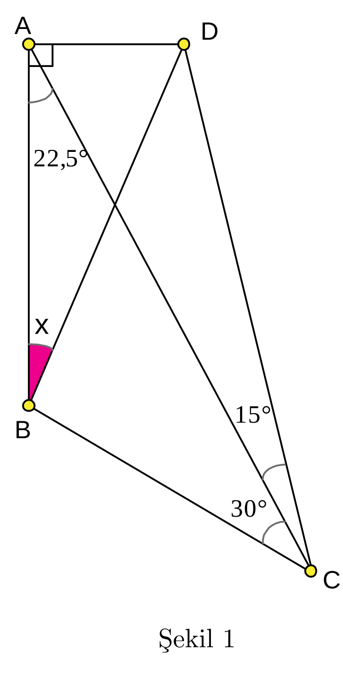
Bir Sangakudan Açı Sorusuna

Abdilkadir ALTINTAŞ
apollonius03@gmail.com
18 Ocak 2015

Bu yazının esin kaynağı "Geometri Günlüğü" sitesindeki 240 no lu sangaku problemi oluşturmaktadır. Sayın Hatice MANKAN büyük bir sabır örneği göstererek istenen eşitliği ispatlamıştır. Sayın Ayhan YANAĞLIBAŞ hocamız soru için daha kısa bir yol ararken Problem 1 deki açı sorusu ile karşılaşmış, x açısının $22,5^o$ olması durumunda eşitliğin geçerli olduğunu göstermiştir. Bu yazıda Problem 1 deki x açısının $22,5^o$ olduğunu göstereceğiz.

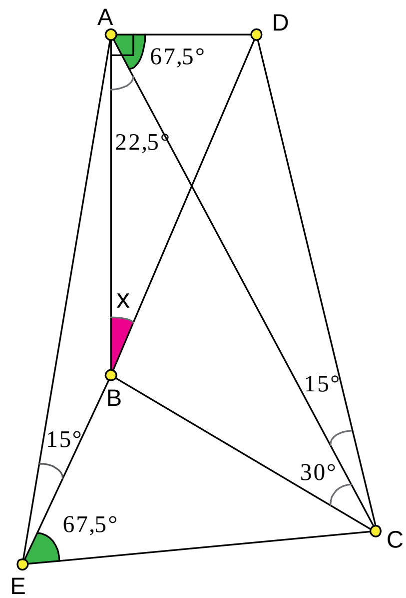
Katkıda Bulunanlar. Sayın Hatice MANKAN,Sayın Ayhan YANAĞLIBAŞ, Sayın Ali ERGİN, Sayın Adem ÇİL.

Problem 1.(Ayhan YANAĞLIBAŞ) . Bir $ABCD$ dörtgeninde $AD \perp AB, m(\angle BCA) = 30^o, m(\angle ACD) = 15^o, m(\angle BAC) = 22,5^o$ olduğuna göre, $m(\angle ABD) = x =$?(Şekil 1)



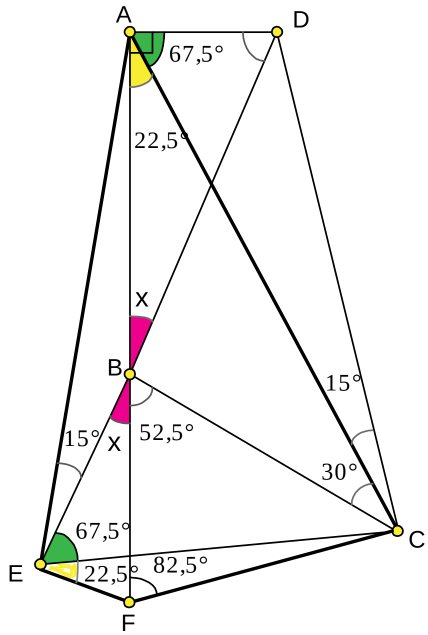
Şekil 1

Çözüm.(Ali ERGİN-Abdilkadir ALTINTAŞ) DB yi B yönünde uzatıp, $AECD$ kirişler dörtgenini oluşturalım. $m(\angle DEC) = m(\angle DAC) = 67,5^o, m(\angle AED) = 15^o$ olur. (Şekil 2)



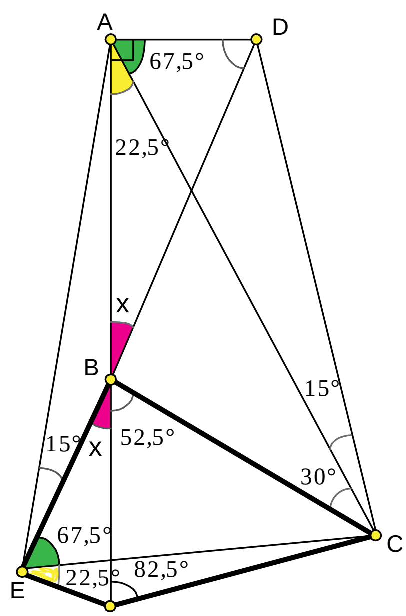
Şekil 2

Şimdi AB yi B yönünde uzatıp, $AEFC$ kirişler dörtgenini oluşturalım. $m(\angle CEF) = 22,5^o, m(\angle FBC) = 52,5^o$, $m(\angle AFC) = m(\angle AEC) = 82,5^o$ olur. (Şekil 3)



Şekil 3

Şimdi $BEFC$ dörtgenine bakalım. (Şekil 4)

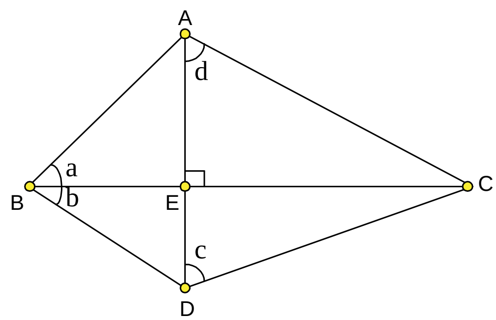


Şekil 4

Teorem. (Ali ERGİN) Şekil 5 teki ABCD dörgeninde köşegenler dik ise,

$$\tan a.\cot b.\cot c.\tan d = 1$$

dir. (Şekil 5)



Şekil 5)

İspat. Dik üçgenlerden

$$\begin{aligned}\tan a &= \frac{AE}{BE}\\ \cot b &= \frac{BE}{ED}\\ \cot c &= \frac{ED}{EC}\\ \tan d &= \frac{EC}{AE}\end{aligned}$$

dir. Bu eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa $\tan a.\cot b.\cot c.\tan d = 1$ elde edilir. Teoremin tersi de doğrudur. Şekil 5 teki $ABCD$ dörtgeninde $\tan a.\cot b.\cot c.\tan d = 1$ ise dörtgenin köşegenleri dik kesişir. Şekil 4 teki $BEFC$ dörtgeninde köşegenlerin dik kesiştiğini gösterelim.

$$\tan a.\tan(60-a).\tan(60+a) = \tan 3a$$

özdeşliğini kullanalım.

$$\begin{aligned}\tan a.\tan(60-a).\tan(60+a) &= \tan 3a\\ &\Rightarrow \cot(90-a).\cot(30+a).\cot(30-a) = \tan 3a\\ &\Rightarrow \frac{1}{\tan(90-a)}.\frac{1}{\tan(30+a)}.\frac{1}{\tan(30-a)} = \tan 3a\\ &\Rightarrow \tan 3a.\tan(90-a).\tan(30+a).\tan(30-a) = 1\end{aligned}$$

dir. Son eşitlikte $a = 22,5^o$ alınırsa,

$$\tan 67,5^o.\tan 67,5^o.\tan 52,5^o.\tan 7,5^o = 1 \quad (\text{ ii})$$

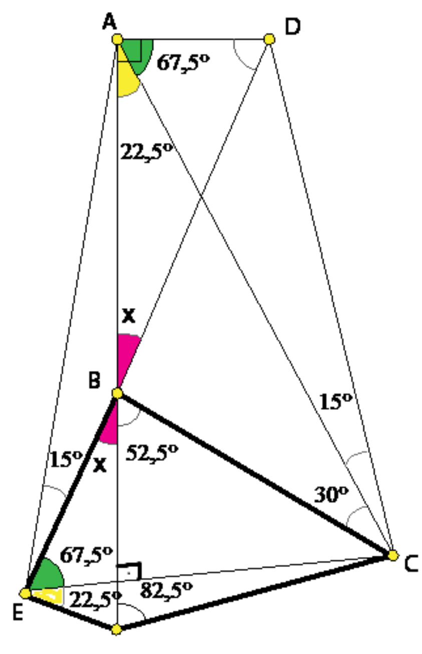
bulunur.

$$\begin{aligned} & \tan 67,5^o.\cot 22,5^o.\cot 82,5^o.\tan 52,5^o \\ = \quad & \tan 67,5^o.\tan(90-22,5^o).\tan(90-82,5^o).\tan 52,5^o \\ \Rightarrow \quad & \tan 67,5^o.\tan 67,5^o.\tan 7,5.^o \tan 52,5^o \end{aligned}$$

(ii) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \tan 67,5^o.\cot 22,5^o.\cot 82,5^o.\tan 52,5^o &= \tan 67,5^o.\tan 67,5^o.\tan 7,5.^o \tan 52,5^o \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde Şekil 4 teki $BEFC$ dörtgeninin köşegenleri dik kesişir ve x açısı $22,5^o$ bulunur. (Şekil 6)



Şekil 6