$2^{\frac{1}{x}}=t$ dönüşümü yapılırsa, $4^{\frac{1}{x}}=(2^{\frac{1}{x}})^2=t^2$ olur.

$t^2-3t+2=0 \Rightarrow t_1=1\,,\ t_2=2$

$2^{\frac{1}{x}}=1=2^0 \Rightarrow \frac{1}{x}=0$ kök yok.

$2^{\frac{1}{x}}=2=2^1 \Rightarrow \frac{1}{x}=1\,,\quad x=1$ $\quad Ç=\{1\}$

18. $3^x - \dfrac{1}{3^{x-2}} - 8 = 0$, $3^x = t$ denirse

$\dfrac{1}{3^{x-2}} = \dfrac{1}{3^x.3^{-2}} = \dfrac{3^2}{3^x} = \dfrac{9}{t}$ olur.

$t - \dfrac{9}{t} - 8 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t - 9 = 0$

$t_1 = -1$, $t_2 = 9$

$3^x = -1$ gerçek kök yok.

$3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2$ $\qquad Ç = \{2\}$

19. $2^{2+x} + 2^{1-x} - 9 = 0$, $\qquad 2^x = t$ denirse

$2^2.2^x + \dfrac{2}{2^x} - 9 = 0 \Rightarrow 4t + \dfrac{2}{t} - 9 = 0$

$\Rightarrow 4t^2 - 9t + 2 = 0$

Çözümü tamamlayınız. $\qquad Ç = \{-2, 1\}$

20. $3.(\dfrac{3}{2})^x - 6.(\dfrac{2}{3})^x + 7 = 0$

$(\dfrac{3}{2})^x = t$, $(\dfrac{2}{3})^x = \dfrac{1}{t}$ dönüşümü yapınız.

$Ç = \{-1\}$

21. $3.4^x - 5.6^x + 2.9^x = 0$

Denklemin iki tarafı 9^x ile bölünürse;

$3.\dfrac{4^x}{9^x} - 5.\dfrac{6^x}{9^x} + 2 = 0$

$\Rightarrow 3.(\dfrac{2}{3})^{2x} - 5.(\dfrac{2}{3})^x + 2 = 0$

$(\dfrac{2}{3})^x = t$ dönüşümü yapınız. $\qquad Ç = \{0, 1\}$

22. $\sqrt{x+6} = x$

$x+6 \geq 0$ ve $x \geq 0$ koşuluyla iki tarafın karesi alınırsa;

$x+6 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 3$

$x_1 = -2$ koşullara uymaz. $\qquad Ç = \{3\}$

23. $Ç = \{2,3\}$ $\qquad$ **24.** $Ç = \varnothing$

25. $\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x} = 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{2x+1} = x$

$\Rightarrow 1 - x = \sqrt{2x+1}$, $\quad 1 - x \geq 0$ ve $2x+1 \geq 0$

$\Rightarrow 1 - 2x + x^2 = 2x + 1 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 4$

$x_1 = 0$ kesrin paydasını sıfır yaptığından kök olamaz.

$x_2 = 4$, $\quad 1 - x \geq 0$ koşuluna uymaz. $\qquad Ç = \varnothing$

26. $\sqrt{x^2+2x} + x = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2+2x} = 2 - x$

çözümü tamamlayınız. $\qquad Ç = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

27. $\sqrt{5-x} - \sqrt{x} = 1 \Rightarrow \sqrt{5-x} = \sqrt{x} + 1$

$5 - x \geq 0$, $x \geq 0$, $\sqrt{x} + 1 \geq 0$ koşuluyla iki tarafın karesi alınırsa;

$5 - x = x + 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow 4 - 2x = 2\sqrt{x}$

$\sqrt{x} = t$ denirse;

$2t^2 + 2t - 4 = 0 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0$;

$t_1 = 1$, $t_2 = -2$

$\sqrt{x} = -2$ gerçek kök yok.

$\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$ $\qquad Ç = \{1\}$

28. $Ç = \{-2\}$

29. $x^2 - 2x + 4 = 3\sqrt{2x - x^2}$

$\sqrt{2x - x^2} = t$ denirse

$2x - x^2 = t^2 \Rightarrow x^2 - 2x = -t^2$ olur.

$-t^2 + 4 = 3t \Rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0$

$t_1 = 1$, $t_2 = -4$

$\sqrt{2x - x^2} = -4$, gerçek kök yoktur.

$\sqrt{2x - x^2} = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

$x_1 = x_2 = 1$ $\qquad Ç = \{1\}$

30. $\sqrt{x^2 - 5} = x^2 - 7$

$\sqrt{x^2 - 5} = t \Rightarrow x^2 = t^2 + 5$

$t = t^2 + 5 - 7 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$

Çözümü tamamlayınız. $\qquad Ç = \{-3, 3\}$

31. $\sqrt{x+1}.\sqrt{x^2 - 8} = 2x + 2$

$x + 1 \geq 0$, $x^2 - 8 \geq 0$, $2x + 2 \geq 0$ koşuluyla iki tarafın karesi alınırsa;

$(x+1)(x^2 - 8) = (2x+2)^2$

$\Rightarrow (x+1)(x^2 - 8) - 4(x+1)^2 = 0$

$\Rightarrow (x+1)\left[(x^2 - 8) - 4(x+1)\right] = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x^2 - 4x - 12) = 0$

$x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 6$ $\qquad Ç = \{6\}$

32. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=\sqrt{5x+5}$

$2x+1\geq 0,\ x\geq 0,\ 5x+5\geq 0$ koşuluyla iki tarafın karesi alınırsa;

$2x+1+2\sqrt{x(2x+1)}+x=5x+5$

$\Rightarrow 2\sqrt{x(2x+1)}=2x+4 \Rightarrow \sqrt{x(2x+1)}=x+2$

$x+2\geq 0$ koşuluyla iki tarafın yeniden karesini alalım;

$x(2x+1)=x^2+4x+4 \Rightarrow x^2-3x-4=0$

$x_1=-1,\ x_2=4$ $\qquad$ $Ç=\{4\}$

33. $\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x-2\sqrt{x}}=\sqrt{6}$

$x\geq 0,\quad x+2\sqrt{x}\geq 0,\quad x-2\sqrt{x}\geq 0$ koşuluyla iki tarafın karesi alınırsa,

$x+2\sqrt{x}-2\sqrt{(x+2\sqrt{x})(x-2\sqrt{x})}+x-2\sqrt{x}=6$

$\Rightarrow 2x-6=2\sqrt{x^2-4x} \Rightarrow x-3=\sqrt{x^2-4x}$

$x-3\geq 0$ koşuluyla yeniden karesini alalım:

$x^2-6x+9=x^2-4x \Rightarrow -2x=-9 \Rightarrow x=\dfrac{9}{2}$

$Ç=\{\,9/2\,\}$

34. $Ç=\{2\}$

35. $\sqrt{x^2+2x-3}=(x-1)\sqrt{x+1}$

$x^2+2x-3\geq 0,\quad x-1\geq 0,\quad x+1\geq 0$ koşulu ile iki tarafın karesini alalım:

$x^2+2x-3=(x-1)^2(x+1)$

$\Rightarrow (x-1)(x+3)-(x-1)^2(x+1)=0$

$\Rightarrow (x-1)[(x+3)-(x-1)(x+1)]=0$

$\Rightarrow (x-1)(-x^2+x+4)=0$

$x_1=1,\ x_2=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2},\ x_3=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$

$Ç=\left\{1,\ \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$

36. $\sqrt{\dfrac{x}{2}}=t$ dönüşümü yapınız. $\qquad$ $Ç=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

37. $\sqrt{x}=t$ dönüşümü yapınız. $\qquad$ $Ç=\{9\}$

38. $x^2-3x-2=\sqrt{2x^2-6x-4}$

$\sqrt{2x^2-6x-4}=t$ denirse,

$2x^2-6x-4=t^2 \Rightarrow x^2-3x-2=\dfrac{t^2}{2}$ olur.

$\dfrac{t^2}{2}=t \Rightarrow t^2-2t=0$ $\quad$ Çözümü tamamlayınız.

$Ç=\left\{-1,\ \dfrac{3-\sqrt{17}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{17}}{2},\ 4\right\}$

39. $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}=t$ denirse $\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=\dfrac{1}{t}$ olur.

$t-\dfrac{2}{t}=1 \Rightarrow t^2-t-2=0$

Çözümü tamamlayınız. $\qquad$ $Ç=\{-4/3\}$