1. Mantık Nedir?

Anlattıklarımızın tam olarak anlaşılabilmesi için "**Etkinlik-1**"de önerdiğimizi yapınız.

Okuduğunuz bir yazıda anlamını tam bilemediğiniz sözcüklerle karşılaşırsanız, yazılanı anlamanız da önemliyse, sözcüklerin anlamını araştırmayı görev edininiz.

Etkinlik – 1

Sözlüğünüzden, aşağıdaki sözcüklerin anlamlarını öğreniniz.

Sözlüğe baktıktan sonra bu sözcüklerin anlamları ile ilgili düşünceleriniz değişti mi?

Sözcüklerin anlamları üzerinde tartışınız.

a. Doğru **b.** Yanlış **c.** Tanım

d. Kavram **e.** Yargı **f.** Çıkarım

Mantık; doğru yargılamalar yapmanın, yapılmış yargılamaların doğruluğunu denetlemenin,

- diğer bir deyişle -

doğru düşünmenin kurallarını koyan bilimdir.

Doğru düşünmeyi öğrenmek, tüm bilimlerde, öğrenmenin ilk adımı olmalıdır. Doğru düşünebilmek; doğru davranabilmenin ilk koşuludur.

Doğru düşünme yeteneği insanın doğasında vardır. Örneğin; masanın üzerine çıkmak isteyen küçük bir çocuk, üzerine çıkabileceği bir tabureyi masanın yanına koyup onun üzerinden masanın üzerine geçmeyi düşünebilir. Çocuğun bu davranışı, bir akıl yürütmenin ve bu akıl yürütme sonunda vardığı yargının bir sonucudur.

Etkinlik – 2

"Ali kalem kutusundaki kurşun kalemlerden 3'ünü almış; uçlarının açık olmadığını görünce kutuya geri koymuştur."

Yukarıda anlatılanların doğru olduğunu varsayarak, kutudaki kalemlerle ilgili aşağıdaki **yargı**ların **doğru**luğunu tartışınız.

a. *Kutuda açık uçlu kalem yoktur.*

b. *Kutuda açık uçlu kalem vardır.*

c. *Kutuda, uçları açık olmayan kalemlerin sayısı 3'tür.*

d. *Kutudaki kalemlerden en az 3'ünün uçları açık değildir.*

Etkinlik-3'te de, **Etkinlik-2**'deki ile aynı zorluk düzeyinde, zihinlerden sözlere aktarılmış akıl yürütme örnekleri verilmiştir.

Bu örneklerde varılan yargıların doğru olup olmadığını bulabilmek için bir mantık eğitimi gerekmez. Sözlerin anlamlarının anlaşılması yeterlidir.

Etkinlik – 3

Edinilmiş **yargı**lardan sonuç çıkarma işlemine **çıkarım** denir.

Eldeki, edinilmiş yargılara **öncül** adı verilir.

Örneğin;

"Çalışmayan sınıfını geçemez.

Yiğit çalışıyor.

O hâlde; Yiğit sınıfını geçer."

biçimindeki bir akıl yürütme bir **çıkarım**dır.

Bu çıkarımda ilk iki yargı **öncül,** son yargı **sonuç**tur.

Mantıkta, çıkarımların geçerliliğini denetleme - çıkarımların doğru olup olmadığını, öncüllerin sonucu gerektirip gerektirmediğini belirleme - yollarını öğreneceksiniz.

Çıkarımların geçerliliğini denetleme yollarını bilmediğiniz şu anda, sizce;

Aşağıdaki çıkarımlardan hangileri geçerlidir?

Geçersiz bulduklarınızı hangi gerekçelerle geçersiz sayıyorsunuz?

Tartışınız.

a. ***3 ile 5 birer asal sayı olup toplamı çifttir.***
O hâlde, iki asal sayının toplamı çifttir.

b. ***Ali, Can'dan uzun boyludur.***
Can, Veli'den uzun boyludur.
O hâlde; Ali Veli'den uzun boyludur.

c. ***Çift iki doğal sayının çarpımı çift olduğuna göre, tek iki doğal sayının çarpımı tektir.***

d. ***Tanıdığım her Rize'li iyi insandı.***
Rize'liler iyi insanlardır.

e. ***Çalışan kazanır.***
Kazandıysa çalışmıştır.

f. ***Ünye'liler cömerttir.***
Ayşe Ünye'lidir.
Öyleyse, Ayşe cömerttir.

g. ***Ünye'liler cömerttir.***
Nazlı da cömerttir.
Öyleyse, Nazlı Ünye'lidir.

h. ***Ünye'liler cömerttir.***
Zeynep cömert değildir.
Öyleyse; Zeynep Ünye'li değildir.

i. ***Ünye'liler cömerttir.***
Soner Ünye'li değildir.
Öyleyse; Soner cömert değildir.

j. ***Çalışmayan sınıfını geçemez.***
Yiğit çalışıyor.
O hâlde; Yiğit sınıfını geçer.

Doğru düşünme konusunda henüz bilimsel bir birikiminizin olmamasına karşın yukarıda verilen çıkarımlardan hangilerinin geçerli, hangilerinin geçersiz olduklarını bulmuşsunuzdur. Bununla birlikte; doğru düşünmenin derli toplu kurallarının konulmasının gerektiğini de sezmişsinizdir.

İşte; mantık biliminde bu yapılır.

Mantık, doğru düşünmenin – doğru çıkarımlar yapmanın, yapılan çıkarımların doğruluğunu denetlemenin – kurallarını koyan bilim dalıdır.

Doğru düşünme yeteneği insanın doğasında var olduğuna göre, doğru düşünme kurallarını ilk insanların da uyguladıklarını söyleyebiliriz.

Ancak; bu zihinsel işlemlerin nesilden nesile aktarılması yazı ile, sembollerle olanaklı idi. Bu olanaklarla, bu kuralları sistemli bir biçimde ilk kez ortaya koyan – ya da derleyip toparlayan – İlk Çağ'ın Yunan filozoflarından **Aristo** olmuştur. Aristo, sizin **Etkinlik-3**'te incelediğiniz türden çıkarımları konu edinmiştir. O'nun koyduğu kurallar toplamı günümüzde **Klâsik Mantık** diye bilinir.

Mantık ve Dil

*"**Mantık**"* sözcüğü Arapça kökenlidir; *"**Söze dökme**", "**dile getirme**"* anlamına gelen *"**nutuk**"* sözcüğünden türetilmiştir. Bu adlandırma bile mantık ile dilin nasıl sıkı sıkıya bağlı olduklarını anlatmaya yeter.

Gerçekten; düşüncelerin belirtilmesinde en önemli araç dildir. Bununla birlikte; yargıların doğru aktarılmasını sağlamada sözler zaman zaman yetersiz kalabilir. Sözlerle belirtilen düşünceler sözlerin söyleniş biçiminden, sözcüklere değişik kişilerce değişik anlamlar yüklenmesinden etkilenebilir.

Etkinlik – 4

Aşağıdaki tümcelerin her biri iki anlama gelebilir. Gerekli noktalama değişiklikleri ile bu tümceleri yalnız bir anlama gelen biçimlere dönüştürünüz.

a. ***Bu gece gezintileri onu yordu.***

b. ***İpek iki kulplu tencere satın almış.***

c. ***Ülkü teyzesiyle oynasın.***

d. ***Çocuk kitabı okuyor.***

Etkinlik – 5

*"**Çalışırsan kazanırsın.**" tümcesini* öyle bir vurgulama ile söyleyiniz ki, *"**Çalışmazsan kazanamazsın.**"* anlamına gelsin.

Etkinlik – 6

Alper, *“Temmuzda Bodrum’a veya Fethiye’ye gideceğim.”* demişse, sizce aşağıdakilerden hangisini anlatmak istemiştir?

a. *“Temmuzda ya Bodrum’a ya da Fethiye’ye gideceğim.”*

b. *“Temmuzda ya Bodrum’a ya Fethiye’ye ya da hem Bodrum’a hem de Fethiye’ye gideceğim.”*

Etkinlik-4, **Etkinlik-5** ve **Etkinlik-6**’dan da anlaşılabileceği gibi; sözlerle aktarılan yargılara, amaçlananın dışında, farklı anlamlar yüklenebilir.

Aynı dili konuşan insanların bile sözlerle aktarılan yargıları nasıl farklı algılayabileceği ortada iken bir de, bir dilde yapılan çıkarımların başka bir dile çevrildiğini düşününüz. Sözcüklerin diğer dildeki tam karşılıklarını bulmada büyük sorunlar yaşanabilecektir. Oysa, çıkarımlar dil ve kültür farklılıklarından etkilenmemelidir. Bütün bunlar, yargıları açık ve kesin olarak aktaracak evrensel bir dilin gerekliliğini ortaya koymuştur. Bu sorun, mantıkta **sözcüklerin veya sözlerin yerine sembollerin kullanılması** ile çözümlenmiştir.

Aristo da zaman zaman sembol kullanmıştır. Ancak mantıkta ve matematikte sembolik bir dil oluşturma çabaları Alman filozofu G.W. Leibniz (1646–1716) ile başlar. Leibniz’in çalışmaları bugünkü bilgisayar biliminin de temelini oluşturur.

Matematiksel mantık veya **Sembolik mantık** diye de adlandırılan bugünkü modern mantığın kurucuları, Leibniz’in açtığı yolda çalışmalar yapan İngiliz matematikçi ve mantıkçı George Boole (1815–1864) ile Alman matematikçi ve mantıkçı Gotllob Frege’dir. (1848–1925)

İngiliz filozof ve matematikçileri Alfred North Whitehead (1861–1937) ve Bertrand Russell (1972–1970) da mantık bilimini geliştirerek tüm matematiği mantığa indirgeyen çalışmalar yapmışlardır.

Sembolik mantık, doğru düşünmenin bilimi olmasının yanında matematiğin de dili durumundadır.

Terim, Tanımsız Terim

Etkinlik – 7

Aşağıdaki sözcüklerin günlük dildeki anlamları ile matematikteki anlamlarını açıklayınız.

a. Nokta	**b.** Doğru	**c.** Daire
d. Işın	**e.** Küp	**f.** Küme

Etkinlik – 8

Matematikte, günlük konuşma dilindeki anlamlarından başka, özel anlamlar yüklenerek kullanılan sözcüklere örnekler veriniz.

Tanım – 1

*Bir bilim dalında, o bilim dalına özgü kavramlara ad olarak atanmış sözcüklere veya sözlere o bilim dalının **terim**leri denir.*

Bir terim günlük konuşma dilinden alınmış bir sözcük olabileceği gibi, yalnız o bilim dalında geçerli bir anlamı olan bir sözcük de olabilir. Günlük dildeki bir sözcüğün bir bilim dalında bir kavrama karşılık getirilmesi, doğal olarak bu kavramla o sözcüğün anlamı arasında bir benzerlik kurulması sonucu olur. Matematikteki “***nokta***” ile *“**bilet satış noktası**”*ndaki noktayı; matematikteki “***ışın***” ile *“**ışık ışınları**”*ndaki ışını düşününüz. Aynı benzerlikler kurularak, bir bilim dalında anlamı olan bir terim de zamanla günlük dilde kullanılan bir sözcük durumuna gelebilir.

► Bir terimin anlamının tanıtılmasına o terimin **tanım**lanması denir. Bir terimi tanımlamak için başka terimleri kullanırız. Örneğin; matematikte *“**Açı**”* terimi, *“**Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşimi**.”* biçiminde tanımlanır. Bu tanımda geçen *“**Nokta**”*, *“**Işın**”*, *“**Birleşim**”* terimleri önceden tanımlanmış olmalıdır. Burada karşımıza bir sorun çıkar. Her terimi tanımlanmış terimlerle tanımlamaya kalkışırsak, elimizde tanımlanmış terim kalmaz. Bu yüzden bazı temel kavramları **tanımsız terim**lerle adlandırma zorunluluğu vardır.

Tanımsız olarak alınan terimler, sözler veya şekillerle mümkün olduğu kadar açıklanır; bunların algılanması sezgiye bırakılır.

"**Nokta**", "**Doğru**", "**Düzlem**", "**Küme**", "**Değişken**", "**Eşitlik**" terimleri matematikteki tanımsız terimlerden bazılarıdır.

2. Önerme Bağlaçları Mantığı

Mantığın, önermeleri birbirine bağlayan bağlaçlarla ilgilenen bölümüdür.

Önermenin Tanımı

Etkinlik – 9

Aşağıdaki ifadelerden hangileri için "**doğru**" ya da "**yanlış**" diyebilirsiniz?

a. ***İki kere iki dört etmez.***

b. ***1 ile 3'ün toplamı 5'ten küçüktür.***

c. $3 \cdot 4 - 2 = 6$

d. ***Kitap en iyi arkadaştır.***

e. ***Zeynep çok akıllıdır.***

f. ***Bu şarkı harika!***

g. ***Kaç yaşındasın?***

h. ***Ders çalışırken, yanınıza bir sözlük alınız.***

i. ***Sözlük ve ansiklopedi kullanmanız, çalışmanızın verimliliğini arttırır.***

j. ***Benim her söylediğim yanlıştır.***

k. ***Benim her söylediğim doğrudur.***

Tanım – 2

*Doğru ya da yanlış bir yargı bildiren ifadeye **önerme** denir.*

Örneğin;

*"**Kızılırmak Karadeniz'e dökülür.**";*

"$2 + 3 = 7$"

ifadeleri birer önermedir. Bunlardan birincisi doğru, ikincisi yanlış bir yargı bildirir.

► Önermeler küçük veya büyük harflerle veya sembollerle adlandırılabilirler.

► "**Doğru**" ve "**yanlış**" nitelemelerine önermenin **doğruluk değerleri** adı verilir.

Bir önermenin **doğru** olması, **D** harfi ya da **1** rakamı ile; **yanlış** olması, **Y** harfi ya da **0** rakamı ile belirtilir.

Önermelerin doğruluk değerlerinin gösterildiği tabloya **doğruluk tablosu** denir.

p doğru bir önermeyi, **q** yanlış bir önermeyi, **r** doğru ya da yanlış olabilecek bir önermeyi gösteriyorsa, bunların doğruluk tabloları aşağıdaki gibi olur.

p
D

ya da

p
1

;

q
Y

ya da

q
0

;

r
D
Y

ya da

r
1
0

► Doğruluk değerleri belirtilmeyen p ve q gibi iki önermeden p doğru iken q doğru ya da yanlış; p yanlış iken q yine doğru ya da yanlış olabilir.

O hâlde, bu iki önermenin birlikte doğruluk değerleri yandaki 4 durumdan biri gibi olabilir.

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

Etkinlik – 10

a. Üç önermenin doğruluk değerleri kaç değişik durumda olabilir?

Bu durumları **doğruluk tablosu**nda gösteriniz.

b. Dört önermenin doğruluk değerleri kaç değişik durumda olabilir?

Bu durumları doğruluk tablosunda gösteriniz.

c. **n** önermenin doğruluk değerleri kaç değişik durumda olabilir?

► Bazı önermelerin doğruluk değerleri, belli bir **yorumlama** yapılmazsa belirsizdir.

Örneğin, *“**Ali Can’dan uzun boyludur.**”* önermesine ilk bakışta “**doğru**dur” ya da “**yanlış**tır” denemez.
Ancak Ali ile Can’ın boyları belirtilirse, bu önerme bir doğruluk değeri kazanır.

Bir önermenin doğruluk değerinin belirlenmesi için ek bilgilerin verilmesi işlemine ***anlamın belirlenmesi*** veya ***yorumlama*** denir. Bu durumda önerme tanımını genişleterek aşağıdaki gibi yaparız:

⌘ ***“Belli bir yorumlama ile bir doğruluk değeri kazanan ifadelere önerme denir.”***

► Polonyalı bilgin Mikolaj Kopernik (1473–1543) 16. yüzyılda,

“Dünya, Güneş’in etrafında dönüyor.”

demiştir. O günlerde birkaç kişi bu önermeyi ***doğru*** diye nitelerken, bunların dışındaki herkes ***yanlış*** diye niteliyordu.

Bir sözün kimilerince doğru, kimilerince yanlış sayılması, o sözün önerme olup olmadığını belirlemek için bir ölçüt değildir.

Dünya Güneş’in etrafında ya dönüyordur ya da dönmüyordur.
Kopernik’in sözü ya doğrudur ya da yanlıştır.
Öyleyse; bu söz bir önermedir.

⌘ Bazı önermelerin doğruluk değerini belirlemek için **gözlem**ler ve **deney**ler yapmak gerekebilir.

► Bir sözün önerme olması için **nesnel** bir yargı taşıması gerekir.
Örneğin;
“Ayşegül’ü seviyorum.”
türünden **öznel** bir yargı taşıyan söze “***doğru***” ya da “***yanlış***” diyemeyiz.

Bu söz bir önerme değildir.

► ***“Ali’nin çalışırsa sınıfını geçeceği doğru ve Ali’nin sınıfını geçtiği doğru ise Ali çalışmıştır.”***

türünden bir önermenin doğruluk değeri bir **mantık hesabı** ile belirlenir. Bunu ilerdeki sayfalarımızda yapacağız.

► ***“Son peygamber Hz. Muhammet’tir.”***

önermesini müslümanlar doğru, müslüman olmayanlar yanlış sayar.

“20. yüzyılın en büyük devlet adamı Mustafa Kemal Atatürk’tür.”

önermesi de aynı türden bir önermedir.

Ancak; mantık biliminin dil, din, kültür ve ırk farklılıklarından etkilenmemesi gerektiği düşünülürse, bu tür önermelerin mantıkta ele alınmayacağı anlaşılır.
Mantıkta inceleyeceğimiz önermeler, doğruluk değeri üzerinde herkesin birleştiği önermeler olacaktır.

Bir Önermenin Olumsuzu

Tanım – 3

*Bir önermenin bildirdiği yargının yerine bunun olumsuzunun konulmasıyla elde edilen önermeye ilk **önermenin olumsuzu** (**değili**) denir.*

► **p** önermesinin olumsuzu **p′** ile gösterilir.

p doğru ise p′ yanlış; p yanlış ise p′ doğrudur.

p	p′
1	0
0	1

Örnekleri inceleyiniz:

p	***: 15 asal sayıdır.***	(0)
p′	***: 15 asal sayı değildir.***	(1)
q	***: Ünye Karadeniz Bölgesindedir.***	(1)
q′	***: Ünye Karadeniz Bölgesinde değildir.***	(0)
r	: $23+4=27$	(1)
r′	: $23+4\neq 27$	(0)
t	***: Her kuş uçar.***	(0)*
t′	***: Her kuşun uçtuğu doğru değildir.***	(1)

*(*) “Her kuş uçar.” önermesi ile bunun olumsuzunu **Niceleyiciler Mantığı** bölümünde yeniden ele alacağız.*

İki Önermenin Denkliği

Tanım – 4

*Doğruluk değerleri aynı olan iki önermeye **denk önermeler** denir.*

p önermesi q önermesine denk ise, bu denklik $\mathbf{p \equiv q}$ biçiminde gösterilir. p ile q denk değilse, bu da $\mathbf{p \not\equiv q}$ biçiminde sembolleştirilir.

Örneğin; ***p , q , r , s*** önermeleri

p : Ay Dünya'dan küçüktür. (1)

$q : 2+3 \neq 5$ (0)

r : Bir hafta 7 gündür. (1)

s : Ankara bir başkent değildir. (0)

olarak verilirse,

$p \equiv q$, $q \equiv s$ ve $p \not\equiv q$ olur.

Etkinlik – 11

Etkinlik–9'da verilen ifadelerden hangileri önermedir?

Önerme olanlarının **olumsuz**larını yazınız.

Etkinlik – 12

Aşağıda verilen ifadelerden hangileri önermedir? Önerme olanların olumsuzlarını yazınız.

Denk olan önermeleri belirtiniz.

a. ***Her gün süt içerim.***

b. ***Yarın İstanbul'a kar yağacak.***

c. ***Terimlerin tanımlarını öğrenmeliyim.***

d. ***Beşiktaş Ankara'nın ilçesidir.***

e. $C + O_2 \rightarrow CO_2$

f. ***Bu problem böyle mi çözülür?***

g. $126 \neq 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

h. ***Fatih Sultan Mehmet ceylân eti yedi.***

i. ***Meltem derslerini dikkatle izlemelidir.***

j. ***Alper çok akıllıdır.***

k. ***Erol dün okula gitmemiş.***

l. $6^2 + 8^2 = 10^2$ ***olduğu doğru değildir.***

m. ***Murat'ın başkan olmasını öneriyorum.***

n. ***Murat'ın başkan olmasını önerdim.***

o. ***Bu etkinlikteki her önerme yanlıştır.***

p. ***Bu etkinlikteki her önerme doğrudur.***

Etkinlik – 13

Bir önermenin olumsuzunun olumsuzu kendisine denktir.

Yandaki tabloyu tamamlayarak $(p')' \equiv p$ olduğunu gösteriniz

p	p′	(p′)′
1		
0		

Etkinlik – 14

Önerme olan ve önerme olmayan ifadeler yazınız.

Bunlardan önerme olanlarının olumsuzlarını da yazınız.

Bileşik Önermeler

Tanım – 5

*Bir veya daha fazla önermeden yeni önermeler elde etmek için kullanılan "**ve**", "**veya**", "**ya da**", "**ise**", "**değil**", "**ancak … ise**", "**ancak ve ancak … ise**" gibi sözcük ya da sözcük gruplarına **önerme bağlacı** veya **önerme eklemi** denir.*

Günlük dilde **önerme bağlacı** olarak kullanılan sözcükler genellikle değişik anlamlara getirilebildikleri gibi, aynı bağlaç için farklı sözcükler de kullanılır. Bu durumdan doğabilecek çok anlamlılığı önlemek için mantıkta önerme bağlacı olarak tek anlamlı özel semboller kullanılır.

Mantıkta **Tanım–5**'te verilenlerden başka önerme bağlaçları da kullanılır. Ancak matematikte burada verilenler yeterli olacağı için biz sadece bu bağlaçlardan söz edeceğiz.

Tanım – 6

*Önerme bağlaçları kullanılarak elde edilen yeni önermelere **bileşik önermeler**; bir bileşik önermeyi oluşturan önermelere de bu bileşik önermenin **bileşen**leri denir.*

*Bileşenlerine ayrılamayan önermelere **basit önerme**ler adı verilir.*

Örneğin;

a. *Arda evde **değil**dir.*

b. *Arda **ve** Yüksel evdedirler.*

c. *Arda **veya** Yüksel evdedirler.*

d. *Arda **ya da** Yüksel evdedir.*

e. *Arda evde **ise** Yüksel evdedir.*

f. ***Ancak** Arda evde **ise** Yüksel evdedir.*

g. ***Ancak ve ancak** Arda evde **ise** Yüksel evdedir.*

önermeleri birer **bileşik önerme**dir.

Bu bileşik önermeleri oluşturan,

p : *"Arda evdedir."* ile

q : *"Yüksel evdedir."*

önermeleri birer **basit önerme**dir.

► Mantıkta "***ve***" bağlacı yerine "$\wedge$" sembolü;

"***veya***" bağlacı yerine "$\vee$" sembolü;

"***ya da***" bağlacı yerine "$\veebar$" sembolü kullanılır.

Buna göre,

"**b**" önermesi $\mathbf{p \wedge q}$ biçiminde;

"**c**" önermesi $\mathbf{p \vee q}$ biçiminde;

"**d**" önermesi $\mathbf{p \veebar q}$ biçiminde sembolleştirilir.

"**a**" önermesinin $\mathbf{p'}$ biçiminde sembolleştirildiğini biliyorsunuz.

"**e**", "**f**" ve "**g**" önermelerini **koşullu önermeler** başlığı altında inceleyeceğiz.

Bileşik Önermelerin Doğruluk Değerleri

Mantıkta; "$\wedge$", "$\vee$" ve "$\veebar$" bağlaçlarına hemen hemen günlük dildeki anlamları yüklenmiştir.

$\mathbf{p \wedge q}$, $\mathbf{p \vee q}$ ve $\mathbf{p \veebar q}$ önermelerinin aşağıda verilen doğruluk değerleri **aksiyom** olarak alınmıştır. Bu doğruluk değerleri bağlaçların dilimizdeki anlamlarının tam karşılığıdır.

"Doğru sayılan" bir önermeye "**aksiyom**"; doğru bir yargılama ile doğruluğunun gösterilmesi gereken "doğru önerme"ye "**teorem**" denildiğini şimdiden söyleyelim.

Bu kavramları "**Tanım**, **Aksiyom**, **Teorem**, **İspat**" bölümünde ayrıntılı olarak açıklayacağız.

Aksiyom – 1

p ile q birer önerme, "$\wedge$" önerme bağlacı olduğuna göre; $\mathbf{p \wedge q}$ önermesinin doğruluk değerleri yandaki gibidir.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tabloda görüldüğü gibi; $p \wedge q$ önermesi, bileşenlerinin her ikisi de doğru iken doğru, diğer durumlarda yanlıştır.

Örneğin; "Ali evdedir **ve** Can evdedir." önermesi, hem Ali'nin hem Can'ın evde olduğunu bildirir.

Aksiyom – 2

p ile q birer önerme, "$\vee$" önerme bağlacı olduğuna göre; $\mathbf{p \vee q}$ önermesinin doğruluk değerleri yandaki gibidir.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tabloda görüldüğü gibi; $p \vee q$ önermesi bileşenlerinin her ikisi de yanlış iken yanlış, diğer durumlarda doğrudur.

Örneğin; "Ali evdedir **veya** Can evdedir." önermesi, Ali ile Can'dan en az birinin evde olduğunu bildirir.

Aksiyom – 3

p ile q birer önerme,
"$\veebar$" önerme bağlacı olduğuna göre;
$p \veebar q$ önermesinin doğruluk değerleri yandaki gibidir.

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tabloda görüldüğü gibi; $p \veebar q$ önermesi, bileşenlerinin yalnız birisi doğru iken doğru, diğer durumlarda yanlıştır.

Örneğin; "Ali evdedir **ya da** Can evdedir." önermesi, yalnız birinin evde olduğunu bildirir.

"$\wedge$", "$\vee$" ve "$\veebar$" İşlemlerinin Özellikleri

Önermeler ve önerme bağlaçları ile bir bileşik önerme elde etme eylemi bir **işlem**dir.

Bu yaklaşımla;

- "$\wedge$" sembolü ile gösterilen işleme, "**ve işlemi**" veya "**kesişim işlemi**";
  $p \wedge q$ önermesine "**p ile q önermelerinin kesişimi**" denir.
- "$\vee$" sembolü ile gösterilen işleme, "**veya işlemi**" veya "**birleşim işlemi**",
  $p \vee q$ önermesine "**p ile q önermelerinin birleşimi**" denir.
- $(...)'$ sembolü ile gösterilen işleme "**değilleme işlemi**",
  p' önermesine "**p önermesinin değili**" ya da "**p önermesinin olumsuzu**" denir.
- "$\veebar$" sembolü ile gösterilen işleme, "**ya da işlemi**" denir.
  $p \veebar q$ önermesine "**p ile q önermelerinin dar birleşimi**" denilebilir.
  Bu yaygın kullanılan bir ad değildir.

Biz kısaca,

"**kesişim işlemi**"ne "**$\wedge$ işlemi**";

"**birleşim işlemi**"ne "**$\vee$ işlemi**";

"**ya da işlemi**"ne "**$\veebar$ işlemi**" diyeceğiz.

"$\wedge$" ve "$\vee$" İşlemlerinin Tek Kuvvet Özelliği

"Çalışırsın **veya** çalışırsın" demek, günlük dilde "Çalışmaktan başka seçeneğin yoktur." anlamında kullanılan bir **ikileme**dir.

Ancak; mantıkta bu ikileme anlamı değiştirmez. Söz yine, "Çalışırsın" anlamına gelir.

Teorem – 1

***p** bir önerme olduğuna göre, aşağıdaki denklikler geçerlidir.*

a. $p \wedge p \equiv p$ *($\wedge$ işleminin tek kuvvet özelliği)*

b. $p \vee p \equiv p$ *($\vee$ işleminin tek kuvvet özelliği)*

Etkinlik – 15

a. Yandaki doğruluk tablosunu tamamlayarak $p \wedge p \equiv p$ olduğunu gösteriniz.

p	p	$p \wedge p$
1		
0		

b. Doğruluk tablosu yardımıyla $p \vee p \equiv p$ olduğunu gösteriniz.

c. Doğruluk tablosu yardımıyla $p \veebar p \equiv 0$ olduğunu gösteriniz.

► "Çalışırsın **ya da** çalışırsın" ikilemesi de dilimizde, yine, "Çalışmaktan başka seçeneğin yoktur." anlamında kullanılır. Ancak; mantıkta bu ikileme, yanlış bir önerme olur.

"$\vee$", "$\wedge$" ve "$\veebar$" İşlemlerinin Değişme Özelliği

Teorem – 2

***p** ile **q** birer önerme olduğuna göre, aşağıdaki denklikler geçerlidir.*

a. $p \wedge q \equiv q \wedge p$ *($\wedge$'nin değişme özeliği)*

b. $p \vee q \equiv q \vee p$ *($\vee$'nın değişme özeliği)*

c. $p \veebar q \equiv q \veebar p$ *($\veebar$'nın değişme özeliği)*

Etkinlik – 16

a. Yandaki doğruluk tablosunu tamamlayarak $\mathbf{p \vee q \equiv q \vee p}$ olduğunu gösteriniz.

p	q	pvq	qvp
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

b. Doğruluk tablosu yardımıyla $\mathbf{p \wedge q \equiv q \wedge p}$ olduğunu gösteriniz.

c. Doğruluk tablosu yardımıyla $\mathbf{p \veebar q \equiv q \veebar p}$ olduğunu gösteriniz.

"$\vee$", "$\wedge$" ve "$\veebar$" İşlemlerinin Birleşme Özelliği

Teorem – 3

***p**, **q** ve **r** birer önerme olduğuna göre, aşağıdaki denklikler geçerlidir.*

a. $\mathbf{p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r}$ *($\wedge$'nin birleşme özelliği)*

b. $\mathbf{p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r}$ *($\vee$'nın birleşme özelliği)*

c. $\mathbf{p \veebar (q \veebar r) \equiv (p \veebar q) \veebar r}$ *($\veebar$'nın birleşme özelliği)*

Etkinlik – 17

a. Aşağıdaki doğruluk tablosunu tamamlayarak $\mathbf{p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r}$ olduğunu gösteriniz.

p	q	r	pvq	qvr	pv(qvr)	(pvq)vr
1	1	1				
1	1	0				
1	0	1				
1	0	0				
0	1	1				
0	1	0				
0	0	1				
0	0	0				

b. Doğruluk tablosu yardımıyla $\mathbf{p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r}$ olduğunu gösteriniz.

c. Doğruluk tablosu yardımıyla $\mathbf{p \veebar (q \veebar r) \equiv (p \veebar q) \veebar r}$ olduğunu gösteriniz.

► **Teorem–3**'e dayanılarak; art arda "$\wedge$" işlemleri, art arda "$\vee$" işlemleri ve art arda "$\veebar$" işlemleri arasındaki parantezler atılabilir:

a. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge q \wedge r$,

b. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \equiv p \vee q \vee r$ ve

c. $p \veebar (q \veebar r) \equiv (p \veebar q) \veebar r \equiv p \veebar q \veebar r$ gibi.

► "$\wedge$", "$\vee$" ve "$\veebar$" işlemlerinin hem değişme hem de birleşme özellikleri olduğundan, önermelerin işlem sıraları istenildiği gibi değiştirilebilir. Aşağıdaki denklikler geçerlidir:

a. $p \wedge q \wedge r \equiv p \wedge r \wedge q \equiv q \wedge p \wedge r \equiv r \wedge p \wedge q \equiv ...$

b. $p \vee q \vee r \equiv p \vee r \vee q \equiv q \vee p \vee r \equiv r \vee p \vee q \equiv ...$

c. $p \veebar q \veebar r \equiv p \veebar r \veebar q \equiv q \veebar p \veebar r \equiv r \veebar p \veebar q \equiv ...$

"$\vee$", "$\wedge$" ve "$\veebar$" İşlemlerinin Birbirleri Üzerine Dağılma Özellikleri

Teorem – 4

***p**, **q** ve **r** birer önerme olduğuna göre, aşağıdaki denklikler geçerlidir.*

a. $\mathbf{p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)}$

($\wedge$'nin $\vee$ üzerine soldan dağılma özelliği)

b. $\mathbf{p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)}$

($\vee$'nın $\wedge$ üzerine soldan dağılma özelliği)

c. $\mathbf{(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)}$

($\vee$'nın $\wedge$ üzerine sağdan dağılma özelliği)

d. $\mathbf{(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)}$

($\wedge$'nin $\vee$ üzerine sağdan dağılma özelliği)

e. $\mathbf{p \wedge (q \veebar r) \equiv (p \wedge q) \veebar (p \wedge r)}$

($\wedge$'nin $\veebar$ üzerine soldan dağılma özelliği)

f. $\mathbf{(p \veebar q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \veebar (q \wedge r)}$

($\wedge$'nin $\veebar$ üzerine sağdan dağılma özelliği)

Etkinlik – 18

Doğruluk tablosu yardımıyla,

a. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ olduğunu gösteriniz.

b. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ olduğunu gösteriniz.

c. $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ olduğunu gösteriniz.

d. $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ olduğunu gösteriniz.

e. $p \wedge (q \veebar r) \equiv (p \wedge q) \veebar (p \wedge r)$ olduğunu gösteriniz.

f. $(p \veebar q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \veebar (q \wedge r)$ olduğunu gösteriniz.

► "$\vee$" işleminin "$\veebar$" işlemi üzerine dağılma özelliği yoktur.

► "$\veebar$" işleminin "$\vee$" işlemi üzerine dağılma özelliği yoktur.

► "$\veebar$"işleminin "$\wedge$" işlemi üzerine dağılma özelliği yoktur.

Etkinlik – 19

a. "$\vee$" işleminin "$\veebar$" işlemi üzerine dağılma özelliği olmadığını gösteriniz.

b. "$\veebar$"işleminin "$\vee$" işlemi üzerine dağılma özelliği olmadığını gösteriniz.

c. "$\veebar$"işleminin "$\wedge$" işlemi üzerine dağılma özelliği olmadığını gösteriniz.

Kesişimin ve Birleşimin Değilleri

Teorem – 5

De Morgan Teoremi

p ile q birer önerme olduğuna göre; aşağıdaki denklikler geçerlidir.

a. $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$

b. $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$

Etkinlik – 20

a. Aşağıdaki doğruluk tablosunu tamamlayarak $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ olduğunu gösteriniz.

p	q	p'	q'	$p \vee q$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$
1	1					
1	0					
0	1					
0	0					

b. $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ olduğunu gösteriniz.

Etkinlik – 21

"1" doğru bir önermeyi,
"0" yanlış bir önermeyi,
"p" bir önermeyi gösterdiğine göre;
aşağıdaki denklikleri doğruluğunu gösteriniz.

a. $p \wedge 1 \equiv p$ b. $p \wedge 0 \equiv 0$ c. $p \vee 1 \equiv 1$

d. $p \vee 0 \equiv p$ e. $p \vee p' \equiv 1$ f. $p \wedge p' \equiv 0$

g. $p \vee p \equiv p$ h. $p \wedge p \equiv p$

Etkinlik – 22

"1" doğru bir önermeyi,
"0" yanlış bir önermeyi,
"p" ile "q" birer önermeyi gösterdiğine göre;
aşağıdaki denkliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $p \veebar 1 \equiv p'$ b. $p \veebar 0 \equiv p$

c. $p \veebar p \equiv 0$ d. $p \veebar p' \equiv 1$

e. $p \veebar q \equiv p' \veebar q'$ h. $(p \wedge q) \veebar (p \vee q) \equiv p \veebar q$

$p \veebar q$ Önermesinin Değili

Teorem – 6

p ile q birer önerme olduğuna göre aşağıdaki denklikler geçerlidir.

a. $p \veebar q \equiv (p' \wedge q) \vee (p \wedge q')$

b. $(p \veebar q)' \equiv p' \veebar q \equiv p \veebar q'$

Etkinlik – 23

Aşağıdaki denkliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $p \veebar q \equiv (p' \wedge q) \vee (p \wedge q')$

b. $(p \veebar q)' \equiv p' \veebar q \equiv p \veebar q'$

Etkinlik – 24

Liseler arası bilgi yarışması takımına, Bilge ve Duygu'nun da bulunduğu 9-A sınıfından en çok 2 kişi seçilecektir.

İlgililer aşağıdaki önermeleri dile getirmişlerdir:

p: "***Bilge ve Duygu seçilir***."

q: "***Bilge veya Duygu seçilir***."

r: "***Bilge ya da Duygu seçilir***."

s: "***Bilge ve Duygu seçilmez***."

t: "***Bilge veya Duygu seçilmez***."

u: "***Bilge ya da Duygu seçilmez***."

I. Bilge seçilir, Duygu seçilmezse; bu önermelerin doğruluk değerleri neler olur?

II. Hem Bilge hem Duygu seçilirse, bu önermelerin doğruluk değerleri neler olur?

III. Bilge de Duygu da seçilmezse, bu önermelerin doğruluk değerleri neler olur?

"***Bilge veya Duygu seçilmez***." tümcesinin dilimizde, "***Bilge seçilmez veya Duygu seçilmez***." anlamında olduğu dikkate alınmalıdır.

Etkinlik – 25

Önerme işlemlerinin özelliklerinden yararlanarak, aşağıda verilen önermelere denk olan en sade önermeleri bulunuz.

Doğruluk tablosu yardımıyla, bulduğunuz denkliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $(p \vee q) \vee p'$

b. $p \wedge (q \wedge p')$

c. $(p \wedge q) \vee q'$

d. $(p \vee q) \wedge q'$

e. $(p \vee q) \wedge (p' \vee q)$

f. $(p \wedge q) \vee (p \wedge q')$

g. $p \vee (p \veebar q)$

h. $p \veebar (p \vee q)$

Örnek Problem – 1

$(p \vee q)' \vee (q' \wedge r)' \equiv 0$ olduğuna göre,

$$s \equiv \left[(p \wedge q') \wedge (p' \vee q')'\right]' \vee \left[p \wedge (q \wedge r)'\right]'$$

önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

Çözüm

$(p \vee q)' \vee (q' \wedge r)' \equiv 0$ ise

$(p \vee q)' \equiv 0$ ve $(q' \wedge r)' \equiv 0$ olur.

Bu denkliklerden

$p \vee q \equiv 1$ ve $q' \wedge r \equiv 1$ olduğu;

bunlardan da,

$p \equiv 1,\ q \equiv 0,\ r \equiv 1$ olduğu bulunur.

Bu doğruluk değerleri s önermesinde yerlerine konulursa;

$$s \equiv \left[(1 \wedge 0') \wedge (1' \vee 0')\right]' \vee \left[1 \wedge (0 \wedge 1)'\right]'$$

$$\Rightarrow s \equiv \left[(1 \wedge 1) \wedge (0 \vee 1)'\right]' \vee \left[1 \wedge 0'\right]'$$

$$\Rightarrow s \equiv (1 \wedge 1') \vee (1 \wedge 1)'$$

$$\Rightarrow s \equiv (1 \wedge 0) \vee 1'$$

$$\Rightarrow s \equiv 0 \vee 0$$

$$\Rightarrow s \equiv 0 \quad \text{bulunur.}$$

("$\Rightarrow$" işareti "**ise**" anlamında kullanılır.

"**İse**" bağlacını henüz bir mantık terimi olarak incelemedik. Ancak; buradaki kullanım için günlük dildeki anlamının bilinmesini yeterli bulduk.)

Örnek Problem – 2

p'nin doğru bir önerme olduğu bilindiğine göre,

$$\mathbf{s \equiv \left[(p \wedge q') \wedge (p' \vee q')\right] \vee \left[p \wedge (q \wedge r)\right]}$$

önermesini en sade biçimde yazınız.

Çözüm

$p \equiv 1$ değerini s önermesindeki yerlerine koyarsak;

$s \equiv [(1 \wedge q') \wedge (0 \vee q')] \vee [1 \wedge (q \wedge r)]$

$\Rightarrow \; s \equiv (q' \wedge q') \vee (q \wedge r)$

$\Rightarrow \; s \equiv q' \vee (q \wedge r)$ *(tek kuvvet özelliği)*

$\Rightarrow \; s \equiv (q' \vee q) \wedge (q' \vee r)$ *(dağılma özelliği)*

$\Rightarrow \; s \equiv 1 \wedge (q' \vee r)$

$\Rightarrow \; s \equiv q' \vee r$ bulunur.

Örnek Problem – 3

Aşağıdaki denkliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $\mathbf{p \wedge (p \vee q) \equiv p}$ **b.** $\mathbf{(p \wedge q) \vee q \equiv q}$

c. $\mathbf{[(p' \wedge q) \vee p] \wedge q' \equiv p \wedge q'}$

Çözüm

Verilen denkliklerin doğruluğu, doğruluk tabloları ile gösterilebilir. Bunu siz yapınız.

Biz işlemlerin özelliklerinden yararlanacağız :

a. $p \wedge (p \vee q) \equiv (p \wedge p) \vee (p \wedge q)$ *(dağılma özelliği)*

$\Rightarrow \; p \wedge (p \vee q) \equiv p \vee (p \wedge q)$ *(tek kuvvet özelliği)*
elde edilir.

$p \vee (p \wedge q)$ önermesinde dağılma özelliği bir kere daha kullanılırsa yeniden $p \wedge (p \vee q)$ elde edilir.

Bir kısır döngüye girilmiş olur.

Başka bir yol düşünelim.

$p \equiv p \vee 0$ denkliğini kullanalım:

$p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee 0) \wedge (p \vee q)$

$\Rightarrow \; p \wedge (p \vee q) \equiv p \vee (0 \wedge q)$ *(dağılma özelliği)*

$\Rightarrow \; p \wedge (p \vee q) \equiv p \vee 0$

$\Rightarrow \; p \wedge (p \vee q) \equiv p$ bulunur.

b. $(p \wedge q) \vee q \equiv (p \wedge q) \vee (q \wedge 1)$ $(q \equiv q \wedge 1)$

$\Rightarrow \; (p \wedge q) \vee q \equiv (p \wedge q) \vee (1 \wedge q)$ *(değişme özelliği)*

$\Rightarrow \; (p \wedge q) \vee q \equiv (p \vee 1) \wedge q$ *(dağılma özelliği)*

$\Rightarrow \; (p \wedge q) \vee q \equiv 1 \wedge q$

$\Rightarrow \; (p \wedge q) \vee q \equiv q$ bulunur.

c. $s \equiv [(p' \wedge q) \vee p] \wedge q'$ diyelim.

$\Rightarrow \; s \equiv [(p' \vee p) \wedge (q \vee p)] \wedge q'$ *(dağılma özelliği)*

$\Rightarrow \; s \equiv [1 \wedge (q \vee p)] \wedge q'$

$\Rightarrow \; s \equiv (q \vee p) \wedge q'$

$\Rightarrow \; s \equiv (q \wedge q') \vee (p \wedge q')$ *(dağılma özelliği)*

$\Rightarrow \; s \equiv 0 \vee (p \wedge q')$

$\Rightarrow \; s \equiv p \wedge q'$ bulunur.

Örnek Problem – 4

$$\mathbf{s \equiv \left[p' \wedge (q' \wedge r)'\right]' \vee (p \vee q')'}$$

önermesini en sade biçimde yazınız.

Çözüm

$s \equiv \left[p' \wedge (q' \wedge r)'\right]' \vee (p \vee q')'$

$\Rightarrow \; s \equiv [p \vee (q' \wedge r)] \vee (p' \wedge q)$ *(De Morgan Teoremi)*

$\Rightarrow \; s \equiv p \vee (q' \wedge r) \vee (p' \wedge q)$ *(birleşme özelliği)*

$\Rightarrow \; s \equiv (q' \wedge r) \vee p \vee (p' \wedge q)$ *(değişme özelliği)*

$\Rightarrow \; s \equiv (q' \wedge r) \vee [(p \vee p') \wedge (p \vee q)]$ *(dağılma özelliği)*

$\Rightarrow \; s \equiv (q' \wedge r) \vee [1 \wedge (p \vee q)]$

$\Rightarrow \; s \equiv (q' \wedge r) \vee (p \vee q)$

$\Rightarrow \; s \equiv [(q' \wedge r) \vee q] \vee p$ *(birleş. ve değiş. özelliği)*

$\Rightarrow \; s \equiv [(q' \vee q) \wedge (r \vee q)] \vee p$ *(dağılma özelliği)*

$\Rightarrow \; s \equiv [1 \wedge (r \vee q)] \vee p$

$\Rightarrow s \equiv r \vee q \vee p$ elde edilir.

Örnek Problem – 5

Aşağıdaki önermelerin olumsuzlarını yazınız.

a. *“Bengü ve Umut sınava girdi.”*

b. *”Bengü ve Umut sınava girmedi.”*

c. *”Bengü veya Umut sınavda başarılı olur.”*

d. *”Bengü veya Umut sınavda başarısız olur.”*

e. *”Bengü ya da Umut ata binebilir.”*

f. *”Bengü ya da Umut ata binemez.”*

Çözüm

a. Türkçemizin kurallarına göre,
"***Bengü ve Umut sınava girdi***."
sözü,
"***Bengü sınava girdi ve Umut sınava girdi***"
anlamına gelir.

p: *"**Bengü sınava girdi**."* ve
q: *"**Umut sınava girdi**."* diye sembolleştirilirse,

$\text{"\textbf{\textit{Bengü ve Umut sınava girdi}}"} \equiv p \wedge q$ olur.

Bu önermenin olumsuzu,
sembollerle
$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$;
sözlerle,
$(p \wedge q)' \equiv$ *"Bengü sınava girmedi veya Umut sınava girmedi."*
$\equiv$ *"**Bengü veya Umut sınava girmedi**."*
olarak bulunur.

Aynı açıklamalar diğer maddelerde de geçerlidir.

b. *("Bengü ve Umut sınava girmedi.")'*
$\equiv$ *"**Bengü veya Umut sınava girdi**."*

c. *("Bengü veya Umut sınavda başarılı olur.")'*
$\equiv$ *"**Bengü ve Umut sınavda başarısız olur**."*

d. *("Bengü veya Umut sınavda başarısız olur")'*
$\equiv$ *"**Bengü ve Umut sınavda başarılı olur**."*

e. *("Bengü ya da Umut ata binebilir.")'*
$\equiv$ *"Bengü ata binebilir ya da Umut ata binemez."*
$\equiv$ *"Bengü ata binemez ya da Umut ata binebilir."*

f. *("Bengü ya da Umut ata binemez.")'*
$\equiv$ *"Bengü ata binebilir ya da Umut ata binemez."*
$\equiv$ *"Bengü ata binemez ya da Umut ata binebilir."*

Etkinlik – 26

"$(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{q}' \vee \mathbf{r})$" doğru bir önerme olduğuna göre,
"$\mathbf{p} \vee \mathbf{r}$" önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

Etkinlik – 27

"$(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vee \mathbf{q}'$" doğru bir önerme olduğuna göre,
"$\mathbf{p}' \wedge \mathbf{q}$" önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

Koşullu Önermeler

Etkinlik – 28

A okulu ile B okulu futbol maçı yapacaklardır.

A takımındaki Volkan'ın, sakatlığı nedeniyle maç kadrosuna girmesi şüphelidir.

A okulundan Sezen arkadaşlarına,
*"**Volkan oynarsa, maçı kazanırız**."* diyor.

Bu önermenin,
*"Volkan oynayacak **ise** maçı kazanacağız."*
anlamına geldiğine dikkat ediniz.

a. Sezen'in sözü, *"Maçı kazanmamızın tek yolu Volkan'ın oynamasıdır."* anlamına mı gelir?

b. Maç oynanıp bittiğinde; Volkan oynamış ve maçı A takımı kazanmış ise Sezen'in sözü doğrulanmış olur mu?

c. Volkan oynamış ve maçı A takımı kazanamamış ise Sezen'in sözü yanlış mı olur?

d. Volkan oynamamış ve maçı A takımı kazanmış ise Sezen'in sözü yanlış mı olur?

e. Volkan oynamamış ve maçı A takımı kazanamamış ise Sezen'in sözü doğru mu olur?

f. *"Volkan oynar**sa** A takımı maçı kazanır."* önermesini; *"Volkan oynayacak"* bileşenini **p** ile, *"A takımı maçı kazanacak."* bileşenini **q** ile, **ise** bağlacını "$\Rightarrow$" sembolü ile göstererek $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$ biçiminde sembolleştirebiliriz.

Yanıtlarınıza göre; elde edeceğiniz doğruluk değerlerini yandaki tabloya yerleştiriniz.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Tanım – 7

*p ve q gibi iki önermenin, **koşul bağlacı** adı verilen **ise** sözcüğü ile birleştirilmesiyle elde edilen bileşik önermeye **koşullu önerme** denir.*

► "**p ise q**" önermesi "$\mathbf{p \Rightarrow q}$" biçiminde gösterilir. $\mathbf{p \Rightarrow q}$ önermesinde:

p bileşenine **hipotez**;
q bileşenine **hüküm** adı verilir.

Hipotez hükmün **yeterli koşul**u;
hüküm hipotezin **gerekli koşul**udur.

Buna göre, $\mathbf{p \Rightarrow q}$ önermesi,

*"**q için p yeterlidir.**"* ya da
*"**p için q gereklidir.**"*

biçimlerinde de ifade edilebilir.

Örneğin,

*"**Erol'un çalışması** sınıfını geçmesi için **yeterlidir.**"* önermesi ile

*"Erol çalışırsa **sınıfını geçmesi gereklidir.**"*

önermesi aynı anlamı taşır.

"Erol çalışırsa sınıfını geçer." önermesi, Erol'un sınıfını geçmesi için tek yolun **çalışması** olduğunu bildirmez. "Erol çalışmaz **ama başka yollarla da** sınıfını geçebilir." anlamını saklı tutar.

Mantıkta, $p \Rightarrow q$ önermesinin aşağıda verilen doğruluk değerleri aksiyom olarak alınmıştır.

Aksiyom – 4

"**p**" ve "**q**" birer önerme, "$\Rightarrow$" önerme bağlacı olduğuna göre; $\mathbf{p \Rightarrow q}$ önermesinin doğruluk değerleri tabloda görüldüğü gibidir.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tabloda görüldüğü gibi; $p \Rightarrow q$ önermesi p'nin doğru ve q'nun yanlış olması durumunda yanlış; diğer durumlarda doğrudur.

Etkinlik – 29

Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu nasıl açıklarsınız?

a. ***Paris Amerika'da ise Ankara Türkiye'dedir.***

b. ***Aristo Türk ise ben otobüsüm.***

Etkinlik – 30

p : Erol çalışacak.
q : Erol sınıfını geçecek.

önermeleri veriliyor.

Buna göre, aşağıdaki önermeleri sembolleştiriniz.

a. ***Erol çalışırsa sınıfını geçer.***
b. ***Erol çalışmaz veya sınıfını geçer.***
c. ***Erol çalışmazsa sınıfını geçemez.***
d. ***Erol sınıfını geçecekse çalışacaktır.***
e. ***Erol sınıfını geçmeyecekse çalışmayacaktır.***
f. ***Erol çalışacak ve sınıfını geçemeyecektir.***

Etkinlik – 31

p : Sulama yapılacak.
q : Ürün bol olacak.

önermeleri veriliyor.

Buna göre, aşağıdaki önermeleri sözle ifade ediniz.

a. $p \Rightarrow q$ **b.** $q \Rightarrow p$ **c.** $p' \Rightarrow q'$
d. $q' \Rightarrow p'$ **e.** $p' \vee q$ **f.** $p \wedge q'$

"$\Rightarrow$" işleminin özelikleri

Teorem – 7

$\mathbf{p}$ ile $\mathbf{q}$ birer önerme olduğuna göre,

$$\mathbf{p \Rightarrow q \equiv p' \vee q}$$

denkliği geçerlidir.

$\mathbf{p \Rightarrow q}$ önermesinin $\mathbf{p' \vee q}$ biçiminde gösterilmesine, $\mathbf{p \Rightarrow q}$ **önermesinin indirgenmesi** denir.

Örneğin ;

*"**Hastalanırsam doktora giderim**."* önermesi, *"**Hastalanmam veya doktora giderim**."* önermesi ile aynı anlamı taşır.

Etkinlik – 32

Doğruluk tablosu kullanarak,

$\mathbf{p \Rightarrow q \equiv p' \vee q}$

olduğunu gösteriniz.

Koşullu önermenin karşıtı, tersi, karşıt tersi

Tanım – 8

I. $\mathbf{q \Rightarrow p}$ *önermesine* $\mathbf{p \Rightarrow q}$ *'nun **karşıtı**;*

II. $\mathbf{p' \Rightarrow q'}$ *önermesine* $\mathbf{p \Rightarrow q}$ *'nun **tersi**;*

III. $\mathbf{q' \Rightarrow p'}$ *önermesine* $\mathbf{p \Rightarrow q}$ *'nun **karşıt tersi** denir.*

Örneğin,

*"**Yağmur yağmış ise çamaşırlar ıslanmıştır**."*

önermesinin **karşıtı**,

*"**Çamaşırlar ıslanmışsa yağmur yağmıştır**.";*

tersi,

*"**Yağmur yağmamış ise çamaşırlar ıslanmamıştır**.";*

karşıt tersi,

*"**Çamaşırlar ıslanmamışsa yağmur yağmamıştır**."*

önermeleridir.

Teorem – 8

p *ile* **q** *birer önerme olduğuna göre,*

$\mathbf{p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'}$

denkliği geçerlidir.

Etkinlik – 33

$\mathbf{p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'}$ denkliğinin doğruluğunu, hem işlem özelliklerinden hem de doğruluk tablosundan yararlanarak gösteriniz.

Etkinlik – 34

Hem doğruluk tablosundan hem de işlem özelliklerinden yararlanarak, aşağıdaki denkliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a. $p \Rightarrow p \equiv 1$ **b.** $p \Rightarrow p' \equiv p'$ **c.** $p \Rightarrow 1 \equiv 1$

d. $p \Rightarrow 0 \equiv p'$ **e.** $1 \Rightarrow p \equiv p$ **f.** $0 \Rightarrow p \equiv 1$

Koşullu önermenin olumsuzu

$\mathbf{p \Rightarrow q}$ önermesinin olumsuzu,

$\mathbf{p \Rightarrow q \equiv p' \vee q}$ *(**Teorem–7**)*

denkliğinden yararlanılarak bulunabilir:

$\mathbf{p \Rightarrow q \equiv p' \vee q}$

$\Rightarrow (p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)'$

$\Rightarrow \mathbf{(p \Rightarrow q)' \equiv p \wedge q'}$ elde edilir.

Örneğin;

*"**Para kazanırsam tatile giderim**."*

önermesinin olumsuzu

*"**Para kazanırım ve tatile gitmem**."* olur.

"⇒" işleminin dağılma özelliği

"⇒" işleminin "∧" ve "∨" işlemleri üzerine soldan dağılma özeliği vardır.

Teorem – 9

p, **q** *ve* **r** *birer önerme olduğuna göre, aşağıdaki denklikler geçerlidir.*

a. $\mathbf{p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)}$

b. $\mathbf{p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)}$

Etkinlik – 35

Teorem–9'u oluşturan önermelerin doğru olduğunu, hem işlem özelliklerinden hem de doğruluk tablosundan yararlanarak gösteriniz.

Örnek Problem – 6

$\mathbf{p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge q') \Rightarrow r}$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$\mathbf{p} \Rightarrow (\mathbf{q} \vee \mathbf{r}) \equiv p' \vee (q \vee r)$

$\equiv (p \wedge q')' \vee r \equiv (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}') \Rightarrow \mathbf{r}$

Örnek Problem – 7

$\mathbf{(p' \wedge q) \Rightarrow (r \Rightarrow q') \equiv 0}$ olduğuna göre,

$\mathbf{s \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge r]' \Rightarrow [(p \wedge q) \vee r]}$

önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

Çözüm

$(p' \wedge q) \Rightarrow (r \Rightarrow q') \equiv 0$ ise

$p' \wedge q \equiv 1$ ve $r \Rightarrow q' \equiv 0$ olmalıdır.

Buna göre; $p \equiv 0$, $q \equiv 1$, $r \equiv 1$ olur.

Bu değerler s'de yerlerine konulursa,

$s \equiv "[(0 \Rightarrow 1) \wedge 1]' \Rightarrow [(0 \wedge 1) \vee 1]"$

$\Rightarrow \; s \equiv "(1 \wedge 1)' \Rightarrow (0 \vee 1)"$

$\Rightarrow \; s \equiv "1' \Rightarrow 1" \quad \Rightarrow \quad s \equiv "0 \Rightarrow 1"$

$\Rightarrow \; s \equiv 1$ bulunur.

Örnek Problem – 8

$\mathbf{[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow (s \Rightarrow p) \equiv 0}$ olduğuna göre,

$\mathbf{t \equiv [(r \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \vee (q \wedge r)}$

önermesini en sade biçimde yazınız.

Çözüm

$[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow (s \Rightarrow p) \equiv 0$ ise

$p \Rightarrow (q \vee r) \equiv 1$ ve $s \Rightarrow p \equiv 0$ olmalıdır.

Bu son denklikler $p \equiv 0$ olmasını gerektirir.

t önermesinde $p \equiv 0$ değeri yerine konulursa,

$t \equiv [(r \Rightarrow 0) \Rightarrow (q \Rightarrow 0)] \vee (q \wedge r)$

$\Rightarrow \; t \equiv (r' \Rightarrow q') \vee (q \wedge r)$

$\Rightarrow \; t \equiv r \vee q' \vee (q \wedge r)$ *($\Rightarrow$'nin indirgenmesi)*

$\Rightarrow t \equiv r \vee [(q' \vee q) \wedge (q' \vee r)]$ *(dağılma özeliği)*

$\Rightarrow t \equiv r \vee [1 \wedge (q' \vee r)]$

$\Rightarrow t \equiv r \vee q' \vee r$

$\Rightarrow \mathbf{t \equiv q' \vee r}$ *(değişme ve tek kuvvet özeliği)*

elde edilir.

Örnek Problem – 9

$\mathbf{s \equiv [(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \vee (p \Rightarrow r)}$

önermesini en sade biçimde yazınız.

Çözüm

$s \equiv [(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \vee (p \Rightarrow r)$

$\Rightarrow \; s \equiv [(p' \vee q) \Rightarrow r] \vee (p' \vee r)$ *($\Rightarrow$'nin indirgenmesi)*

$\Rightarrow \; s \equiv (p' \vee q)' \vee r \vee p' \vee r$ *($\Rightarrow$'nin indirgenmesi)*

$\Rightarrow \; s \equiv (p \wedge q') \vee p' \vee r$ *(De Mor.,değiş.,tek k.)*

$\Rightarrow \; s \equiv [(p \vee p') \wedge (q' \vee p')] \vee r$ *(dağılma özeliği)*

$\Rightarrow \; s \equiv [1 \wedge (p' \vee q')] \vee r$

$\Rightarrow \; \mathbf{s \equiv p' \vee q' \vee r}$ elde edilir.

Örnek Problem – 10

A: ***"Ali'nin çalışırsa sınıfını geçeceği doğru ve Ali'nin çalıştığı doğru ise Ali sınıfını geçmiştir."***

önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

Çözüm

p: "Ali çalıştı."
q: "Ali sınıfını geçti."
sembolleştirmesi yapılırsa;

$A \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ olduğu görülür.

$p \Rightarrow q \equiv 1$ ve $p \equiv 1$ olduğu verilmiştir.

$1 \Rightarrow q \equiv q$ ve $q \wedge 1 \equiv q$ olur.

$A \equiv (q \Rightarrow q) \equiv 1$ bulunur.

Ali sınıfını geçmiştir.

Etkinlik – 36

$(p \vee q') \Rightarrow (q \vee r) \equiv 0$ olduğuna göre,

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \vee r) \Rightarrow p']$

önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

Etkinlik – 37

$[(p \vee q) \wedge p'] \Rightarrow q'$

önermesini en sade biçimde yazınız.

İki yönlü koşullu önermeler

Etkinlik – 38

p: Ali sınıfını geçecek.
q: Babası Ali'ye bisiklet alacak.

önermeleri verilmiş olsun.

a. $p \Rightarrow q$ önermesini sözle ifade ediniz.

b. $q \Rightarrow p$ önermesini sözle ifade ediniz.

c. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesi verilmiş olsun.

Bu önermede,
*"**p** bileşeni **q** bileşeninin hem **yeterli koşulu** hem **gerekli koşulu**"* mudur?
Aynı zamanda,
*"**q** bileşeni **p** bileşeninin hem **yeterli koşulu** hem **gerekli koşulu**"* mudur?

d. *"**p** bileşeni **q** bileşeninin hem yeterli hem gerekli koşuludur."* demekle *"**q** bileşeni **p** bileşeninin hem yeterli hem gerekli koşuludur."* demiş olur musunuz?

e. **c** ve **d** etkinliklerindeki çıkarımlarınıza dayanarak $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesini
"p'nin yeterli ve gerekli koşulu q'dur." veya
"p için gerekli ve yeterli koşul q'dur."
biçiminde yazabilir misiniz?

f. Aşağıdaki tabloyu tamamlayarak $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesinin doğruluk değerlerini, p ile q'nun doğruluk değerlerine göre bulunuz.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Tanım – 9

*Bir koşullu önerme ile bunun karşıtının kesişimine **iki yönlü koşullu önerme** denir.*

Tanım-9'u sembollerle ifade edelim:
"$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesine **iki yönlü koşullu önerme** denir."

Etkinlik–38'de sizin de keşfettiğiniz gibi;

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesinde p bileşeni q bileşeninin hem yeterli hem gerekli koşulu durumundadır.

Buna göre; $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesi,

"p için gerekli ve yeterli koşul q'dur."
biçiminde yazılabilir.

Buradaki

I. "... için gerekli ve yeterli koşul ... dır."

bağlacı yerine, aynı anlama gelmek üzere

II. "... ancak ve ancak ... ise."

bağlacı da kullanılır.

Mantıkta, "**I**" ve "**II**" bağlaçları "$\Leftrightarrow$" sembolü ile gösterilirler.

O hâlde; $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesini kısaca $p \Leftrightarrow q$ biçiminde gösterebiliriz. $p \Leftrightarrow q$ önermesi "**p ancak ve ancak q ise**" diye okunur.

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$ diyebiliriz.

"$\Leftrightarrow$" bağlacının tanımına göre $p \Leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Buradaki doğruluk değerlerini **Etkinlik–38**'de $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesinin doğruluk değerleri olarak bulmuştunuz.

İki yönlü koşullu önermenin olumsuzu

Teorem – 10

p *ile* **q** *birer önerme ve "$\Leftrightarrow$" önerme bağlacı ise,*

$(\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q})' \equiv (\mathbf{p}' \Leftrightarrow \mathbf{q}) \equiv (\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q}')$

denkliği geçerlidir.

Etkinlik – 39

Teorem–10 olarak verilen denkliklerin doğruluğunu, hem işlem özelliklerinden hem de doğruluk tablosundan yararlanarak gösteriniz.

Totoloji ve çelişme

Tanım – 10

Bileşenlerinin bütün doğruluk değerleri için doğru olan bileşik önermeye ***totoloji*** *veya* ***geçerli önerme****;*

Bileşenlerinin bütün doğruluk değerleri için yanlış olan bileşik önermeye ***çelişme*** *veya* ***tutarsız önerme****;*

Doğruluk değerlerinden en az biri yanlış olan bileşik önermeye ***geçersiz önerme****;*

Doğruluk değerlerinden en az biri doğru olan bileşik önermeye ***tutarlı önerme*** *denir.*

Tanım–10'a göre; verilen bir önermenin **totoloji** ya da **çelişme** olup olmadığının, bu önermenin doğruluk tablosundan anlaşılacağı açıktır. Bunun yanında; verilen önerme sadeleştirilerek bunun "1" ya da "0" a denk olup olmadığı da araştırılabilir.

$p \Rightarrow q$ biçimindeki önermelerin totoloji olup olmadığını anlamak için $q \equiv 0$ durumu incelenir. $q \equiv 0$ iken $p \equiv 1$ olabiliyorsa, önermenin totoloji olmadığı ortaya çıkar.

Örnek Problem – 11

$(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \Rightarrow (\mathbf{p} \vee \mathbf{r})$

önermesinin bir totoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm

1. yol : Önermeyi sadeleştirerek gösterelim:

$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r) \equiv (p \wedge q)' \vee (p \vee r)$

$\Rightarrow \ (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r) \equiv p' \vee q' \vee p \vee r$

$\Rightarrow \ (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r) \equiv \underbrace{p' \vee p}_{1} \vee q' \vee r$

$\Rightarrow \ (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r) \equiv 1$

olduğundan önerme totolojidir.

2. yol

$(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \Rightarrow (\mathbf{p} \vee \mathbf{r})$ önermesi, yalnız $p \vee r \equiv 0$ iken $p \wedge q \equiv 1$ ise yanlıştır. $(1 \Rightarrow 0 \equiv 0)$

$p \vee r \equiv 0$ iken $p \equiv 0$ ve $r \equiv 0$ olup,

$p \wedge q \equiv 0 \wedge q \equiv 0$ olur.

O hâlde, verilen önermenin yanlış olduğu hiç bir durum yoktur.

$(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \Rightarrow (\mathbf{p} \vee \mathbf{r})$ önermesi bir totolojidir.

3. yol

$(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \Rightarrow (\mathbf{p} \vee \mathbf{r}) \equiv 1$ olduğunu doğruluk tablosu ile gösterelim:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \vee r$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$
1	1	1	1		1
1	1	0		1	1
1	0	1	0		1
1	0	0			1
0	1	1		1	1
0	1	0		0	1
0	0	1	0		1
0	0	0			1

Boş bıraktığımız yerleri siz doldurunuz.

Etkinlik – 40

$[(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \Rightarrow \mathbf{r}] \Rightarrow (\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{r})$

önermesinin totoloji (geçerli önerme) olduğunu gösteriniz.

Etkinlik – 41

Aşağıdaki önermelerden hangileri geçerli (totoloji), hangileri geçersiz ama tutarlı, hangileri tutarsız (çelişme)dır?

a. $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$

b. $(p \vee q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$

c. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q')$

d. $(p \Rightarrow q) \vee p$

e. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$

f. $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Etkinlik – 42

$p \veebar q \equiv p' \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow q'$

denkliklerinin doğru olduğunu gösteriniz.

Etkinlik – 43

Aşağıdaki denkliklerin doğru olduklarını gösteriniz.

a. $p \vee (p \veebar q) \equiv p \vee q$

b. $p \veebar (p \vee q) \equiv p' \wedge q$

c. $p \Rightarrow (p \veebar q) \equiv (p \Rightarrow q')$

d. $(p \wedge q) \veebar (p \vee q) \equiv p \veebar q$

e. $(p \veebar q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \equiv (p \vee q)'$

f. $(p \veebar q) \Rightarrow (p \vee q) \equiv 1$

g. $[(p \wedge q) \vee (p \veebar q)] \Rightarrow (p \vee q) \equiv 1$

h. $[(p \vee q) \wedge (p \veebar q)] \Rightarrow (p \veebar q) \equiv 1$

Etkinlik – 44

A: "***Bilge'nin dürüst ise kazanacağı doğru ve Bilge'nin kazandığı doğru ise Bilge dürüsttür.***" önermesini,

p: Bilge dürüsttür.

q: Bilge kazanır.

biçiminde sembolleştirerek, bu önermenin **tutarlı** ancak **geçersiz** olduğunu gösteriniz.

Sembolik önermelerin sözel yorumlamaları

$p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$, ... gibi bileşik önermelerde **p** ve **q** sembolik önermelerinin yerlerine doğruluk değerleri belli olan önermelerin konulmasıyla elde edilen önermeler, bu önermelerin birer **yorumlama**sı diye adlandırılır.

Bir sembolik önerme sözel önermelerle yorumlanırken, sembollerin yerine sözleri oturtmak yetmez. Hem anlamın açıklığını hem de sözün kullanılan dile uygunluğunu sağlamak için, önermenin anlamını bozmayacak düzeltmeler yapılmalıdır.

Örneğin;

p: *"**Miray sınıfını geçti.**"*;

q: *"**Miray çalıştı.**"*

önermeleri verilmiş olsun.

$p \Rightarrow q$ önermesi,

"Miray sınıfını geçti ise Miray çalıştı."

biçiminde yazılırsa, mantıkça anlamlı olan ancak; konuşma dilinde anlamı bir bakışta anlaşılmayan, dili bozuk bir tümce ortaya çıkar.

Bu önerme,

"Miray sınıfını geçtiyse çalışmıştır."

biçiminde yazılırsa, hem anlam daha doğru biçimde aktarılmış hem de düzgün bir tümce kurulmuş olur.

Aynı şekilde,

$q \Rightarrow p$ önermesinin

"Miray çalıştı ise Miray sınıfını geçti."

biçiminde değil

"Miray çalıştıysa sınıfını geçmiştir."

biçiminde yazılması, dilimize daha uygundur.

$p \Leftrightarrow q$ önermesi de

"Miray ancak ve ancak çalıştıysa sınıfını geçmiştir."

biçiminde veya

"Miray'ın sınıfını geçmiş olması için gerekli ve yeterli koşul çalışmış olmasıdır."

biçiminde yazılabilir.

Etkinlik – 45

Aşağıda verilen **p** ve **q** önermelerinden elde edilen $\mathbf{p \Rightarrow q}$, $\mathbf{q \Rightarrow p}$ ve $\mathbf{p \Leftrightarrow q}$ önermelerini sözlerle ifade ediniz.

a. ***p : Hava çok soğuktur.***
q : Yollar buzlandı.

b. ***p : Doğru besleniyorum.***
q : Sağlıklıyım.

c. ***p : Matematiği iyi öğreneceksin.***
q : İleri sınıflarda başarılı olacaksın.

d. ***p : Öğretmen öğrencilerini ödüllendirir.***
q : Öğrenciler çalışkandır.

Etkinlik – 46

Aşağıda verilen bileşik önermelerdeki, "**basit önermeler**"i ve "**önerme bağlaçları**"nı belirleyiniz. Bileşik önermeleri sembolleştiriniz.

a. ***Havalar soğursa plajlar boşalır.***

b. ***Spor yapar ve iyi beslenirsen uzun yaşarsın.***

c. ***Zeki ancak ve ancak yaz okuluna kalmazsa yazın tatile gidecek.***

d. ***Hava kirliliğinin önlenmesi için gerekli ve yeterli koşul doğalgaz kullanılmasıdır.***

e. ***Can çalışırsa sınıfını geçer ve sınıfını geçerse babası ona bisiklet alır.***

f. ***Erdem otobüs veya dolmuş bulamazsa taksiye biner.***

"Ancak ... ise" bağlacı

"*p **ancak ve ancak** q **ise***." denilmesi gereken yerde, neden "*p **ancak** q **ise***." denemez?

Bunu merak etmişsinizdir.
Bu durumda "***ancak ... ise***" bağlacını tanıtmamız gerekir.

"**Ancak**" sözcüğü, önüne konulduğu bileşenin **gerekli koşul** olduğunu; "**ancak ve ancak**" deyimi ise **hem yeterli hem de gerekli koşul** olduğunu belirtir.

"*p **ise** q*" önermesinde, q **gerekli koşul** olarak tanıtılmıştı. Buna göre, "*p **ise** q*" önermesi ile "*p **ancak** q **ise***" önermesi tam olarak aynı anlamdadır.

"***Ancak*** *p **ise** q*" önermesinde ise gerekli koşulun p olduğu belirtilmiştir. O zaman, bu önerme "*q **ise** p*" anlamına gelir.

O hâlde; şu denklikleri yazabiliriz:

"*p **ancak** q **ise***" $\equiv$ "*p **ise** q*"

"***Ancak*** *p **ise** q*" $\equiv$ "*q **ise** p*"

"***ise***", "***ancak ... ise***", "***ancak ve ancak ... ise***" bağlaçlarının önermeye nasıl farklı anlamlar kattığını bir örnek üzerinde açıklayalım:

Örnek Problem – 12

p: Ali çalışacaktır."

***q:* "Ali sınıfını geçecektir."**

önermeleri veriliyor.

Buna göre; aşağıdaki önermeleri sözlerle ifade edip anlamlarını irdeleyiniz.

a. $p \Rightarrow q$ **b.** $q \Rightarrow p$ **c.** $p' \Rightarrow q'$

d. $q' \Rightarrow p'$ **e.** $p \Leftrightarrow q$ **f.** $p' \Rightarrow q'$

Çözüm

a. **p** ile **q** önermelerini yerlerine koyalım:

$p \Rightarrow q$ **:** "***Ali çalışacaktır ise Ali sınıfını geçecektir.***"

Bu söz, iki önermenin "***ise***" bağlacı ile bağlanması sonucu elde edilen önermenin mantıksal biçimidir.

Bunu, Türkçe'mizle de tam uyumlu biçimde, şöyle verebiliriz:

I. "***Ali çalışırsa sınıfını geçer.***"

$p \Rightarrow q$ önermesinin değişik sözel karşılıklarını da verelim:

II. "$p \Rightarrow q$" $\equiv$ "***p, q için yeterli koşuldur.***"

Bunun dilimizdeki karşılığı, "***Ali'nin çalışması, sınıfını geçmesi için yeterlidir.***" sözüdür.

III. "$p \Rightarrow q$" $\equiv$ "***q, p için gerekli koşuldur.***"

Bunun dilimizdeki karşılığı, "***Ali'nin çalışması, sınıfını geçmesini gerektirir.***" sözüdür.

IV. “ *p* $\Rightarrow$ *q* ” $\equiv$ “***Ancak q ise p.***”

Burada, sözleri tam olarak yerlerine koyalım:

“***Ancak Ali sınıfını geçmişse çalışmıştır.***”

b. I. “***Ali sınıfını geçmişse çalışmıştır.***”

II. “ *q* $\Rightarrow$ *p* ” $\equiv$ “***q, p için yeterli koşuldur.***”

Bunun dilimizdeki karşılığı, “***Alinin sınıfını geçmiş olması, çalışmış olması için yeterlidir.***” sözüdür.

III. “ *q* $\Rightarrow$ *p* ” $\equiv$ “***p, q için gerekli koşuldur.***”

Bunun dilimizdeki karşılığı, “**Alinin sınıfını geçmiş olması, çalışmış olmasını gerektirir.**” sözüdür.

IV. “ *q* $\Rightarrow$ *p* ” $\equiv$ “***Ancak p ise q***”

Sözleri tam olarak yerlerine koyalım:

“***Ancak Ali çalışmışsa sınıfını geçmiştir.***”

c. “***Ali çalışmazsa sınıfını geçemez.***”

Diğer sözel karşılıkları siz yazınız.

d. “***Ali sınıfını geçememişse çalışmamıştır.***”

Diğer sözel karşılıkları siz yazınız.

e. “***Ali’nin sınıfını geçebilmesi için gerekli ve yeterli koşul çalışmasıdır.***”
veya
“***Ali, ancak ve ancak çalışırsa sınıfını geçebilir.***”

“*Ali, ancak ve ancak çalışırsa sınıfını geçebilir.*” demek,

“*Ali çalışırsa sınıfını geçmemesi mümkün değildir; Sınıfını geçmişse çalışmamış olması mümkün değildir.*” demektir.

f. “***Ali’nin sınıfını geçememesi için gerekli ve yeterli koşul çalışmamasıdır.***”
veya
“***Ali, ancak ve ancak çalışmazsa sınıfını geçemez.***”

“*Ali, ancak ve ancak çalışmazsa sınıfını geçemez.*” demek,

“*Ali çalışmazsa sınıfını geçmesi mümkün değildir; Sınıfını geçmemişse çalışmış olması mümkün değildir.*” demektir.

Etkinlik – 47

Her dilde, mantıkta kullanılan “***değil***”, “***ve***”, “***veya***”, “***ya da***”, “***ise***”, “***ancak ve ancak ... ise***” gibi önerme bağlaçları ile eş anlamlı çok sayıda başka önerme bağlaçları kullanılır.

Aşağıdaki önermelerde böyle önerme bağlaçları kullanılmıştır.

Bu önermelerde kullanılan bağlaçların, mantıkta öğrendiğiniz hangi bağlaçlara karşılık getirilebileceğini belirterek, önermeleri sembolleştiriniz.

a. *Kalemim **yok**.*

b. *Nazlı okula gel**me**di.*

c. *Metin **ne** aradı **ne** sordu.*

d. *Selim **hem** dersaneye gitti **hem** özel ders aldı **ise de** bir okula giremedi.*

e. *Ali **de** Can **da** banyo yapacak.*

f. *Arayan **ya** Simge’dir **ya** Haluk.*

g. *Derslerine çalış**madan** sınıfını geçe**mezsin**.*

h. *Her istediğin yere gideriz, **yeter ki** sen gel.*

i. *Sınıfını geçmen için derslerine çalışman **şart**.*

j. *Maçı kazanmamızın **tek koşulu** Volkan’ın oynamasıdır.*

Gerektirme

Tanım – 11

***p, q, r**, ... önermelerinden oluşan **P** ve **Q** bileşik önermeleri verilmiş olsun.*

***p, q, r**, ... önermelerinin **P** bileşik önermesini doğru kılan tüm doğruluk değerleri için **Q** bileşik önermesi de doğru oluyorsa; “**P önermesi Q önermesini gerektirir**” denir.*

Bu tanıma göre; **P** önermesinin **Q** önermesini gerektirmesi için gerekli ve yeterli koşul $\mathbf{P \Rightarrow Q}$ önermesinin bir **totoloji** olmasıdır.

Tanım – 12

***P** ile **Q** birer önerme olmak üzere, $\mathbf{P \Leftrightarrow Q}$ önermesi bir totoloji ise; “**P önermesi Q önermesini çift gerektirir**” denir.*

$\mathbf{P \Leftrightarrow Q}$ önermesinin doğruluk değerleri dikkate alınırsa; **P** önermesinin **Q** önermesini çift gerektirmesi için gerekli ve yeterli koşul $\mathbf{P \equiv Q}$ olmasıdır.

Etkinlik – 48

Aşağıda verilen P önermelerinin, yanlarında verilen Q önermelerini gerektirdiğini gösteriniz.

a. $\mathbf{P \equiv (p \vee q) \wedge p'}$; $\mathbf{Q \equiv q}$

b. $\mathbf{P \equiv (p \Rightarrow q) \wedge p}$; $\mathbf{Q \equiv q}$

c. $\mathbf{P \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)}$; $\mathbf{Q \equiv (p \vee q) \Rightarrow r}$

d. $\mathbf{P \equiv (p \Leftrightarrow q) \wedge q}$; $\mathbf{Q \equiv p \wedge q}$

e. $\mathbf{P \equiv (p \wedge q) \vee (p \veebar q)}$; $\mathbf{Q \equiv p \vee q}$

f. $\mathbf{P \equiv (p \vee q) \wedge (p \veebar q)}$; $\mathbf{Q \equiv p \veebar q}$

Etkinlik – 49

Aşağıda verilen önerme çiftlerinden birinin diğerini çift gerektirdiğini gösteriniz.

a. $\mathbf{P \equiv p \Rightarrow (p \wedge q)}$; $\mathbf{Q \equiv p \Rightarrow q}$

b. $\mathbf{P \equiv (p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge r)}$; $\mathbf{Q \equiv (p \Rightarrow q') \vee r}$

c. $\mathbf{P \equiv (p \vee q) \wedge (p \veebar q)}$; $\mathbf{Q \equiv p \veebar q}$

d. $\mathbf{P \equiv (p \vee q) \veebar (p \wedge q)}$; $\mathbf{Q \equiv p \veebar q}$

Çıkarımlar ve geçerliliklerinin denetlenmesi

Eldeki yargılardan, bir **sonuç** çıkarılmasına **çıkarım** denir.

Veri durumundaki önermelerden oluşan eldeki yargılara çıkarımın **öncül**leri adı verilir.

Bir çıkarımda sonuç "***o hâlde***", "***demek ki***", "***buna göre***", … gibi sözcüklerle öncüllere bağlanır.

Örneğin;

A: $p \wedge q \Rightarrow r$

B: $p \vee q$

O hâlde,

C: $p \Rightarrow r$

biçimindeki bir **akıl yürütme** (usa vurma) bir **sembolik çıkarım**dır.

Bu çıkarımda, **A** ve **B** önermeleri **öncül**ler, **C** önermesi **sonuç**tur.

Bu öncüllerden bu sonuca varılması doğru mudur?

Bu sorunun yanıtının araştırılmasına ***çıkarımın geçerliliğinin denetlenmesi*** denir. Mantıkta bunun çeşitli yolları vardır. Biz burada bir yoldan gideceğiz; Çıkarımların geçerliliğini ***gerektirme*** kavramından yararlanarak denetleyeceğiz;
Öncüllerin kesişimi sonucu gerektiriyorsa ***çıkarım geçerlidir***, diyeceğiz.

Örneğimizde öncüllerin kesişimi $A \wedge B$ 'dir.
$A \wedge B$ 'nin C'yi gerektirip gerektirmediğini araştıracağız.

$$A \wedge B \Rightarrow C \equiv \underbrace{(p \wedge q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q)}_{?} \Rightarrow \underbrace{(p \Rightarrow r)}_{0} \text{ 'dir.}$$

$p \Rightarrow r \equiv 0$ iken $p \equiv 1$ ve $r \equiv 0$ 'dır.

Bu durumda,

$$A \wedge B \equiv (1 \wedge q \Rightarrow 0) \wedge (1 \vee q)$$

$\Rightarrow$ $A \wedge B \equiv q'$ olur.

$q' \equiv 1$ ve $p \Rightarrow r \equiv 0$ iken $A \wedge B \Rightarrow C$ önermesi yanlış olacağından, bu önerme bir totoloji değildir.

$\mathbf{A \wedge B}$, **C'yi gerektirmez.** O hâlde; A ve B öncüllerinden C sonucunu çıkarmak doğru değildir.
Çıkarım geçersizdir.

Başka bir örnek verelim:

A: "Yağmur yağdıysa yerler ıslanmıştır."

B: "Yağmur yağmadı."

O hâlde,

C: "Yerler ıslak değildir."

biçimindeki bir akıl yürütme **yorumlanmış** bir **çıkarım**dır.

► **Yorumlanmış bir çıkarımın geçerli olması için, bir sembolik karşılığının geçerli olması gerekir.**

A, ***B*** ve ***C*** önermelerini sembolleştirelim:

p: "Yağmur yağdı." ve

q: "Yerler ıslandı." diyelim.

A: $\mathbf{p \Rightarrow q}$, ***B:*** $\mathbf{p'}$ ve ***C:*** $\mathbf{q'}$ olur.

$\mathbf{A \wedge B}$ önermesi **C** önermesini gerektiriyorsa, yani; $A \wedge B \Rightarrow C$ önermesi totoloji ise çıkarım geçerlidir; totoloji değilse geçerli değildir.

$$A \wedge B \Rightarrow C \equiv \underbrace{(p \Rightarrow q) \wedge p'}_{?} \Rightarrow \underbrace{q'}_{0}$$

$q' \equiv 0$ iken $(p \Rightarrow q) \wedge p' \equiv (p \Rightarrow 1) \wedge p' \equiv p'$ olur.

$p' \equiv 1$ iken $A \wedge B \Rightarrow C$ önermesi yanlış olduğundan $\mathbf{A \wedge B \Rightarrow C}$ bir totoloji değildir.

Çıkarım geçersizdir.

Örnek Problem – 13

A: "Kar beyazdır ve kömür siyahtır."
O hâlde;
B: "Kan kırmızıdır."

çıkarımının geçerliliğini denetleyiniz.

Çözüm

p: ***"Kar beyazdır."***
q: ***"Kömür siyahtır."***
r: ***"Kan kırmızıdır."*** diyelim.

$A \Rightarrow B \equiv p \wedge q \Rightarrow r$ olup bunun bir totoloji olmadığı açıktır. Öyleyse; A, B'yi gerektirmez.

► Dikkat ediniz!

"Kar beyaz ve kömür siyah ise kan kırmızıdır."

önermesi doğru olduğu hâlde, bir gerektirme değildir. $[(1 \wedge 1) \Rightarrow 1 \equiv 1]$

Çünkü; $p \wedge q \Rightarrow r$ totoloji değildir.

Karın beyaz ve kömürün siyah olması kanın kırmızı olmasını gerektirmez.

► ***"Kar beyaz ve kömür siyah ise kar beyazdır."***

önermesi bir gerektirmedir.
Çünkü; $p \wedge q \Rightarrow p$ totolojidir.

► ***"Kar beyaz veya kömür siyah ise kar beyazdır."***

önermesi bir gerektirme değildir.

Çünkü; $p \vee q \Rightarrow p$ totoloji değildir.

Örnek Problem – 14

A: Eğer hava soğuk ve nemli olursa yağmur yağacağı,
B: Eğer hava sıcak ise havanın nemli olacağı,
C: Bugün havanın nemli olduğu

bilinmektedir.

Bugün yağmur yağıp yağmayacağını belirtiniz.

Çözüm

D: "Yağmur yağacak" olsun.
p: "Hava sıcaktır.",
q: "Hava nemlidir.",
r: "Yağmur yağacak." dersek;

A: $(\mathbf{p' \wedge q}) \Rightarrow \mathbf{r}$, **B:** $\mathbf{p \Rightarrow q}$, **C:** $\mathbf{q}$, **D:** $\mathbf{r}$ olur.

"$\mathbf{A \wedge B \wedge C \Rightarrow D}$" bir totoloji ise yağmur yağacak, çelişme ise yağmur yağmayacaktır.

$\mathbf{A \wedge B \wedge C \Rightarrow D} \equiv (\mathbf{p' \wedge q \Rightarrow r}) \wedge (\mathbf{p \Rightarrow q}) \wedge \mathbf{q \Rightarrow r}$ olur.

$\mathbf{A \wedge B \wedge C \Rightarrow D}$ önermesi $\mathbf{p \equiv 0}$, $\mathbf{q \equiv 1}$ ve $\mathbf{r \equiv 0}$ için yanlış, $\mathbf{r \equiv 1}$ için doğrudur.

$\mathbf{A \wedge B \wedge C \Rightarrow D}$ önermesi bir totoloji ya da çelişme değildir.

O hâlde, yağmurun yağıp yağmayacağı belirsizdir.

Örnek Problem – 15

A: Hava sıcak ve nemli olduğunda Burcu kendini mutlu hissetmez.

B: Hava sıcaktır.

C: Burcu kendini mutlu hissediyor.

Buna göre, havanın nemli olup olmadığını belirtiniz.

Çözüm

D: "Hava nemli değildir." olsun.
p: "Hava sıcaktır.",
q: "Hava nemlidir.",
r: "Burcu kendini mutlu hissediyor." dersek;

A: $(\mathbf{p \wedge q}) \Rightarrow \mathbf{r'}$, **B:** $\mathbf{p}$, **C:** $\mathbf{r}$, **D:** $\mathbf{q'}$ olur.

“ $\mathbf{A \wedge B \wedge C \Rightarrow D}$ ” bir totoloji ise hava nemli değildir; çelişme ise nemlidir.

$$\mathbf{A \wedge B \wedge C \Rightarrow D \equiv (p \wedge q \Rightarrow r') \wedge p \wedge r \Rightarrow q'} \text{ olur.}$$

$q' \equiv 0$ iken

$$(p \wedge q \Rightarrow r') \wedge p \wedge r \equiv (p \wedge 1 \Rightarrow r') \wedge p \wedge r$$

$$\equiv (p \Rightarrow r') \wedge p \wedge r \equiv (p' \vee r') \wedge p \wedge r$$

$$\equiv [(p' \wedge p) \vee (r' \wedge p)] \wedge r \equiv r' \wedge p \wedge r \equiv 0 \text{ olur.}$$

O hâlde; $A \wedge B \wedge C \Rightarrow D$ önermesi totolojidir.

Öyleyse; hava nemli değildir.

Etkinlik – 50

A: ***Banka faizleri yükselirse taşınmazların fiyatları düşer.***

B: ***Taşınmazların fiyatları düşerse, sahipleri mutsuz olur.***

C: ***Banka faizleri yüksektir.***

Buna göre, taşınmazların sahiplerinin mutsuz olup olmadığını belirtiniz.

Örnek Problem – 16

A: *“$3 < 5$ ise $4 < 3$ ’tür.”*

B: *“$3 < 5$ veya $4 < 3$ ’tür.”*

O hâlde,

C: *“$4 < 3$ ’tür.”*

çıkarımı geçerli midir?.

Çözüm

Örnek problem–13, 14 ve 15’te olduğu gibi önermeleri sembolleştirip $A \wedge B \Rightarrow C$ önermesinin bir totoloji olup olmadığını araştıracağız.

p: “$3 < 5$” ve **q:** “$4 < 3$” dersek

A: $p \Rightarrow q$

B: $p \vee q$

C: q

ve

$$A \wedge B \Rightarrow C \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q) \Rightarrow q \quad \text{olur.}$$

$q \equiv 0$ iken $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q) \equiv 0$ olur.

O hâlde; $A \wedge B \Rightarrow C$ önermesi totolojidir.

Çıkarım geçerlidir.

► Dikkat ediniz!

“Çıkarımın geçerli olması” demek “sonuç”un doğru olması demek değildir; “Bu öncüllerle bu sonuca varılır.” demektir.

Öncüller yanlış seçildiğinde, doğru bir akıl yürütme ile doğru sonuca değil, yanlış bir sonuca varılabilir.

Etkinlik – 51

*“**A:** $4 < 3$ ise $3 < 5$ ’tir.*

B: *$3 < 5$ veya $4 < 3$ ’tür.*

O hâlde; C: *$4 < 3$ ’tür.”* çıkarımı geçerli midir?

Etkinlik – 52

*“**A:** $2 < 3$ ise $4 < 5$ ’tir.*

B: *$4 < 5$ ’tir.*

O hâlde; C: *$2 < 3$ ’tür.”* çıkarımı geçerli midir?

Alıştırmalar ve Problemler – 1

1. Aşağıdaki ifadelerden hangileri önermedir.

a. ***Fikret her sabah spor yapar.***

b. ***Öğrenciler derslerine çalışmalıdır.***

c. ***Evrendeki yıldızların sayısı sonsuzdur.***

d. ***$2^{75} + 1$ bir asal sayıdır.***

e. ***Sorumluluğunu bilen insanları severim.***

f. ***Türkiye 2050 yılında Avrupa Birliği’ne girmiş olacak.***

g. ***$13 < 9$ ’dur ve şımarıkları sevmem.***

h. ***İstiyorsan çalışalım.***

i. ***$2 = 3$ olması $4 = 5$ olması için yeterlidir.***

j. ***Türkiye’nin iki kıtada olması Ankara’nın Avrupa’da olması için gereklidir.***

2. **p :** $2<5$
q : $9>2$
r : $5=9$

önermeleri verildiğine göre; aşağıdaki bileşik önermelerin sözel karşılıklarını yazınız; Doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $p\wedge q$ **b.** $p\wedge r'$ **c.** $p\veebar q$
d. $p\vee q$ **e.** $q\veebar r$ **f.** $q'\vee r$
g. $p'\veebar r$ **h.** $(p'\wedge q)\vee r'$ **i.** $(p\vee q)'\vee r$
j. $(p'\veebar q)\vee r$ **k.** $r'\veebar(p\veebar q')$ **l.** $(p\veebar q')\wedge(q\veebar r)$

3. Aşağıdaki önermelerin olumsuzlarını yazınız. Doğruluk değerleri belli olan önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. Hakan çalışacak veya sınıfını geçemeyecek.

b. Akın ve Ferit okula gitti.

c. 23 sayısı asal veya tektir.

d. $3^3=9$ ve $2^4>8$

e. 8 < 5 veya Okan uzun boyludur.

f. Gülse'nin bisiklet ve bilgisayar aldığı doğru değildir.

4. **p** yanlış, **q** ve **r** doğru önermelerdir.

Buna göre; aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $p\wedge q$ **b.** $p\wedge r'$ **c.** $p\veebar q$
d. $p\vee q$ **e.** $q\veebar r$ **f.** $q'\vee r$
g. $p\vee q'$ **h.** $p'\wedge r$ **i.** $p'\veebar r$
j. $p\vee(q\wedge r)$ **k.** $(p'\vee q)\wedge r$
l. $(p'\wedge q)\vee r'$ **m.** $(p\vee q)'\vee r$
n. $(p'\veebar q)\vee r$ **o.** $r'\veebar(p\veebar q')$
p. $(p\veebar q')\wedge(q\veebar r)$ **r.** $(p'\veebar q)\veebar r'$
s. $(p\veebar q')\vee(p'\veebar r)$ **t.** $(r'\wedge q)\veebar(r\veebar p)'$
u. $(p\wedge q')\veebar(q\vee r')$ **v.** $(r'\veebar q)\veebar(r\wedge p')$
y. $(p\wedge q')'\vee(q\vee r')$ **z.** $(r'\wedge q)'\wedge(r\vee p')'$

5. **p**, **q** ve **r** birer önermedir.

Buna göre; aşağıdaki önermelerin olumsuzlarını bulunuz.

a. $p\vee(q\wedge r)$ **b.** $p\veebar q$
c. $p\wedge(q\vee r')$ **d.** $(p'\vee q)'\vee r'$
e. $p'\vee q\vee r'$ **f.** $p\wedge q'\wedge r'$
g. $(p'\wedge q)\vee r'$ **h.** $(p'\veebar q)\vee r$
i. $r'\veebar(p\veebar q')$ **j.** $(p\veebar q')\wedge(q\veebar r)$
k. $(p\wedge r')\vee(q'\vee r)'$ **l.** $(q\wedge r)'\wedge p\wedge r$

6. "**p**" bir önermeyi, "**0**" yanlış bir önermeyi , "**1**" doğru bir önermeyi gösterdiğine göre; aşağıdaki önermeleri en sade biçimde yazınız.

a. $p\vee 0$ **b.** $p\wedge 0$ **c.** $1\vee p$
d. $p\wedge 1$ **e.** $p\wedge p'$ **f.** $p\vee p'$
g. $p\veebar 1$ **h.** $p\veebar 0$ **i.** $p\veebar p'$

7. 4. alıştırmada p, q ve r önermelerinin doğruluk değerleri için sadece $r\equiv 1$ verildiğini varsayınız.

Bu veri ile, verilen bileşik önermeleri en sade biçimde yazınız.

8. 4. alıştırmada p, q ve r önermelerinin doğruluk değerleri için sadece $r\equiv 0$ verildiğini varsayınız.

Bu veri ile, verilen bileşik önermeleri en sade biçimde yazınız.

9. 4. alıştırmada p, q ve r önermeleri için sadece $p\equiv q\equiv r$ denkliğinin verildiğini varsayınız.

Bu veri ile, verilen bileşik önermeleri en sade biçimde yazınız.

10. 4. alıştırmada p, q ve r önermeleri için sadece $q\equiv r$ denkliğinin verildiğini varsayınız.

Bu veri ile, verilen bileşik önermeleri en sade biçimde yazınız.

11. Önerme işlemlerinin özelliklerinden yararlanarak aşağıdaki önermelere denk olan en sade önermeleri bulunuz. Bulduğunuz sonuçların doğruluğunu, doğruluk tabloları ile gösteriniz.

a. $p\wedge(p'\vee q)$ **b.** $q\vee(p\wedge q')$

c. $p\veebar(p\veebar q)$ **d.** $(p'\veebar q)\veebar q'$

e. $(p\wedge q)'\vee(p\vee r)$ **f.** $(p\wedge q)'\wedge(p'\vee q)$

g. $(p'\wedge q)\veebar(p\veebar q')$ **h.** $(p\wedge q)'\veebar(p\vee q)$

i. $(p\wedge q')\vee\left[(p\wedge q)'\vee q'\right]$

j. $p\vee\left[(p\wedge q)'\wedge(p\vee q)'\right]$

k. $(p'\veebar q)\vee p$ **l.** $p\veebar(p\vee q)$

m. $(p\veebar q')\wedge(p'\veebar q)$ **n.** $(p\wedge q')\veebar(p'\wedge q)$

o. $p\veebar(p\veebar q)$ **p.** $(p'\veebar q)\veebar q'$

12. Aşağıdaki denkliklerin doğruluğunu, hem doğruluk tablosundan hem de önerme işlemlerinin özeliklerinden yararlanarak gösteriniz.

a. $p\vee(p\wedge q)\equiv p$

b. $(p\vee q)\wedge q\equiv q$

c. $\left[(p\vee q')\wedge p'\right]\vee q\equiv p'\vee q$

d. $\left[p\vee(p\wedge q')\right]\wedge(p\vee q')\equiv p$

e. $(p\vee q)\wedge\left[(p\wedge q)\vee(p'\wedge q')\right]\equiv p\wedge q$

f. $(p\wedge q)\vee(p'\wedge q)\vee(p'\wedge q')\equiv p'\vee q$

g. $(p\vee q)\veebar(p\wedge q)\equiv p\veebar q$

h. $(p\vee q)\wedge(p\veebar q)\equiv p\veebar q$

i. $(p'\wedge q)\veebar(p\veebar q')\equiv p'\vee q$

j. $(p\wedge q)'\veebar(p\vee q)\equiv p\veebar q'$

13. $(p\vee q)'\vee(q'\wedge r)'\equiv 0$ olduğuna göre; p, q, r önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

14. $(p\wedge q')'\vee r'\equiv 0$ olduğuna göre aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $\left[(p\vee r')\wedge(q\wedge r')'\right]\vee(q'\vee p)$

b. $\left[(p\vee r)'\vee q\right]'\wedge(q'\vee r)$

c. $\left[r\wedge(q\vee p)'\right]\vee\left[(q'\vee p')\wedge(p\vee r)\right]$

d. $\left[(p'\wedge q)\wedge(q\vee r')'\right]\wedge\left[(q'\vee r')\wedge p\right]$

e. $(p\veebar q')\wedge(q\veebar r)$

f. $(p'\veebar q)\veebar(p\vee r)$

g. $\left[r\wedge(q\veebar p)'\right]\vee\left[(q'\veebar p')\wedge(p\veebar r)\right]$

h. $(p\wedge q')\vee\left[(p\wedge q)'\vee(p\veebar r')\right]$

15. p, q, r önermeleri için $(p\vee q')'\wedge r\equiv 1$ olduğuna göre, 15. alıştırmada verilen önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

16. p, q ve r önermeleri için $(p\vee q)\wedge(q\wedge r)\equiv 1$ olduğuna göre 15. alıştırmada verilen önermelere denk olan en sade önermeleri bulunuz.

17. p, q ve r önermeleri için $p\vee(p\wedge q'\wedge r)\equiv 0$ olduğuna göre, 15. alıştırmada verilen önermelere denk olan en sade önermeleri bulunuz.

18. Aşağıdaki önermelerin birer **totoloji** (geçerli önerme) olduğunu gösteriniz.

a. $p\vee(p\wedge q)'$

b. $(p\vee q)\vee(p\wedge q)'$

c. $(p'\vee q)\vee(p\wedge q')$

d. $p\vee(p'\wedge q)\vee(p'\wedge q')$

e. $(p \wedge q) \vee (p' \wedge q) \vee q'$

f. $\left[(p \vee q) \wedge p'\right]' \vee q$

g. $p \vee (p' \wedge q) \vee (p' \wedge q')$

h. $(p \veebar q) \vee (p' \veebar q)$

i. $(p \wedge q') \veebar (p' \vee q)$

19. Aşağıdaki önermelerin birer **çelişki** (tutarsız önerme) olduğunu gösteriniz.

a. $(p \wedge q') \wedge (p \vee q)'$

b. $p \wedge (p' \vee q) \wedge (p \wedge q)'$

c. $p \wedge q' \wedge (p' \vee q)$

d. $(p' \vee q) \wedge (q' \vee r) \wedge (p \wedge r')$

e. $(p \veebar q) \wedge (p' \veebar q)$

f. $\left[p \veebar (p' \wedge q)\right] \wedge (p' \wedge q')$

20. Aşağıda verilen önermelere denk olan en sade önermeleri yazınız.

a. $p \Rightarrow p$ **b.** $p \Rightarrow p'$ **c.** $p \Rightarrow 1$

d. $p \Rightarrow 0$ **e.** $1 \Rightarrow p$ **f.** $0 \Rightarrow p$

g. $p \Leftrightarrow p$ **h.** $p \Leftrightarrow p'$ **i.** $p \Leftrightarrow 0$

j. $p \Leftrightarrow 1$ **k.** $p \Rightarrow (p \Leftrightarrow p')$ **l.** $(p \Leftrightarrow p') \Leftrightarrow p$

21. $(p \wedge q) \Rightarrow (q' \vee r) \equiv 0$ olduğuna göre;

aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $(p' \vee q) \Rightarrow (q \vee r)$

b. $(p \wedge q') \Rightarrow \left[(q \vee r') \Rightarrow p'\right]$

c. $(p \wedge r) \Leftrightarrow \left[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q)\right]$

d. $(p \Leftrightarrow r') \Rightarrow \left[(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r)\right]$

e. $(p \veebar q) \Rightarrow \left[(q \veebar r') \Rightarrow p'\right]$

f. $(p \Leftrightarrow r) \veebar \left[(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r)\right]$

22. $(p' \Rightarrow q) \Rightarrow (q' \Rightarrow r') \equiv 0$ olduğuna göre;

21. alıştırmada verilen önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

23. $(p \vee q') \Rightarrow (q \vee r') \equiv 0$ olduğuna göre;

21. alıştırmada verilen önermelere denk olan en sade önermeleri bulunuz.

24. $\left[p \vee (q \wedge r)\right] \Rightarrow p' \equiv 0$ olduğuna göre;

21. alıştırmada verilen önermelere denk olan en sade önermeleri bulunuz.

25. $\left[p \vee (q \wedge r)\right] \Rightarrow (p \wedge r) \equiv 1$ olduğuna göre,

$(q \wedge r) \Rightarrow p$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

26. $\left[p \vee (q \wedge r)\right] \Rightarrow (p \wedge r) \equiv 1$ olduğuna göre,

$p \Rightarrow (q \wedge r)$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

27. **p : Hava soğuktur.**

q : Kalın giyineceksin.

önermeleri veriliyor.

Buna göre; $\mathbf{p \Rightarrow q}$ önermesinin,

a. karşıtını **b.** tersini

c. karşıt tersini **d.** olumsuzunu

sembollerle ve sözlerle ifade ediniz.

28. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

Önermelerin olumsuzlarını yazınız.

a. $3 < 5$ ise $-3 < -5$'tir.

b. Ankara Türkiye'de ise Roma İtalya'dadır.

c. $-2^4 = 16$ ise $-3^3 = -27$'dir.

d. $2 < 5$ ise $4 < 25$'tir.

29. Aşağıdaki önermelere denk olan en sade önermeleri bulunuz.

a. $\left[(p\wedge q)'\wedge q'\right]\Rightarrow p$

b. $[(p\Rightarrow q)\wedge q]\Rightarrow p$

c. $(p\vee q)\Rightarrow(p\Leftrightarrow q)$

d. $[(p\wedge q')\Rightarrow p]\Rightarrow[(p\Rightarrow q)\wedge q]$

30. Aşağıdaki önermelerin birer totoloji olduğunu gösteriniz.

a. $p\Rightarrow(p\vee q)$

b. $\left[(p\wedge q)'\wedge q\right]\Rightarrow p'$

c. $[(p'\Rightarrow q')\wedge q]\Rightarrow p$

d. $(p\wedge q)\Rightarrow(p\Leftrightarrow q)$

e. $[(p\vee q)\Rightarrow r]\vee[(p\wedge q)\Rightarrow r']$

f. $[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)]\Rightarrow(p\Rightarrow r)$

31. Aşağıdaki önermelerden hangileri çelişmedir?

a. $(p\vee q)\Rightarrow(p'\wedge q')$

b. $[(p\Rightarrow q)\wedge p']\Rightarrow q'$

c. $(p\wedge q')\Leftrightarrow(p\Leftrightarrow q)$

d. $[p\Rightarrow(p\vee q)]\Rightarrow[(p\wedge q)\wedge(p\Rightarrow q')]$

e. $(p'\vee q)\Rightarrow(p\veebar q)$

f. $[(p\Rightarrow q)\veebar p]\Rightarrow q$

32. **p**, **q** ve **r** basit önermelerdir.

Aşağıda verilen P önermelerinin , yanlarında verilen Q önermelerini gerektirdiğini gösteriniz.

a. $P\equiv(p\vee q)\Rightarrow q$; $Q\equiv p\Rightarrow q$

b. $P\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)$; $Q\equiv p\Rightarrow(q\wedge r)$

c. $P\equiv p\wedge q$; $Q\equiv p\Leftrightarrow q$

d. $P\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)$; $Q\equiv p\Rightarrow r$

33. Aşağıdaki denklikleri ispatlayınız.

a. $(p\vee q)\Rightarrow(p\wedge q)\equiv p\Leftrightarrow q$

b. $(p\Rightarrow q)\wedge p\equiv p\wedge q$

c. $(p\vee q)\Rightarrow p'\equiv p'$

d. $(p\Rightarrow q)\wedge q\equiv q$

34. Aşağıdaki denklikleri ispatlayınız.

a. $(p\vee q)\Rightarrow(p\Rightarrow q)\equiv p\Rightarrow q$

b. $(p\Rightarrow q)\Rightarrow p\equiv p$

c. $(p\Rightarrow q)\wedge q'\equiv p\Rightarrow q'$

d. $(p\Rightarrow q)\wedge(p'\Rightarrow q')\equiv p\Leftrightarrow q$

e. $[(p\Rightarrow q)\Rightarrow r]\vee p\equiv p\vee r$

f. $(p\vee q)\Rightarrow(q\vee r)\equiv p\Rightarrow(q\vee r)$

35. **A:** ***"Erdem doğru beslenir ve spor yaparsa sağlıklı olur."***

B: ***"Erdem doğru beslenmekte ancak spor yapmamaktadır."***

önermeleri doğru sayıldığına göre,

C: ***"Erdem sağlıklı değildir."***

sonucu doğru olmak zorunda mıdır?

Gerektirme kavramını kullanarak yanıtlayınız.

36. **A:** ***"Gürbüz spor yapmazsa kilo veremez."***

B: ***"Gürbüz spor yapıyor."***

önermeleri doğru sayıldığına göre,

C: ***"Gürbüz kilo verecek."***

sonucu doğru olmak zorunda mıdır?

37. **A:** ***"Bertrand Russell iyi bir mantıkçı ise iyi bir filozoftur. "***

B: ***"Bertrand Russell iyi bir filozoftur."***

önermeleri doğru sayıldığına göre,

C: ***"Bertrand Russell iyi bir mantıkçıdır."***

sonucu doğru olmak zorunda mıdır?

38. **A:** ***"Savaş ya da Barış kazanır."***

B: ***"Savaş kazanamaz."***

C: ***"Barış kazanır."***

önermeleri veriliyor.

$A \wedge B$ önermesi C önermesini gerektirir mi?

39. **A:** ***"Ali iyi bir öğrenci ise derslerine çalışır."***

B: ***"Ali çok televizyon seyrederse derslerine çalışamaz."***

önermeleri veriliyor.

A ve B önermeleri doğru sayılırsa aşağıdaki sonuçlardan hangileri doğru olmak zorundadır?

a. **C:** ***"Ali iyi bir öğrenci ise çok televizyon seyretmez."***

b. **D:** ***"Ali iyi bir öğrenci değilse çok televizyon seyrediyordur."***

c. **E:** ***"Ali çok televizyon seyrediyorsa iyi bir öğrenci değildir."***

d. **F:** ***"Ali çok televizyon seyretmiyorsa iyi bir öğrencidir."***

Gerektirme kavramını kullanarak yanıtlayınız.

40. **A:** ***"Yağmur yağdıysa çamaşırlar ıslanmıştır."***

önermesini doğru sayalım.

Aşağıda verilen **B** önermeleri de doğru sayılırsa, hangi **C** sonuçlarının doğru olması gerekir?

a. **B :** ***"Yağmur yağmıştır."***
C : ***"Çamaşırlar ıslanmıştır."***

b. **B :** ***"Çamaşırlar ıslanmıştır."***
C : ***"Yağmur yağmıştır."***

c. **B :** ***"Çamaşırlar ıslanmamıştır."***
C : ***"Yağmur yağmamıştır."***

d. **B :** ***"Yağmur yağmamıştır."***
C : ***"Çamaşırlar ıslanmamıştır."***

Gerektirme kavramını kullanarak yanıtlayınız.

3 – Niceleme Mantığı

Etkinlik – 53

p: ***"Rize'liler yardımseverdir."***
q: ***"Ayhan Rize'lidir."***
r: ***"Ayhan yardımseverdir."***

önermeleri verilmiş olsun.

$\mathbf{p \wedge q}$ önermesi **r** önermesini gerektirir mi?

p ve **q** önermelerinin doğru olması durumunda **r** önermesinin de doğru olması gerektiğini sezginizle, hiç kuşkuya kapılmadan söyleyebilirsiniz.

$\mathbf{p \wedge q}$ önermesi **r** önermesini gerektirir.

Ancak, $\mathbf{p \wedge q \Rightarrow r}$ sembolik önermesinin bir gerektirme olmadığı da açıktır.

Bu çelişki üzerinde tartışınız.

►

Buradaki çelişki, çıkarıma karşılık getirilen sembolleştirmenin yetersiz olmasından doğar.

Önermeler mantığında önermelerin iç yapılarına değinmemiş sadece doğruluk değerleri ile ilgilenmiştik.

Etkinlik–53'te verilen önermelerin iç yapıları incelendiğinde, bunların birbirleriyle ilişkili oldukları görülür. Böyle önermeleri **p**, **q**, **r**, **...** diye sembolleştirmekle, aralarındaki ilişkileri yok saymış, bunları birbirlerine yabancılaştırmış oluruz.

Etkinlik–53'te sezginizle sembollerin çelişmesi bu yüzdendir.

Demek ki; böyle önermeleri, aralarındaki ilişkileri ortaya çıkaracak biçimde, daha ayrıntılı olarak sembolleştirmek gerekmektedir.

Bir basit önermeyi – iç yapısını ortaya çıkaracak biçimde – sembolleştirmek için, önermeyi **özne** ve **yüklem** diye iki kısma ayırırız.

Mantıkta; bir önermenin, **özne**si dışındaki kısmına **yüklem** denir.

Genellikle, özneyi **a**, **b**, **c**, **...** ; yüklemi **p**, **q**, **r**, **...** gibi harflerle göstererek önermeyi $\mathbf{p(a)}$ biçiminde sembolleştiririz.

Örnekleri inceleyiniz.

I. $\underbrace{\text{Ahmet}}_{\text{Özne (a)}}$ $\underbrace{\text{doktordur.}}_{\text{Yüklem (p)}}$

p(a) : Ahmet doktordur.

p(a) , p(Ahmet) biçiminde de yazılabilir.

II. $\underbrace{\text{Meltem'in öğretmeni}}_{\text{Özne (c)}}$ $\underbrace{\text{Zehra Hanım'dır.}}_{\text{Yüklem (r)}}$

r(c) : Meltem'in öğretmeni Zehra Hanım'dır.

III. $\underbrace{3}_{\text{Özne (a)}}$, $\underbrace{\text{5'ten küçüktür.}}_{\text{Yüklem (q)}}$

q(a) : 3, 5'ten küçüktür.

q(a) , q(3) diye de yazılabilir.

► Önümüzdeki sayfalarda göreceğiniz gibi; konunun bu kısmında, önermelerin özneleri yerine geçebilecek terimlerin kümelerinin eleman sayıları ve önermelerin yüklemleri ile ilgileneceğiz. Bu yüzden mantığın bu kısmına **niceleme mantığı** veya **yüklemler mantığı** adı verilir.

Niceleme mantığında, ilköğretim okulunda öğrendiğiniz **küme** kavramından da yararlanacağız.

Açık Önermeler

Etkinlik – 54

Aşağıdaki ifadeler birer önerme midir?

İfadelerdeki "x" ve "y"lerin yerine değişik terimler koyarak doğru ya da yanlış önermeler elde ediniz.

a. x evcil bir hayvandır.
b. x pozitif bir tam sayıdır.
c. $3x + 6 = 0$
d. $2x + y = 9$

*"**x bir asal sayıdır**."* ifadesi ile *"**... bir asal sayıdır**."* ifadesi aynı anlamdadır. Birincideki "x", ikincide "boş" – ya da "açık" – bırakılan yeri belirtmek için kullanılmış bir işarettir. İfade, bu biçimiyle bir yargı bildirmediğinden bir önerme değildir. **Açık** bırakılan yere, ifadeyi anlamsız kılmayacak, değişik terimler konulursa değişik önermeler elde edilir.

*"**2 bir asal sayıdır**."*

*"**6 bir asal sayıdır**."* gibi.

"2 bir asal sayıdır." önermesi p(2) biçiminde sembolleştirilebildiği gibi,

*"**x bir asal sayıdır**."* ifadesi de **p(x)** biçiminde sembolleştirilebilir.

Değişik terimlerin konulabileceği **açık** yeri belirten **x, y, z, ...** gibi işaretlere **değişken** adı verilir.

Tanım – 13

*İçerisinde en az bir değişken bulunan ve bu değişkene verilen değerlere göre önerme olan ifadelere **açık önerme**ler denir.*

Tanım – 14

*Bir açık önermede değişkenlerin yerlerine konulabilecek terimlerin kümesine, bu açık önermenin **evrensel küme**si;*
*Açık önermeyi doğru kılan terimlerin kümesine de, bu açık önermenin **doğruluk kümesi** veya **çözüm kümesi** denir.*

Evrensel kümeyi **E** ile, çözüm kümesini **Ç** ile göstereceğiz.

Etkinlik – 55

$p(x)$: "$x^2 + 2x - 5 \leq 0$"

$q(x,y)$: "$x^2 + y < 0$"

$r(x,y,z)$: "$x^2 - 2y < z + 3$"

açık önermeleri veriliyor.

Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $p(-4)$ **b.** $p(0)$ **c.** $p(2)$
d. $q(1,-3)$ **e.** $q(-3,5)$ **f.** $q(-2,4)$
g. $r(-2,2,-1)$ **h.** $r(-5,4,3)$

► **Z**'nin "***Tam sayılar kümesi***"ni, **N**'nin "***Doğal sayılar kümesi***"ni, **Q**'nun "***Rasyonel sayılar kümesi***"ni, **R**'nin "***Gerçel sayılar kümesi***"ni, **N^+**'nın "***Sayma sayıları kümesi***"ni gösterdiğini hatırlayınız!

Etkinlik – 56

Aşağıdaki açık önermelerin doğruluk kümelerini bulunuz.

a. $p(x)$: "$x \in Z$; $x^2 < 5$"

b. $q(x)$: "$x \in N$; $x(x-2)(x+3)=0$"

c. $r(x)$: "$x \in \{1,2,3,4\}$; x asal sayıdır."

d. $s(x)$: "x sınıfımızdaki gözlüklü kız öğrencidir."

e. $t(x,y)$: "$x,y \in$ {Haftanın günleri} ; x, y'nin ertesidir."

f. $u(x,y)$: "$x,y \in N$, $2x+y=4$"

Etkinlik – 57

$p(x)$: "$5 < x^2 < 35$" önermesinin, aşağıda verilen kümelerdeki doğruluk kümelerini bulunuz.

a. Doğal sayılar kümesi (N)

b. Tam sayılar kümesi (Z)

c. $E=\{5,6,7,8\}$

d. $E=\{-2,-1,0,1,2\}$

Örnek Problem – 15

Aşağıdaki açık önermelerden hangileri bir gerektirmedir?

a. "$(x \in Z \text{ ve } x=2) \Rightarrow x^2=4$"

b. "$(x \in Z \text{ ve } x^2=1) \Rightarrow (x=1)$"

c. "$(x \in N \text{ ve } x^2=1) \Rightarrow (x=1)$"

d. "$(x \in R \text{ ve } x^2=9) \Rightarrow (x=-3 \text{ veya } x=3)$"

e. "$(x \in Q \text{ ve } x^2=4) \Rightarrow (x=-2 \text{ ve } x=2)$"

Çözüm

a. 1. yol

$x=2$ açık önermesi, x yerine sadece 2 konulduğunda doğru olur.

$(2=2) \Rightarrow (2^2=4)$

önermesi doğru olduğundan

$(x=2) \Rightarrow (x^2=4)$

açık önermesi bir gerektirmedir.

2. yol

$(x=2) \Rightarrow (x^2=4)$

$\Rightarrow (x=2) \Rightarrow (x^2-4=0)$

$\Rightarrow (x=2) \Rightarrow [(x-2)(x+2)=0]$

$\Rightarrow (x=2) \Rightarrow [(x=2) \vee (x=-2)]$ yazılabilir.

$p(x)$: "$x \in Z$; $x=2$" ve $q(x)$: "$x \in Z$; $x=-2$" diyelim.

$(x=2) \Rightarrow (x^2=4)$ açık önermesi

$p(x) \Rightarrow [p(x) \vee q(x)]$ açık önermesine dönüşür.

Bu son açık önermede x yerine belirli bir a değeri konulursa; açık önermeler de, doğruluk değerleri bilinen $p(a)$ ve $q(a)$ önermelerine dönüşür.

$p(a) \Rightarrow p(a) \vee q(a)$ ya da
$p \Rightarrow p \vee q$ önermesi elde edilir.

$p \Rightarrow (p \vee q)$ totoloji olduğundan, $(x=2) \Rightarrow (x^2=4)$ açık önermesi bir gerektirmedir.

b. $x=-1$ için $x^2=1$ doğru, $x=1$ yanlış olup,

$x^2=1 \Rightarrow x=1$ önermesi yanlış olur.

$x^2=1 \Rightarrow x=1$ bir gerektirme değildir.

c. $x^2=1$ açık önermesini doğru yapan doğal sayı sadece $x=1$'dir. Bu değer önermeyi doğru yapar. Açık önerme bir gerektirmedir.

d. $x^2=9$ açık önermesini doğru yapan x değerleri -3 ve 3 'tür. Bu değerlerin her biri önermeyi doğru yapar.

Açık önerme bir gerektirmedir.

e. $x=-2$ açık önermesi doğru iken, $x=2$ açık önermesi doğru olamaz.

Öyleyse; $(x=-2)\wedge(x=2)$ açık önermesi bir çelişmedir.

$x=-2$ ile $x=2$ önermelerinden biri doğru iken $x^2=4$ açık önermesi doğru olacağından,

$(x^2=4)\Rightarrow[(x=-2)\wedge(x=2)]$

önermesi yanlış olur.

Açık önerme bir gerektirme değildir.

Niceleyiciler

Etkinlik – 58

Pazartesi, Salı, Çarşamba ve Perşembe günleri 3'er saat ders çalışan bir öğrenci aşağıdakilerden hangilerini söylerse doğru söylemiş olur?

a. Her gün ders çalışırım.

b. Her gün ders çalışmam.

c. Bazı günler ders çalışırım.

d. Bazı günler ders çalışmam.

e. Hiçbir gün ders çalışmam.

f. Her gün ders çalışmadığım doğru değildir.

g. Bazı günler ders çalışmadığım doğru değildir.

h. Bazı günler ders çalıştığım doğru değildir.

i. Hiçbir gün ders çalışmadığım doğru değildir.

j. Her gün ders çalıştığım doğru değildir.

► Mantıkta, özne'nin niceliğini (çokluğunu) belirten **bütün, her, bazı, en az bir, hiçbir** gibi sözcüklere **niceleyici**ler denir.

Bu niceleyicilerden bazıları konuşma dilinde; olumlu tümcelerde farklı, olumsuz tümcelerde farklı anlama gelebilir. Ancak; mantıkta, sembolleştirme ile tek anlamlılık sağlanır.

Evrensel Niceleyici

E evrensel kümesinde bir $\mathbf{p(x)}$ açık önermesi verilmiş olsun.

$\mathbf{p(x)}$ açık önermesinin önüne ***"Her x için"***, sonuna da ***"doğrudur."*** sözlerini koyarak,

"Her x için $\mathbf{p(x)}$ ***doğrudur."*** ifadesini yazalım.

Bu ifade bir doğruluk değeri taşıdığından bir önermedir.

Bu önerme sembolik olarak, " $\forall$**x için** $\mathbf{p(x)}$ " ya da " $\forall$**x,** $\mathbf{p(x)}$ " biçiminde yazılır.

Buradaki "$\forall$" sembolü genellikle "**her**" diye okunur;

"**her**", "**bütün**", "**tüm**", "**herhangi bir**"

evrensel niceleyicilerine karşılık gelir.

" $\forall$**x,** $\mathbf{p(x)}$ " önermesi $\mathbf{p(x)}$'i yanlış yapan en az bir x değerinin bulunması durumunda yanlış; $\mathbf{p(x)}$'i yanlış yapan hiçbir x değerinin bulunmaması durumunda doğru olur.

Örnek Problem – 16

Tam sayılar kümesinde, aşağıda verilen önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $\forall x,\ x^2>0$ **b.** $\forall x,\ x^2>x-1$

Çözüm

a. $x=0$ için " $x^2>0$ " önermesi yanlış olacağından;

" $\forall x,\ x^2>0$ " önermesi yanlıştır.

b. x'in her tam sayı değeri için " $x^2\geq x$ " olur.

O hâlde;

" $\forall x,\ x^2>x-1$ " önermesi doğrudur.

Varlık Niceleyicisi

E evrensel kümesinde bir $\mathbf{p(x)}$ açık önermesi verilmiş ise;

"Bazı x'ler için $\mathbf{p(x)}$ ***doğrudur."***

ifadesi bir önermedir.

Aynı anlama gelen “**bazı**”, “**kimi**”, “**en az bir**” niceleyicilerine “∃” sembolü karşılık getirilerek, bu önerme;

“ **$\exists$x için p(x)** ” ya da “ **$\exists$x, p(x)** ”

biçiminde sembolleştirilir.

“ **$\exists$x, p(x)** ” önermesi **p(x)** ’i doğru yapan en az bir x değeri varsa doğru; **p(x)** ’i doğru yapan hiçbir x değeri yoksa yanlış olur.

“∃” sembolü genellikle “**bazı**” diye okunur. Varlık belirttiğinden “**varlık niceleyicisi**” diye adlandırılır.

Örnek Problem – 17

$E = \{0,1,3,5,9\}$ evrensel kümesinde, aşağıdaki önermelerin doğruluk değerleri yanlarına yazılmıştır. Nedenlerini siz açıklayınız.

a. “$\forall$x, x tektir.” (Yanlıştır.)

b. “$\exists$x, x çifttir.” (Doğrudur.)

c. “$\forall$x, $x+2$ asaldır.” (Doğrudur.)

d. “$\exists$x, $x+2$ asaldır.” (Doğrudur.)

e. “$\forall$x, x tektir $\vee$ x asaldır.” (Yanlıştır.)

Niceleyicilerin Değillenmesi

Teorem – 11

Aşağıdaki denklikler geçerlidir.

a. $[\forall \mathbf{x}, \mathbf{p(x)}]' \equiv \exists \mathbf{x}, \mathbf{p'(x)}$

b. $[\exists \mathbf{x}, \mathbf{p(x)}]' \equiv \forall \mathbf{x}, \mathbf{p'(x)}$

$[\forall \mathbf{x}, \mathbf{p(x)}]' \equiv \exists \mathbf{x}, \mathbf{p'(x)}$ denkliğinin doğruluğunu gösterelim:

“**$\forall$x, p(x)**” önermesi “**Her x için p(x) doğrudur.**” demek olduğundan, bunu **değillemek** için **en az bir x için p(x)’in yanlış olduğunu** söylemek gerekir. Bu da “**$\exists$x, p′(x)**” ile aynı anlamdadır.

Aynı şekilde; $[\exists \mathbf{x}, \mathbf{p(x)}]' \equiv \forall \mathbf{x}, \mathbf{p'(x)}$ denkliğinin doğruluğunu da siz gösteriniz.

Örnek Problem – 18

Aşağıda verilen önermelerin olumsuzlarını yazınız.

a. p: “$\exists x \in R,\ x^2 < x$”

b. q: “$\forall x \in R,\ x^2 > 0$”

c. r: “$(\exists x \in Z,\ 2x+1=0) \vee (\forall x \in Z,\ x$ tektir.)”

d. s: “$(\forall x \in R,\ x-2<0) \Rightarrow (\exists x \in R,\ x+2>0)$”

Çözüm

a. p' : “$\forall x \in R,\ x^2 \geq x$”

b. q' : “$\exists x \in R,\ x^2 \leq 0$”

c. r' : “$(\forall x \in Z,\ 2x+1 \neq 0) \wedge (\exists x \in Z,\ x$ tek değil$)$”

d. s' : “$(\forall x \in R,\ x-2<0) \wedge (\forall x \in R,\ x+2 \leq 0)$”

Etkinlik – 59

Mert, ev ödevi olarak verilen 5 problemden yalnız 3’ünü çözebilmiştir.

***E* = {*x* | *x* ödev problemlerinden biridir.}**

***p*(*x*): “*x* problemini Mert çözmüştür.”**

olarak verildiğine göre, aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

Bu önermeleri sözlerle de ifade ediniz.

a. $\exists x,\ p(x)$ **b.** $\forall x,\ p(x)$ **c.** $\exists x,\ p'(x)$

d. $\forall x,\ p'(x)$ **e.** $[\exists x,\ p(x)]'$ **f.** $[\forall x,\ p(x)]'$

“Her” Niceleyicisinin İki Anlamlılığı

Etkinlik – 60

Aşağıda verilen önermelerin anlamları üzerinde tartışınız.

Uygun evrensel kümeler belirleyerek bunları sembolleştiriniz.

a. ***Her sakallı deden değildir.***

b. ***Her babayiğit bu bileği bükemez.***

c. ***Her kuşun eti yenmez.***

d. ***Her gün çalışmam.***

► Sembolik önermelerin tek anlamlı oldukları açıktır.
Ancak; "**her**" niceleyicisi, kullanıldığı olumsuz yüklemli önermelerde, farklı anlamlar taşıyabilir.

Bunu bir örnek üzerinde açıklayalım:

Öğretmeninizin tahtaya bir problem yazıp sınıftaki öğrencileri kastederek

"Her öğrenci bu problemi çözemez." dediğini varsayalım.

Bir süre sonra, Ali "***Ben çözdüm öğretmenim***" diyebilir. Öğretmen de, "***Ama; Veli çözemedi.***" derse; öğretmen haklı çıkmış olur.

Dilimizdeki,
"Her öğrenci bu problemi çözemez."
önermesinin tam karşılığı
"Her öğrencinin bu problemi çözebileceği doğru değildir." önermesidir.
"Bazı öğrenciler bu problemi çözemez."
önermesi de bu önermenin mantıkla tam uyumlu biçimidir.
Öyleyse; neden "**bazı**" yerine "**her**" kullanılmaktadır?
Bu seçim, problemin zorluğunu vurgulama amaçlı olabilir.

✦ ***"Her öğrenci bu problemi çözemez."***
önermesini sembolleştirelim:

$E=\{x \mid x \text{ sınıftaki bir öğrencidir.}\}$

$p(x)$: "***x bu problemi çözebilir.***" olsun.

Verilen önermenin
"Her öğrencinin bu problemi çözebileceği doğru değildir." anlamında olduğunu biliyoruz.

Öyleyse; önermenin sembolik karşılığı

$[\forall x,\ p(x)]'$ biçiminde olacaktır.

$[\forall x,\ p(x)]' \equiv \exists x,\ p'(x)$ denkliği

"Her öğrenci bu problemi çözemez."
$\equiv$ ***"Bazı öğrenciler bu problemi çözemez."***
denkliğini de açıklar.

Örnek Problem – 19

t: ***"Her tavuk yumurtlamaz."***
önermesini sembolleştirelim:

"Her tavuk yumurtlamaz." önermesi
"Her tavuğun yumurtladığı doğru değildir."
anlamına gelir.

$E=\{x \mid x \text{ tavuktur.}\}$

$p(x)$: "***x yumurtlar.***" denirse

t: $[\forall x,\ p(x)]'$ olur.

$[\forall x,\ p(x)]' \equiv \exists x,\ p'(x)$ olduğundan
"Her tavuk yumurtlamaz." önermesi
"Bazı tavuklar yumurtlamaz."
önermesi ile aynı anlamdadır.
Buna göre;
t: "Her tavuk yumurtlamaz."
önermesinin olumsuzu
t' : ***"Her tavuk yumurtlar."*** olur.

► "***Bazı***" sözcüğü konuşma dilinde, genellikle "***en az bir, fakat hepsi değil***" anlamında kullanılır. Ancak; mantıkta "***en az bir, veya hepsi***" anlamındadır.

Örneğin; konuşma dilinde "***2, 3, 5, 7 sayılarından bazıları asaldır.***" demeyiz. "***2, 3, 5, 7 sayılarının hepsi asaldır.***" deriz. Ancak; mantıkta "***2, 3, 5, 7 sayılarından bazıları asaldır.***" denilebilir.

Etkinlik – 61

Etkinlik–58'de verilen önermelerin olumsuzlarını yazınız.

Etkinlik – 62

$E=\{x \mid x \text{ haftanın bir günüdür.}\}$

$p(x)$: ***"x günü çalışırım."***

diyerek **Etkinlik–58**'de verilen önermeleri sembolleştiriniz.
Bu önermelerin doğruluk değerlerini bularak önceki yanıtlarınızla karşılaştırınız.

Etkinlik – 63

Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $p:\left(\exists x\in R,\ x^2<1\right)\vee\left(\forall x\in R,\ |x|>0\right)$

b. $q:\left(\forall x\in R,\ \frac{x}{x}=1\right)\wedge\left(\exists x\in R,\ x^2=1\right)$

c. $r:\left(\forall x\in Z,\ \sqrt{x^2}=x\right)\Rightarrow\left(\forall x\in N,\ x\le x^2\right)$

d. $s:\left(\exists x\in N,\ 2x=3\right)\Leftrightarrow\left(\exists x\in R,\ x^2+2=0\right)$

Etkinlik – 64

Etkinlik–63'teki önermelerin olumsuzlarını yazınız.

Etkinlik – 65

Etkinlik–60'taki önermelerin olumsuzlarını yazınız.

Etkinlik – 66

p: "***Her x gerçel sayısı için, $2x+y=0$ eşitliğini sağlayan en az bir y gerçel sayısı vardır.***" önermesi

p: "$\forall x\in R,\ \exists y\in R,\ 2x+y=0$"

biçiminde sembolleştirilir.

Bir de şu önermeyi sembolleştirelim:

q: "***En az bir y gerçel sayısı için; $2x+y=0$ eşitliğini her x gerçel sayısı sağlar.***"

q: "$\exists y\in R,\ \forall x\in R,\ 2x+y=0$"

olur.

p ile **q** önermelerinin aynı anlama gelmediğini görüyorsunuz.

Demek ki;

"$\forall x,\ \exists y,\ P(x,y)$" ile "$\exists y,\ \forall x,\ P(x,y)$"

farklı önermelerdir.

Bu bilgiyi dikkate alarak;

a. Yukarıda verilen p ve q önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

b. "***Her başarılı erkeğin arkasında bir kadın vardır.***" önermesini sembolleştiriniz.

c. Yazdığınız sembolik önermede $\forall$ ve $\exists$ sembollerinin yerlerini değiştiriniz.

Elde ettiğiniz son önermeyi sözle ifade ediniz.

d. $\left[\forall x,\ \exists y,\ P(x,y)\right]'\equiv\exists x,\ \forall y,\ P'(x,y)$

olduğunu dikkate alarak, **b** ve **c** 'de yazılan önermelerin olumsuzlarını sözle ifade ediniz.

Etkinlik – 67

A : Rizeliler yardımseverdir.

B : Ayhan Rize'lidir.

önermeleri doğru sayıldığına göre,

C : Ayhan yardımseverdir.

sonucu doğru olmak zorunda mıdır?

Bu soruyu, aşağıdaki sembolleştirmeleri yapıp $A\wedge B$ 'nin C'yi gerektirip gerektirmediğini belirterek yanıtlayınız.

$E=\{x\mid x\ \text{Türkiye'lidir.}\}$

$p(x)$: "***x Rize'lidir.***"

$q(x)$: "***x yardımseverdir.***"

$p(a)$: "***Ayhan Rize'lidir.***"

$q(a)$: "***Ayhan yardımseverdir.***"

$$\left.\begin{array}{l} A:\ \forall x,\ \left[p(x)\Rightarrow q(x)\right] \\ B:\ p(a) \\ C:\ q(a) \end{array}\right\}$$

$a\in E$ (Ayhan Türkiye'lidir.) olduğundan

"$\forall x,\ \left[p(x)\Rightarrow q(x)\right]$ önermesi doğrudur." demek "$p(a)\Rightarrow q(a)$ önermesi doğrudur." demektir.

Buna göre; A, B, C önermeleri,

$$\left.\begin{array}{l} A:\ p(a)\Rightarrow q(a) \\ B:\ p(a) \\ C:\ q(a) \end{array}\right\}$$

biçiminde sembolleştirilebilir.

$A\wedge B$ önermesi C önermesini gerektirir mi?

Etkinlik – 68

A : ***Rizeliler yardımseverdir.***

B : ***Mert yardımseverdir.***

önermeleri doğru sayıldığına göre

C : ***Mert Rize'lidir.***

önermesi doğru olmak zorunda mıdır?

Gerektirme kavramını kullanarak yanıtlayınız.

Etkinlik – 69

A : ***Rizeliler yardımseverdir.***

B : ***Giray Rize'li değildir.***

önermeleri doğru sayıldığına göre

C : ***Giray yardımsever değildir.***

önermesi doğru olmak zorunda mıdır?

Gerektirme kavramını kullanarak yanıtlayınız.

Örnek Problem – 20

30 öğrencisi bulunan 9-A sınıfında 15 öğrencinin görme sorunları nedeniyle gözlük kullandığı, Ali ile Can'ın da bunlardan ikisi olduğu bilinmektedir.

Buna göre;

A: "9-A sınıfının yarısı gözlük kullanmaktadır."

B: "9-A sınıfındaki Ali ve Can gözlük kullanmaktadır."

C: "9-A sınıfındaki Ali gözlük kullanmaktadır."

D: "9-A sınıfındaki en az 10 öğrenci gözlük kullanmaktadır."

E: "9-A sınıfında gözlük kullanan öğrencilerin sayısı 15'tir."

önermelerinin olumsuzlarını yazınız.

Çözüm

A' : "9-A sınıfının yarısının gözlük kullanmakta olduğu, doğru değildir."

A önermesinin olumsuzunun neden,

"9-A sınıfının yarısı gözlük kullanmamaktadır."
olmadığını açıklayalım:

A önermesinin doğru olduğu açıklanmıştır. Bu durumda; ***A'*** önermesi yanlış olmalıdır.

Hâlbuki; ***A*** önermesi doğru iken,

"9-A sınıfının yarısı gözlük kullanmamaktadır." önermesi de doğrudur. Öyleyse; bu önerme, ***A*** önermesinin olumsuzu olamaz.

A önermesi doğru olduğunda,

F: "9-A sınıfında 18 öğrenci gözlük kullanmamaktadır."

G: "9-A sınıfında 20 öğrenci gözlük kullanmaktadır."

H: "9-A sınıfında gözlük kullanan öğrenci sayısı 12'dir."

İ: "9-A sınıfında her öğrenci gözlük kullanır."

önermelerinin her biri yanlıştır.

Ancak, bu önermelerden herhangi birini ***A önermesinin olumsuzu*** sayamayız. ***A önermesinin olumsuzu, A*** önermesinin yanlış olduğu tüm durumları kapsamalıdır.

Buna göre; ***A önermesinin olumsuzu,***

A' : "9-A sınıfının yarısının gözlük kullanmakta olduğu, doğru değildir." olmalıdır.

B' : "9-A sınıfındaki Ali veya Can gözlük kullanmamaktadır."

C' : "9-A sınıfındaki Ali gözlük kullanmamaktadır."

D' : "9-A sınıfındaki en az 10 öğrencinin gözlük kullandığı, doğru değildir."

veya

D' : "9-A sınıfında gözlük kullanan öğrenci sayısı 10'dan azdır."

E' : "9-A sınıfında gözlük kullanan öğrencilerin sayısı 15 değildir."

Etkinlik – 70

Aşağıdaki önermelerin olumsuzlarını yazınız.

A: “Bardağın yarısı su ile doludur.”

B: "9-A sınıfının üç öğrencisi son matematik dersine girmedi."

C: "8’den küçük olan doğal sayıların 4’ü asal sayıdır.”

Alıştırmalar ve Problemler – 2

1. **p(x)**: $2^x - x^2 < 0$ açık önermesi veriliyor.

   Buna göre; aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

   a. $p(-1)$ b. $p\left(\frac{1}{2}\right)$ c. $p(2)$ d. $p(11)$

2. $p(x,y): x^2 + x = y^2 - y$ açık önermesi veriliyor.

   Buna göre; aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

   a. $p(-2,2)$ b. $p(3,4)$ c. $p(5,5)$ d. $p(1,1)$

3. Aşağıdaki açık önermelerin doğruluk kümelerini bulunuz.

   a. $p(x)$: “$x \in N;\ 3x + 6 = 0$”

   b. $q(x)$: “$x \in Z;\ (2x+1)(3x-1)(x-3) = 0$”

   c. $r(x)$: “$x \in Z;\ (x^2 > 4) \Rightarrow (x > 2)$”

   d. $s(x,y)$: “$x, y \in Z;\ x^2 + y^2 = 10$”

   e. $t(x,y)$: “$x, y \in Z;\ (x^2 \le 7) \wedge (y^2 = 4)$”

   f. $u(x,y)$: “$x, y \in R;\ (2x = 5) \wedge (4x + y = 5)$”

4. Uygun evrensel kümeler belirleyerek aşağıdaki önermeleri sembolleştiriniz.

   a. Bazı hayvanlar iki ayaklıdır.

   b. Her taşıt tekerleklidir.

   c. Hiçbir öğrenci tembel değildir.

   d. Her insan karanlıktan korkmaz.

   e. Her horoz ötmez.

   f. Her öğrenci dikkatsizdir.

   g. Bazı dikdörtgenler kare değildir.

   h. Bazı köpekler ısırmaz.

5. “**4. alıştırma**”da verilen önermelerin olumsuzlarını yazınız.

6. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

   a. $\exists x \in R,\ x - 2 < x + 1$

   b. $\forall x \in R,\ x^2 \ge x$

   c. $\forall x \in N,\ \frac{x+2}{x+2} = 1$

   d. $\forall x \in R,\ \frac{2x-1}{2x-1} = 1$

   e. $(\exists x \in N,\ x^2 \ne x) \vee (\forall x \in R,\ x^2 \ne 3)$

   f. $(\exists x \in R,\ x^2 < 1) \wedge (\forall x \in N,\ x^2 > 0)$

   g. $(\exists x \in R,\ x$ asaldır.$) \Rightarrow (\exists x \in R,\ x$ çifttir.$)$

   h. $\exists x \in R,\ (x$ asaldır.$) \Rightarrow (x$ çifttir.$)$

   i. $\forall x \in R,\ (x^2 > 1) \Rightarrow (x > 1)$

   j. $\forall x \in Z,\ (x$ tektir.$) \Leftrightarrow (x + 1$ çifttir.$)$

7. “**6. alıştırma**”da verilen önermelerin olumsuzlarını yazınız.

8. Aşağıda verilen önermelerin olumsuzlarını yazınız.

   a. $\forall x,\ p(x)$

   b. $\exists x,\ p(x)$

   c. $\forall y,\ p'(y)$

   d. $\exists z,\ p'(z)$

   e. $[\forall x,\ p(x)] \wedge [\forall y,\ q(y)]$

f. $[\exists x,\ p(x)] \vee [\forall x,\ q(x)]$

g. $[\forall x,\ p(x)] \Rightarrow [\exists y,\ q(y)]$

h. $[\exists x,\ p(x)] \Leftrightarrow [\forall x,\ q(x)]$

i. $\forall x,\ [p(x) \wedge q(x)]$

j. $\exists x,\ [p(x) \vee q(x)]$

k. $\forall x,\ [p(x) \Rightarrow q(x)]$

l. $\exists x,\ [p(x) \Leftrightarrow q(x)]$

m. $\forall x,\ \exists y,\ p(x,y)$

n. $\exists x,\ \forall y,\ [p(x,\ y) \vee q(x,\ y)]$

o. $[\forall x,\ p(x)] \wedge [\exists x,\ q(x)] \Rightarrow [\exists x, r(x)]$

9. $\left(\exists x \in Z,\ x^2 \text{ tektir.}\right) \Rightarrow \left(\forall x \in Z,\ x^2 + 1 \text{ çifttir.}\right)$

önermesinin doğruluk değerini bulunuz.
Karşıt tersini yazınız.

10. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerleri ile terslerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

a. $\left(\exists x \in N,\ x < 1\right) \Rightarrow \left(\forall x \in Z,\ x^2 > 0\right)$

b. $\left(\exists x \in Z,\ x \text{ tektir.}\right) \Rightarrow \left(\exists x \in Z,\ x^2 \text{ tektir.}\right)$

c. $\left(x \text{ asaldır.}\right) \Rightarrow \left(\exists x \in R,\ x \text{ çifttir.}\right)$

d. $\left(x > 1\right) \Rightarrow \left(\forall x \in R,\ x^2 > 1\right)$

11. Aşağıda verilen önermeleri, uygun evrensel kümeler belirleyerek sembolleştiriniz.

Sembolleştirmeden yararlanarak bu önermelerin olumsuzlarını sözlerle ifade ediniz.

a. 5 ile bölünebilen doğal sayılardan en az biri asaldır.

b. Her gerçel sayının mutlak değeri, negatif olmayan bir gerçel sayıdır.

c. Her öğrenci çalışır, bazıları sınıfını geçer.

d. Her öğrenci her öğretmenine saygı duyar.

12. Aşağıda verilen önermeleri, uygun evrensel kümeler belirleyerek sembolleştiriniz.

Sembolleştirmeden yararlanarak bu önermelerin olumsuzlarını sözlerle ifade ediniz.

a. Her güzelin bir kusuru vardır.

b. Bazı x gerçel sayıları için, $x = y^2$ eşitliğini sağlayan en az bir y gerçel sayısı vardır.

c. Bazı insanlar her sorununu çözebilir.

d. Bazı insanlar her hayvana eziyet eder.

13. $p:\ x - 1 = 0$

$q:\ x + 2 = 0$

$r:\ (x-1)(x+2) = 0$

açık önermeleri veriliyor.

Buna göre; aşağıdaki önermelerden hangileri gerektirmedir?

a. $(p \wedge q) \Rightarrow r$ **b.** $(p \vee q) \Rightarrow r$ **c.** $(p \veebar q) \Rightarrow r$

d. $r \Rightarrow (p \wedge q)$ **e.** $r \Rightarrow (p \vee q)$ **f.** $r \Rightarrow (p \veebar q)$

g. $p \Rightarrow r$ **h.** $r \Rightarrow q$ **i.** $p \Rightarrow (q \veebar r)$

14. *p : x tek sayıdır.*

q : y tek sayıdır.

r : $x + y$ *tek sayıdır.*

s : $x \cdot y$ *tek sayıdır.*

t : x^y *tek sayıdır.*

u: $2x + y$ *tek sayıdır.*

açık önermeleri veriliyor.

Buna göre; aşağıdaki önermelerden hangileri gerektirmedir?

a. $(p \wedge q) \Rightarrow u$ **b.** $(p \vee q) \Rightarrow s$ **c.** $(p \veebar q) \Rightarrow r$

d. $t \Rightarrow (p \wedge q)$ **e.** $r \Rightarrow (p \vee q)$ **f.** $r \Rightarrow (p \veebar q)$

4 – Tanım, Aksiyom, Teorem ve İspat

Etkinlik – 71

Aşağıda, bildiğiniz bazı kavramlar için önerilen tanımlarla, henüz bilmediğiniz bazı kavramların tanımları verilmiştir.

Bildiğiniz kavramlardan hangilerinin tanımları kusurludur? Neden?

Yeni kavramlardan hangilerini anlayamıyorsunuz?

a. Üç doğru parçasından oluşan düzlemsel şekle **üçgen** denir.

b. Ortak noktaları bulunmayan iki doğruya **paralel** doğrular denir.

c. Bir doğrunun farklı iki noktası ile bu noktalar arasında kalan noktalarının birleşimine **doğru parçası** denir.

d. Koordinat düzleminde koordinatları birer tam sayı olan noktalara **kafes noktaları** denir.

e. Bir matriste her terimin yerine bu terimin eş çarpanının konulması ile elde edilen matrisin devriğine bu matrisin **ek matrisi** denir.

f. 2 ile bölünebilen bir sayıya **çift sayı** denir.

Tanım

Bir **terim**in anlamını açıklayan önermeye o terimin **tanımı** denir.

Bir **terim**in tanımı; "**tanımsız terim**"ler de olsa **anlamı bilinen terimler**le, **tanımlanmış terimler**le ve **konuşma dilindeki sözcükler**le yapılır.

İyi bir tanımda; tanımlanan terimin hangi kümeye ait olduğu, bu terimi kümenin diğer elemanlarından ayıran özeliklerin neler olduğu tam olarak belirtilmelidir.

Bir terim ile tanımı tam olarak birbirini karşılayabilmelidir. Öyle ki; terim geçtiğinde o tanım, tanımı geçtiğinde yalnız o terim akla gelmelidir. Örneğin; **açı** teriminin bu temel ilkelere uyularak yapılmış tanımı,

*"Başlangıç noktaları ortak olan iki ışının birleşimine **açı** denir."* biçimindedir.

Bu tanıma göre, "açılar" ışın çiftlerinden oluşan bir kümenin bir alt kümesini oluşturur.

Açıları diğer ışın çiftlerinden ayıran özelikleri, başlangıç noktalarının ortak olmasıdır. Burada "açı" terimi ile bu terimin tanımı olarak verilen ifade birbirini tam olarak karşılar.

► **Tanımsız terim**ler, anlamları bir önerme ile açıklanamayan terimlerdir. Ancak anlamları belirsiz değildir. Böyle terimlerin anlamları bir önermeyle değilse de örneklemeler, benzetmeler ve soyutlamalarla açıklanır.

Örneğin; geometrideki "**nokta**" terimi tanımsızdır.
Ama; masanızın üzerine yaydığınız dikdörtgen biçimindeki kağıdın, kısa ve uzun kenarlarının kesiştiği yerin bir "nokta" olduğunu bilirsiniz.

Tanımlı olsun tanımsız olsun; bir terim öğrenildiğinde o terime karşılık gelen kavram zihinde kesin olarak tasarlanabilir.

Aksiyom

Tanım – 15

*Doğru olduğu apaçık olan veya doğru sayılan; başka önermelerden elde edilemeyen önermeye **aksiyom** denir.*

Mantık ve matematikte terimlerin tanımlarından kaynaklanan, üzerlerine kuramların – *Sayılar kuramı*, *Kümeler kuramı*, *Fonksiyonlar kuramı*, *Öklit geometrisi*, *Lobachevski geometrisi*, *Analitik geometri*, ... gibi matematiksel yapı veya sistemlerin – oturtulduğu temel doğrular varsayılır. Nasıl, bazı terimlerin tanımsız olarak alınmaları bir zorunluluksa; bazı önermelerin de doğru sayılması bir zorunluluktur. Varsayılan bu temel doğrular ait oldukları matematiksel yapının **aksiyom**larıdır. Başka bir deyişle; her aksiyom, ait olduğu sistemin bir temel doğrusudur.

Aksiyomlara **örnekler** verelim:

I. $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ sembollerine yüklenen anlamlar gereği

$p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$ önermelerinin doğruluk değerleri mantık biliminde birer **aksiyom** olarak alınmışlardır.

II. İlköğretim okulunda öğrendiğiniz geometri Öklit geometrisidir. Öklit geometrisi 20'ye yakın aksiyom üzerine kurulmuştur. Bunlardan biri **paralellik aksiyomu**dur. Paralellik aksiyomuna göre;

*"**Bir doğruya dışındaki bir noktadan en fazla bir paralel doğru çizilebilir**."*

Hemen kabul edemeseniz de; **Lobachevski geometrisi** diye bilinen başka bir geometri sisteminde bu aksiyom, *"**Bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel doğru çizilebilir**."* biçimindedir.

Bu iki geometri sisteminin, paralellik aksiyomu dışında kalan bütün aksiyomları ortaktır. Şimdi yadırgıyor olabilirsiniz. Ancak **Lobachevski geometrisi**ni öğrendiğinizde, o sistemin kendine özgü kavramlarıyla, paralellik aksiyomunu kolayca kabulleneceksiniz.

Demek ki; farklı düşünce sistemlerinde – farklı matematiksel yapılarda – çelişiyor gibi görünen doğrular geçerli olabilmektedir.

İlgili konulara girildiğinde, bu farklı düşünce sistemlerinde adları aynı olan kavramların özünde oldukça farklı kavramlar oldukları görülecektir.

III. *"**Eşit niceliklere eşit nicelikler eklendiğinde, eşit toplamlar elde edilir**."*
önermesi aksiyom olarak alınabilir.

"$2=2$'dir.", "$3=3$'tür.", ... gibi apaçık doğrular da dile getirilebilir. Ancak; bunların her biri "**III**" aksiyomu kullanılarak diğerlerinden elde edilebilir. Dolayısıyla aksiyom sayılmazlar. Böyle önermeler, bunların hepsini kapsayacak biçimde "$a=a$'dır." diye ifade edilirse, bu bir aksiyom olabilir.

► Bir matematik sisteminde aksiyomlar,

- birbirlerinden elde edilememeli;
- birbiriyle çelişen sonuçlar vermemeli;
- sistemi tam olarak belirleyebilecek biçimde birbirlerini tamamlayıcı olmalıdırlar.

Bir önerme aksiyomlardan elde edilebiliyorsa, bu önermeye **teorem** adı verildiğini öğrenmiştik.

Teorem

Tanım – 16

*Hipotezi doğru olan ve doğruluğunun, doğru olduğu bilinen önermeler yardımı ile gösterilmesi gereken $p \Rightarrow q$ biçimindeki önermelere **teorem** denir.*

Bu tanımdan ilk anlaşılacak olan, bir teoremin doğru bir önerme olduğudur. Hipotezi doğru olan doğru bir $p \Rightarrow q$ önermesinin hükmü de doğru olacaktır.

O halde; $p \Rightarrow q$ önermesi bir teorem ise hem p hem de q doğru önermelerdir.

$p \Rightarrow q$ önermesi bir teorem iken $q \Rightarrow p$ önermesi de bir teorem ise buna $p \Rightarrow q$ teoreminin ***karşıt teorem***i denir.

Bir matematiksel yapı içerisindeki her doğru önermeyi aksiyomlar ve teoremler sınıflarından birine koymak, verdiğimiz tanımlara göre yanlış olmaz. Ancak; matematikte ***aksiyom*** ve ***teorem*** denilince akla ***genel doğruların ifadesi olan önerme***ler gelmelidir. Burada, verdiğimiz tanımlarda bir eksiklik aramak gerekir. Zaten tanımlarımız kusursuz olsaydı, böyle açıklamalara gerek kalmazdı.

Tanımımızda eksik kalan kısmı bir örnekle tamamlamaya çalışalım. Bildiğimiz Pisagor teoremi,

"Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir." biçimindedir.

"Bir dik üçgenin dik kenarlarının uzunlukları 3 birim ve 4 birim ise hipotenüsünün uzunluğu 5 birimdir." önermesi de Pisagor teoreminin bir özel duruma uygulanmasını dile getirir.

Matematikte böyle önermelere teorem denilmez. Olsa olsa, teoremin bir **özelleme**si ya da **yorumlama**sı denilebilir.

Başka bir örnek verelim:

"Bir üçgende iki iç açı eş ise karşılarındaki kenarlar da eştir." önermesi bir teoremdir.

"Bir üçgende iç açılar eş ise kenarlar da eştir." önermesi de bir teoremdir. Ancak ikincisi ilkinin bir sonucudur.

Böyle sadeleştirmelerle, bir matematiksel yapı içerisindeki teoremler belli bir sayıya indirilebilir.

Demek ki; matematikteki her doğru önerme aksiyom ya da teorem olarak alınmaz. Sayısız doğru önerme, aksiyom ve teoremlerin **sonuç**ları ya da **özelleme**leri durumundadır.

Tanım – 17

*Bir teoremin doğruluğunun gösterilmesine o teoremin **ispatlanması** (kanıtlanması) denir.*

Bir teorem ispatlanırken hipotezden yola çıkılarak tanımlar, aksiyomlar ve önceden ispatlanmış teoremler; her biri sonrakini gerektirecek biçimde sıralanır. Sonunda hükme varılır.

Bu akıl yürütme zincirine **ispat** (kanıt) adı verilir.

Etkinlik – 72

Aşağıda verilen önermeler birer teoremdir.

Bu teoremlerin hipotezlerini ve hükümlerini belirtiniz.

Teoremleri $p \Rightarrow q$ biçiminde ifade ediniz.

a. "***Bir üçgende kenarlar eş değilse büyük kenar karşısında büyük açı bulunur***."

b. "***Çarpımı sıfır olan iki gerçel sayıdan en az biri sıfırdır***."

c. "***İki tek sayının toplamı çifttir***."

d. "***Bir ikizkenar üçgende tabana ait yükseklik tabanı ortalar***."

e. "***İki tek sayının çarpımı tektir***."

Etkinlik – 73

Etkinlik–72'de verilen teoremlerin karşıtlarını yazınız.

Bunlardan hangileri teoremdir?

İspatlama Yöntemleri

Matematikteki ispatlama yöntemleri aşağıdaki çizelgede verildiği gibi sınıflandırılabilir:

İspatlama Yöntemleri

- Tümevarım yöntemi
- Tümdengelim yöntemleri
  - Doğrudan ispatlama yöntemi
  - Dolaylı ispatlama yöntemleri
    - Olmayana ergi yöntemi
    - Deneme yöntemi
    - Aksine örnek verme yöntemi

Tümevarım Yöntemi

n bir sayma sayısı olmak üzere; sayma sayıları ile ilgili açık önermeler, $\mathbf{p(n)}$ ile gösterilebilir.

Örneğin;

$$p(n):\ "n \in N^{+};\ 1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}"$$

önermesi sayma sayıları ile ilgili bir açık önermedir.

Bu açık önermeyi doğru yapan n değerlerinin kümesi D olsun. $D \subset N^{+}$ olduğu açıktır. $\forall n \in N^{+}$ için $p(n)$ doğru ise $D = N^{+}$ olur.

$p(n)$ önermesi her n doğal sayısı için değil de, a bir sayma sayısı olmak üzere, $n \geq a$ için doğru olabilir. Bu durumda; $n \geq a$ sayma sayılarının kümesi N_a ile gösterilirse, $D = N_a$ olur.

Tümevarım yöntemi ile ispat şöyle yapılır:

I. $p(a)$'nın doğru olduğu gösterilir.

II. $p(k)$'nın doğru olduğu varsayıldığında $p(k+1)$'in de doğru olacağı gösterilir.

Böylece; $p(a)$ doğru iken $p(a+1)$'in de doğru olacağı, $p(a+1)$ doğru iken $p(a+2)$'nin de doğru olacağı, … , $p(n-1)$ doğru iken $p(n)$'in de doğru olacağı gösterilmiş olur.
Bu da; $D = N_a$ olması demektir.

Örnek Problem – 21

$p(n):$ "$n \in N^+;\ 1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$"

önermesinin doğruluğunu, tümevarım yöntemi ile gösterelim:

I. $p(1)$ doğru mu?

$p(1):\ 1=\dfrac{1.2}{2}$ olup $p(1)$ doğrudur.

II. $p(k)\Rightarrow p(k+1)$ doğru mu?

En azından; $k=1$ için doğru olduğunu bildiğimizden,

$p(k):$ "$1+2+3+...+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$" eşitliğini doğru sayabiliriz. $p(k+1)$'in doğru olması,

$p(k+1):$ "$1+2+3+...+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$"

olmasını gerektirir.

Doğru olduğunu varsaydığımız $p(k)$ eşitliğinden, doğru düşünerek, $p(k+1)$ eşitliğini elde edebilirsek, $p(k+1)$ eşitliğinin de doğru olduğunu göstermiş oluruz.

$p(k)$ eşitliğinde, iki tarafa $k+1$ ekleyelim.

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$\Rightarrow 1+2+3+...+k+(k+1)=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)$$

$$\Rightarrow 1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$\Rightarrow p(k+1)$ doğrudur.

O hâlde; $\forall n \in N^+$ için $p(n)$ doğrudur.

$D=N^+$'dır.

Etkinlik – 74

Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu tümevarım yöntemiyle ispatlayınız.

a. $p(n):$ "$n\in N^+;\ 1+3+5+...+(2n-1)=n^2$"

b. $q(n):$ "$n \in N_7=\{7,8,9,...\};\ 3^n<n!$"

Doğrudan İspatlama Yöntemi

$(\boldsymbol{p}\Rightarrow \boldsymbol{q})\wedge(\boldsymbol{q}\Rightarrow \boldsymbol{r})$ önermesinin $\boldsymbol{p}\Rightarrow\boldsymbol{r}$ önermesini mantıksal olarak gerektirdiğini hatırlayınız.

Bu yöntemle $\boldsymbol{p}\Rightarrow\boldsymbol{q}$ teoremini ispatlamak için, gerekli sayıda $\boldsymbol{p}\Rightarrow \boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_1}\Rightarrow\boldsymbol{p_2}$, ..., $\boldsymbol{p_n}\Rightarrow\boldsymbol{q}$ önermeleri bulunur.

Bu önermelerin doğru olması $\boldsymbol{p}\Rightarrow\boldsymbol{q}$ önermesinin doğru olmasını gerektirecektir.

Art arda gerektirmeler; ispat yapılırken kısaca,

$\boldsymbol{p}\Rightarrow\boldsymbol{p_1}\Rightarrow\boldsymbol{p_2}\Rightarrow\boldsymbol{p_3}\Rightarrow ...\Rightarrow\boldsymbol{q}$

ya da

$\boldsymbol{p}$

$\Rightarrow \boldsymbol{p_1}$

$\Rightarrow \boldsymbol{p_2}$

$\Rightarrow \boldsymbol{p_3}$

.
.
.

$\Rightarrow \boldsymbol{q}$

biçiminde gösterilir.

Örnek Problem – 22

"İki tek sayının çarpımı bir tek sayıdır."

teoremini **doğrudan ispatlama yöntemi** ile ispatlayınız.

Çözüm

Teoremin $\boldsymbol{p}\Rightarrow\boldsymbol{q}$ biçimindeki ifadesi

*"**a ve b tek sayı ise $a\cdot b$ tektir**."* olur.

"a ve b tek sayı"

$\Rightarrow$ "$(a=2k+1)\wedge(b=2m+1);\ k,\ m\in Z$"

$\Rightarrow$ "$a\cdot b=(2k+1)\cdot(2m+1)$"

$\Rightarrow$ "$a\cdot b=4km+2k+2m+1$"

$\Rightarrow$ "$a\cdot b=2\underbrace{(2km+k+m)}_{n\in Z}+1$"

$\Rightarrow$ "$a\cdot b=2n+1$"

$\Rightarrow$ "$a\cdot b$ tektir."

Dolaylı İspatlama Yöntemleri

I. Olmayana Ergi Yöntemi

$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$

denkliğini hatırlayınız.

Bu yöntemde, $p \Rightarrow q$ teoremini ispatlamak yerine bunun dengi olan $q' \Rightarrow p'$ teoremi ispatlanır.

Doğal olarak, $q' \Rightarrow p'$ teoreminin ispatlanmasının $p \Rightarrow q$ teoreminin ispatlanmasından daha kolay olduğu durumlarda bu yöntem seçilmelidir.

Örnek Problem – 23

"Karesi tek olan doğal sayı tektir."
teoremini **olmayana ergi yöntemi** ile ispatlayınız.

Çözüm

Verilen önerme,

$p \Rightarrow q$: "$n \in N$, $(n^2$ tektir.$) \Rightarrow (n$ tektir.$)$"

biçimindedir.

"$p \Rightarrow q$" önermesinin karşıt tersi,

$q' \Rightarrow p'$: "$n \in N$, $(n$ çifttir.$) \Rightarrow (n^2$ çifttir.$)$" olur.

Demek ki;

$q' \Rightarrow p'$ teoremini ispatlayacağız.

"$n \in N$, $(n$ çifttir.$)$"

$\Rightarrow$ "$n = 2k;\ n,k \in N$"

$\Rightarrow$ "$n^2 = (2k)^2$"

$\Rightarrow$ "$n^2 = 4k^2$"

$\Rightarrow$ "$n^2 = 2(2k^2)$"

$\Rightarrow$ "$n^2 = 2m$" $(2k^2 = m,\ m \in N)$

$\Rightarrow$ "n^2 çifttir."

Bu sonucu şöyle açıklarız:

n çift olsaydı, n^2 çift olurdu.
Hâlbuki; n^2 tektir.
O hâlde; n tektir.

II. Çelişki Yöntemi

$(p \Rightarrow q)' \equiv p \wedge q'$

denkliğini hatırlayınız.

Bu yöntemde "$p \wedge q'$" önermesinin bir çelişme olduğu gösterilir.

Böylece; "$p \Rightarrow q$" önermesinin doğru olduğu gösterilmiş olur.

Örnek Problem – 24

$x \in R,\ (3x + 4 = 28) \Rightarrow (4x + 3 \neq 19)$

önermesinin doğru olduğunu **çelişki yöntemi** ile ispatlayınız.

Çözüm

$p \Rightarrow q$: "$x \in R,\ (3x + 4 = 28) \Rightarrow (4x + 3 \neq 19)$"

$\Rightarrow p \wedge q'$: "$x \in R,\ (3x + 4 = 28) \wedge (4x + 3 = 19)$"

$\Rightarrow p \wedge q'$: "$x \in R,\ (3x = 24) \wedge (4x = 16)$"

$\Rightarrow p \wedge q'$: "$x \in R,\ (x = 8) \wedge (x = 4)$"

$\Rightarrow p \wedge q' \equiv 0$ olur.

Buna göre; $p \Rightarrow q$ önermesi doğrudur.

Örnek Problem – 25

Öklit geometri sisteminin aksiyomlarından biri

r: "Farklı iki noktadan bir tek doğru geçer."

önermesidir.

Bu aksiyoma dayanarak,

s: "Farklı iki doğrunun en fazla bir ortak noktası vardır."

teoremini **çelişki yöntemi** ile ispatlayınız..

Çözüm

s önermesi,

s: "d_1 ve d_2 farklı iki doğru ise $d_1 \cap d_2$ kümesi sıfır veya bir elemanlıdır."

biçiminde ifade edilebilir.

Buna göre;

hipotez

p: "***d_1 ve d_2 farklı iki doğrudur.***" önermesi,

hüküm

q: "***$d_1 \cap d_2$ kümesi sıfır veya bir elemanlıdır.***"

önermesidir.

q' önermesi,

q' : "***$d_1 \cap d_2$ kümesi en az iki elemanlıdır.***"

olur.

q' önermesine göre, d_1 ve d_2 doğrularının en azından A ve B gibi farklı iki ortak noktası vardır.

r aksiyomuna göre, A ve B gibi farklı iki noktadan bir tek doğru geçeceğinden, ***p*** ile q' önermeleri çelişir.

Öyleyse;

*"**Farklı iki doğrunun en fazla bir ortak noktası vardır.**"*

önermesi doğrudur.

III. Deneme Yöntemi

Bir açık önermenin evrensel kümesi sonlu sayıda elemandan oluşmuşsa, bu önermenin bu elemanların her biri için doğru olup olmadığı tek tek deneyerek anlaşılabilir.

Örnek Problem – 26

*"**Onluk sayma düzeninde 3'ten büyük rakamların kareleri iki basamaklıdır.**"*

önermesinin doğru olduğunu **deneme yöntemi** ile gösteriniz.

Çözüm

4 ile 9 arasındaki rakamların kareleri de 4^2 ile 9^2 arasında olacağından, yalnız 4 ile 9 rakamlarını denemek yeter.

$4^2 = 16$ ve $9^2 = 81$

olduğundan önerme doğrudur.

IV. Aksine Örnek Verme Yöntemi

Bu yöntem genellikle bir önermenin yanlış olduğunu göstermek için kullanılır.

Örnek Problem – 27

*"**Tam sayıların kareleri birer çift sayıdır.**"*

önermesinin yanlış olduğunu **aksine örnek verme yöntemi** ile gösteriniz.

Çözüm

5 bir tam sayıdır.

$5^2 = 25$ olup 25 bir çift sayı değildir.

O hâlde, verilen önerme yanlıştır.

Etkinlik – 75

Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu **doğrudan ispat yöntemi**yle gösteriniz.

a. "$x \in R$, $2x + 3 = 11$ ise $3x + 2 = 14$'tür."

b. "İki çift sayının çarpımı 4 ile tam bölünür."

c. "Bir tam sayının karesinin 4 ile bölümündeki kalan ya 0 ya da 1'dir."

Etkinlik – 76

Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu **olmayana ergi yöntemi** ile gösteriniz.

a. "***İki doğal sayının çarpımı çift ise bu sayılardan en az biri çifttir.***"

b. "$x \in R$, $6x - 3 = 27$ ise $x \neq 3$ ***'tür.***"

c. "$x \in R$, $x = -3$ ise $5x + 1 = -14$ ***'tür.***"

Etkinlik – 77

Etkinlik–76'teki önermelerin doğruluğunu **çelişki yöntemi** ile gösteriniz.

Etkinlik – 78

Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu **deneme yöntemi** ile gösteriniz.

a. "***Karesi 4 basamaklı olan en küçük doğal sayı 32'dir.***"

b. "$\forall x \in \{3, 4, 5, 6\}, \ x^2 - 7x < 6$"

c. "***64'ün 4'ten küçük olmayan bölenleri 4 ile tam bölünür.***"

Etkinlik – 79

Aşağıdaki önermelerin yanlış olduğunu **aksine örnek verme yöntemi** ile gösteriniz.

a. "***Tek sayı olan rakamlar asaldır.***"

b. "***Karesinin 2 fazlası tek olan sayılar tektir.***"

c. "***Her x, y*** $\in R$ ***için,*** $x^2 < y^2$ ***ise*** $x < y$ ***'dir.***"

d. "$(5 - 2x \neq 9) \Rightarrow (x \neq 1)$"

Alıştırmalar ve Problemler – 3

1. Aşağıda verilen tanımlardan her biri kusurludur. Kusurları belirtiniz ve düzeltiniz.

a. *"Dört doğru parçasından oluşan düzlemsel şekle **dörtgen** denir."*

b. *"Üç noktanın belirttiği doğru parçalarının birleşimine **üçgen** denir."*

c. *"$2n+1$ biçimindeki bir sayıya **tek sayı** denir."*

d. *"Matematikte, doğru olan önermeye **teorem** denir."*

2. Aşağıdaki teoremlerin hipotez ve hükümlerini ayırarak bunları $p \Rightarrow q$ biçiminde ifade ediniz.

a. *"Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir."*

b. *"Bir doğal sayının karesi bu sayıdan küçük değildir."*

c. *"Bir dik üçgenin alanı, dik kenarların uzunluklarının çarpımının yarısına eşittir."*

d. *"En az biri çift olan iki doğal sayının çarpımı çifttir."*

3. Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu tümevarım yöntemi ile ispatlayınız.

a. $n \in N^+; \ 2^{n-1} \leq n!$

b. $n \in N^+; \ \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

c. $n \in N^+; \ 1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

d. $n \in N^+; \ 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \dfrac{3n^2 - n}{2}$

4. Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu hem **doğrudan ispat yöntemi** ile hem **çelişki yöntemi** ile hem de **olmayana ergi yöntemi** ile gösteriniz.

a. "$x = 7$ ise $23 - 2x = 9$'dur."

b. "$4x - 5 = 31$ ise $x = 9$'dur."

c. "İki tek sayının toplamı çifttir."

d. "3'ün tam katı olan iki tam sayının çarpımı 9'un tam katı olur."

5. Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu uygun bulduğunuz yöntemlerle gösteriniz.

a. "$x \in R, \ 3x - 5 = 7$ ise $x = 4$'tür."

b. "$x \in R, \ x = 4$ ise $5x + 9 \neq 24$'tür."

c. "$x \in R, \ 5 - 2x \neq 9$ ise $x \neq -2$'dir."

d. "$x, y \in R, \ x^2 - 4xy + 4y^2 \neq 4$ ise $x - 2y \neq 2$'dir."

6. Aşağıdaki önermelerin yanlış olduğunu aksine örnek verme yöntemi ile gösteriniz.

a. "Bir gerçel sayının karesi kendisinden büyüktür."

b. "Kareleri eşit olan gerçel sayılar, birbirine eşittir."

c. "İki gerçel sayının toplamı pozitif ise bu sayıların her biri pozitiftir."