Sinüs Kuralı

Uygulamaları

Halit Çelik

Mayematik Öğretmeni

2015

Çeşitli İspatlar

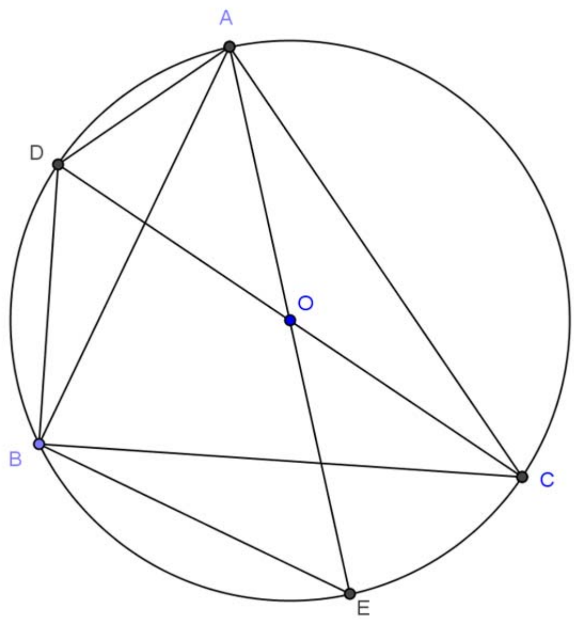
1.1. Sinüs Kuralı:

Bir ABC üçgeninin iç açıları sırasıyla **A, B ve C,** bu açıların karşısındaki kenar uzunlukları a, b ve c olarak gösterilirse bunlar arasında;

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Orantısı vardır.

İspat:



ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O, yarıçap uzunluğu R olsun. DBC, DAC ve AEB üçgenlerini oluşturalım. [DC] çap olduğundan m(DBC)=m(DAC)=m(EBC)=90 ve aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eşit olduğundan m(BAC)=m(BDC), m(ADC)=m(ABC), m(AEB)=m(ACB) olur. Şekilde $|BC| = a, |AC| = b \; ve \; |AB| = c$ dir. DBC üçgeninde

$$\sin D = \frac{|BC|}{|DC|} \; den \; \frac{a}{\sin A} = 2R$$

yazılır. Benzer şekilde DAC üçgeninde

$$\sin(ADC) = \frac{|AC|}{|DC|} \; den \; \frac{b}{\sin B} = 2R$$

AEB üçgeninde

$$\sin(AEB) = \frac{|AB|}{|AE|} \; den \; \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Olur. Bu üç orantıdan;

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Sonucuna ulaşılır.

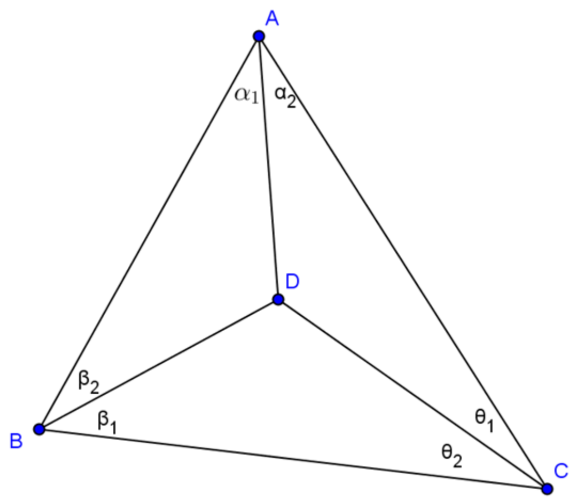
1.2. Teorem:

Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde alınan bir nokta D olsun. m(DAB)=α_1, m(DAC)=α_2, m(DBA)=β_2, m(DBC)=β_1, m(DCB)=θ_2, m(DCA)=θ_1 olmak üzere

$$sin\alpha_1 sin\beta_1 sin\theta_1 = sin\alpha_2 sin\beta_2 sin\theta_2$$

Eşitliği vardır.

İspat:



$|BC| = a, |AC| = b \; ve \; |AB| = c$ diyelim ve ADB, ADC ve BDC üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım.

$$\frac{|DB|}{sin\alpha_1} = \frac{|DA|}{sin\beta_2}, \frac{|DC|}{sin\alpha_2} = \frac{|DA|}{sin\theta_1}, \frac{|DC|}{sin\beta_1} = \frac{|DB|}{sin\theta_2}$$

Taraf tarafa çarpalım:

$$\frac{|DB|}{sin\alpha_1} . \frac{|DA|}{sin\beta_1} . \frac{|DC|}{sin\theta_1} = \frac{|DC|}{sin\alpha_2} . \frac{|DA|}{sin\beta_2} . \frac{|DB|}{sin\theta_2}$$

Gerekli sadeleştirilmeler yapılırsa

$$sin\alpha_1 sin\beta_1 sin\theta_1 = sin\alpha_2 sin\beta_2 sin\theta_2$$

Sonucu elde edilir.

1.3. Teorem:

$4sinxsin(60-x)\sin(60+x)=sin3x$

Eşitliği vardır.

İspat:

Bu ispat Ali Ergin Ustaya aittir.

$$\begin{aligned} sin3x &= \sin(2x+x) = sin2xcosx + cos2xsinx \\ &= 2sinxcosxcosx + (1-2sin^2x)sinx \\ &= 2sinx(1-sin^2x) + sinx - 2sin^3x \\ &= 3sinx - 4sin^3x \end{aligned}$$

Olduğu biliniyor. Ayrıca;

$$\begin{aligned} \sin(a+b)\sin(a-b) &= sin^2acos^2b - cos^2asin^2b \\ &= sin^2a(1-sin^2b) - (1-sin^2a)sin^2b \\ &= sin^2a - sin^2b \end{aligned}$$

Olur. Burada a=60 yazılırsa

$$\sin(60-b)\sin(60+b) = \frac{3}{4} - sin^2b$$

b=x yazalım ve eşitliğin her iki yanını 4sinx ile çarpalım:

$$4sinxsin(60-x)\sin(60+x) = 3sinx - 4sin^3x = sin3x$$

Olur.

1.4. Teorem:

$sin18 = 2sin48sin12$

Eşitliği vardır.

İspat:

Bu ispat Mustafa Yağcı Ustaya aittir.

$$sin72 = cos18$$
$$2sin36cos36 = cos18$$
$$sin36cos36 = \frac{1}{2}cos18$$
$$2sin18cos18cos36 = sin30cos18$$
$$2sin18cos36 = sin30$$
$$sin54 - sin18 = sin30$$
$$sin54 - sin30 = sin18$$
$$2sin12cos42 = sin18$$
$$sin18 = 2sin12sin48$$

Olarak bulunur.

2. Çözüm:

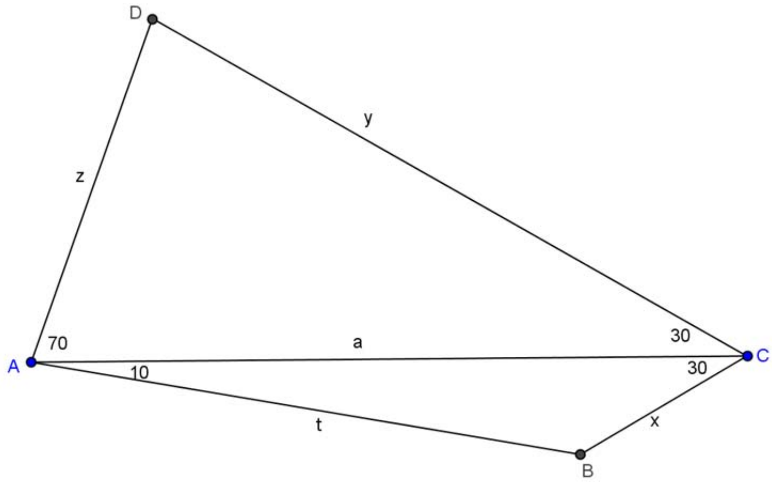
Teorem 1.3 de x yerine 12 yazılırsa $4sin12sin48sin72 = sin36$ olur.

$$4sin12sin48cos18 = 2sin18cos18$$

Buradan $2sin12sin48 = sin18$ sonucuna ulaşılır.

Soru:

Aşağıdaki şekilde $x(y+z+t) = 225$ ise t kaçtır.



Çözüm:

Orantının özellikleri ve üçgenlerde sinüs kuralı sorunun çözümünü sağlayacaktır.

DAC üçgeninde sinüs kuralı $\dfrac{y}{\sin 70} = \dfrac{z}{\sin 30} = \dfrac{a}{\sin 80}$ olur. Orantının özellikleri kullanılarak

$\dfrac{y+z}{\sin 70 + \sin 30} = \dfrac{a}{\sin 80}$ *ve* $\dfrac{y+z}{2\sin 50\cos 20} = \dfrac{a}{2\sin 40\cos 40}$ yazılır.

$\dfrac{y+z}{\cancel{2\cos 40\cos 20}} = \dfrac{a}{2\cdot \cancel{2}\sin 20\cancel{\cos 20}\,\cancel{\cos 40}}$ *ve* $y+z = \dfrac{a}{2\sin 20}$ *den* $a = 2(y+z)\sin 20$ olarak bulunur.

ABC üçgeninde $\dfrac{x}{\sin 10} = \dfrac{t}{\sin 30} = \dfrac{a}{\sin 40}$ *den* $\dfrac{x}{\sin 10} = \dfrac{t}{\sin 30} = \dfrac{2(y+z)\sin 20}{2\sin 20\cos 20}$ yazılır gerekli sadeleştirmeler yapılır ve orantının özellikleri uygulanırsa

$\dfrac{x}{\sin 10} = \dfrac{t}{\sin 30} = \dfrac{y+z}{\cos 20}$ *den* $\dfrac{x}{\sin 10} = \dfrac{t+y+z}{\sin 30 + \sin 70}$ yazılır. $y+t+z = \dfrac{225}{x}$ yerine yazılırsa

$\dfrac{x}{\sin 10} = \dfrac{\frac{225}{x}}{2\sin 50\cos 20}$ *ve* $x^2 = \dfrac{225\sin 10}{2\cos 40\cos 20}$ ifadesi elde edilir.

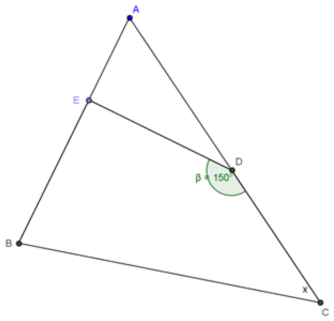
Yukarıda $\dfrac{x}{\sin 10} = \dfrac{t}{\sin 30}$ ifadesinin her iki yanının karesi alınırsa $x^2 = \dfrac{t^2\sin^2 10}{\sin^2 30} = 4t^2\sin^2 10$ olur. Bu değer yukarıda yerine yazılırsa

$4t^2\cancel{\sin^2 10} = \dfrac{225\cancel{\sin 10}}{2\cos 40\cos 20}$ *den* $t^2 = \dfrac{225}{4\cdot 2\sin 10\cos 20\cos 40}$ elde edilir. İfadenin pay ve paydasi cos10 la çarpılırsa $t^2 = \dfrac{225\cos 10}{4\cdot 2\sin 10\cos 10\cos 20\cos 40} = \dfrac{225\cos 10}{2\cdot 2\sin 20\cos 20\cos 40}$

$t^2 = \dfrac{225\cos 10}{2\cdot \sin 40\cos 40} = \dfrac{225\sin 80}{\sin 80}$ olur. Buradan $t^2 = 225$ *ve* $t = 15$ olarak bulunur.

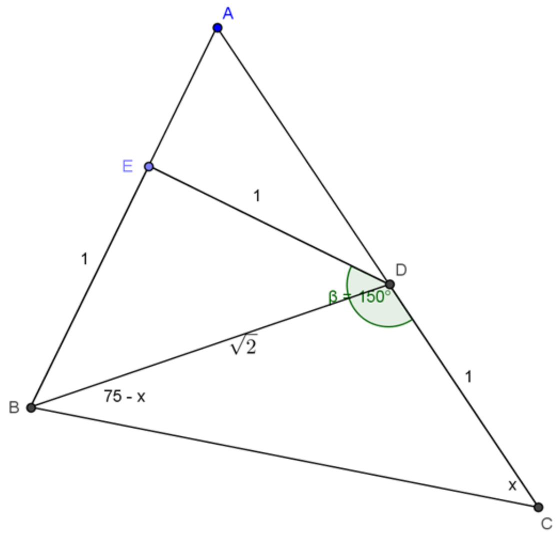
Soru:

Yandaki şekilde $|BE| = |ED| = |DC|\ \ ve\ m(\widehat{EDC}) =$ 150 olduğuna göre ACB açısının ölçüsü kaç derecedir.



Çözüm:

[BD] yi çizelim. $|BE| = |ED| = |DC| = 1$ denirse $|BD| = \sqrt{2}$ olur.



m(BDA)=75 olduğundan m(DBC)=75 – x olur. Bu durmda DBC üçgeninde sinüs kuralı uygulanırsa

$$\frac{\sqrt{2}}{sinx} = \frac{1}{\sin(75 - x)}$$

$$\frac{\sin(75 - x)}{sinx} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ve\ \frac{\sin(75 - x)}{sinx} = cos45$$

$$\cos(15 + x) = sinxcos45$$

$$\sin(75 - x) = \frac{1}{2}(\sin(x + 45) + \sin(x - 45))$$

$$2\sin(75 - x) = \sin(x + 45) + \sin(x - 45)$$

$$\sin(75 - x) - \sin(x + 45) = \sin(x - 45) - \sin(75 - x)$$

$$2\mathrm{cos}60\,\sin(15 - \mathrm{x}) = 2\mathrm{cos}(15\mathrm{sin}(\mathrm{x} - 60)$$

$$cos60 = \frac{1}{2}$$

olduğundan yukarıdaki ifade

$$\sin(15 - x) = 2cos15\sin(x - 60)$$

Haline gelir eşitliğin her iki yanı sin15 ile çarılırsa

$$\sin(15 - x)\, sin15 = sin30 \sin(x - 60)$$

$$\frac{1}{2}(\cos(x) - \cos(30 - x)) = \frac{1}{2}(\cos(90 - x) - \cos(x - 30))$$

Cos(30 – x) = cos(30 – x) olduğundan gerekli sadeleştirme yapılırsa

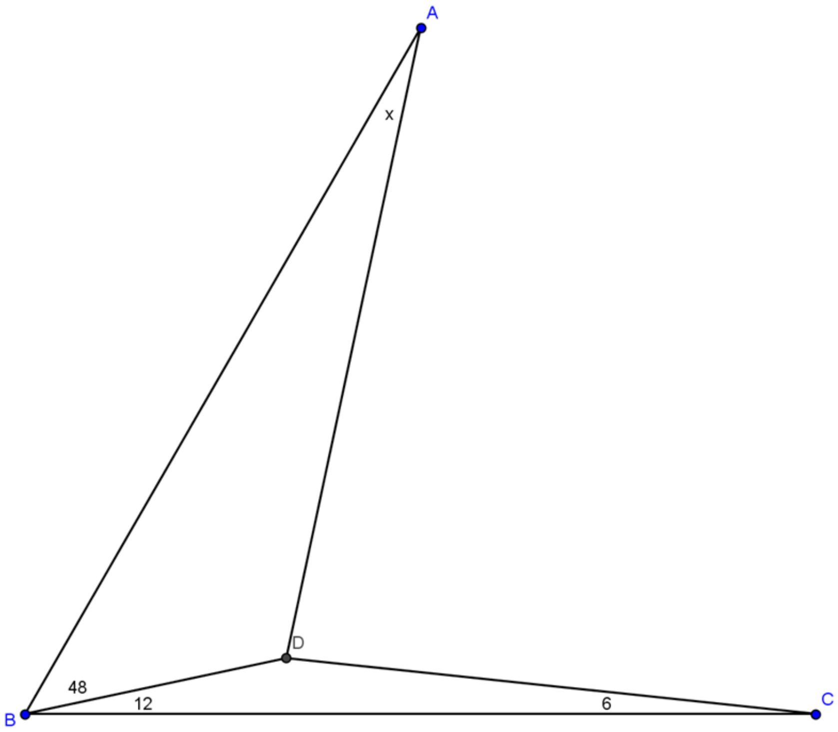
$$\cos(x) = \cos(90 - x)$$

den

x = 90 – x ve 2x = 90 dan x = 45

olarak bulunur.

Soru:



Şekilde $|AB| = |BC|$,
m(ABD)=48,
m(DBC)=12,
m(BCD)=6
olduğuna göre
m(BAD)=x kaç
derecedir.

Çözüm:

$|AB| = |BC| = a \; ve \; |BD| = b$ olsun ABD üçgeninde m(ADB)=132 – x ve sin(132 – x) = sin(48 + x) dir.BCD üçgenine m(BDC)=162 ve sin162 = sin18 dir ABD ve BCD üçgenlerinde sinüs kuralı yazılırsa

$$\frac{a}{\sin(48+x)} = \frac{b}{sinx}$$
$$\frac{a}{sin18} = \frac{b}{sin6}$$

Olur. Bu ifadeler taraf tarafa oranlanırsa

$\frac{sin18}{\sin(48+x)} = \frac{sin6}{sinx}$e

Olur. Buradan sinx sin18 = sin(48 + x) sin6 eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte ters dönüşüm uygulanır ve sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\cos(x-18) - \cos(x+18) = \cos(42+x) - \cos(54+x)$$
$$\cos(54+x) - \cos(x+18) = \cos(42+x) - \cos(x-18)$$
$$-2\sin(36+x)\,sin18 = -2\sin(12+x)\,sin30$$
$$2\sin(36+x)\,sin18 = \sin(12+x)$$

Son eşitliğin her iki yanını cos18 ile çarpalım.

$$2\sin(36+x)\,sin18cos18 = \sin(12+x)\,cos18$$
$$\sin(36+x)\,sin36 = \sin(12+x)\,sin72$$
$$cosx - \cos(72+x) = \cos(60-x) - \cos(84+x)$$
$$\cos(84+x) - \cos(72-x) = \cos(60-x) - cosx$$
$$-2\sin(78+x)\,sin6 = -2sin30\sin(30-x)$$

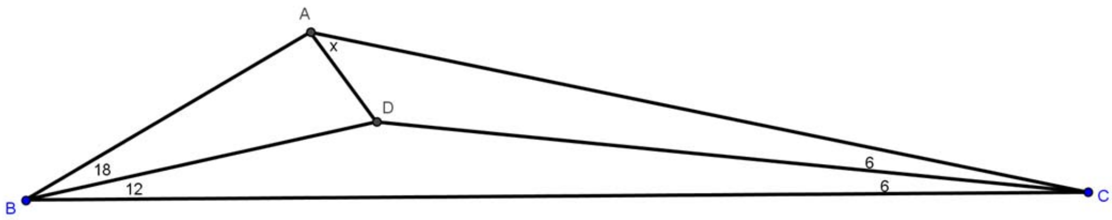
$$2\sin(78+x)\,sin6 = \sin(30-x)$$

Olur. Her iki yanı cos6 ile çarpalım;

$$\sin(78+x)\,sin12 = \sin(30-x)\,cos6$$
$$\cos(66+x) - \cos(90+x) = \sin(36-x) + \sin(24-x)$$
$$\sin(24-x) - \sin(-x) = \sin(36-x) + \sin(24-x)$$
$$sinx = \sin(36-x)$$

Den x = 36 – x ve 2x = 36 dan x = 18 olarak buunur.

Soru:



Şekilde m(ABD)=18, m(DBC)=12, m(BCD)=m(DCA)=6 olduğuna göre m(CAD)=x kaç derecedir.

Çözüm:

m(BAD)=138 – x dir. Buna göre sin(138 – x) = sin(42 + x) dir. ABC üçgeninde Ceva uygulanırsa;

$$sinxsin18sin6 = \sin(42+x)\, sin12sin6$$
$$sinxsin18 = \sin(42+x)\, sin12$$

Her iki yanı 2cos18 ile çarpalım;

$$sinxsin36 = \sin(42+x)\, 2sin12cos18$$
$$\frac{1}{2}[\cos(x-36) - \cos(x+36)] = \sin(42+x)[sin30 - sin6]$$
$$\frac{1}{2}[\cos(x-36) - \cos(x+36)] = \frac{1}{2}\sin(42+x) - \sin(42+x)\, sin6$$
$$\frac{1}{2}\cos(x-36) - \frac{1}{2}\cos(x+36) = \frac{1}{2}\sin(x+42) - \frac{1}{2}[\cos(36+x) - \cos(48+x)]$$
$$\frac{1}{2}\cos(x-36) - \frac{1}{2}\cos(x+36) = \frac{1}{2}\sin(x+42) - \frac{1}{2}\cos(x+36) + \frac{1}{2}\cos(48+x)$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\cos(x-36) - \cos(x+48) = \sin(x+42)$$
$$-2\sin(x+6)\sin(-42) = \sin(42+x)$$
$$2\sin(x+6)\, sin42 = \sin(x+42)$$

Her iki yanı cos42 ile çarparsak;

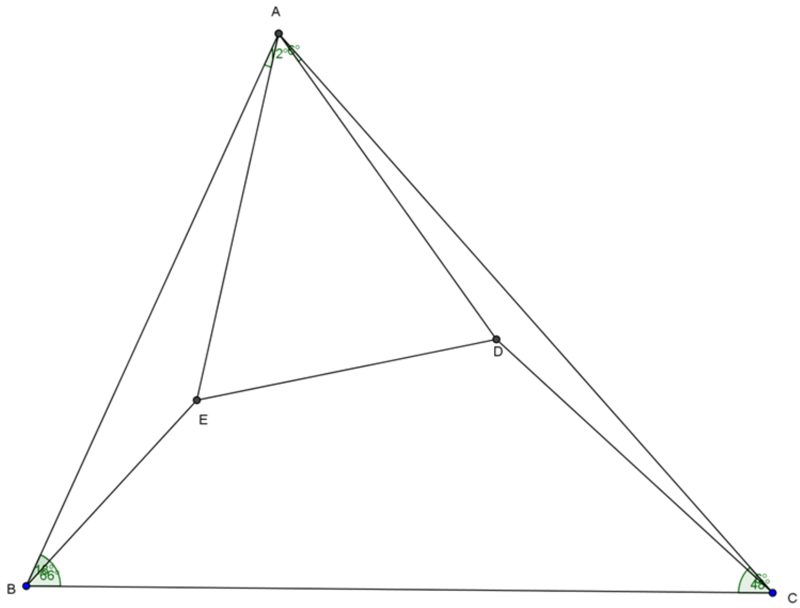
$$\sin(x+6)\, sin84 = \sin(x+42)\cos(42)$$
$$\sin(x+6)\, cos6 = \sin(x+42)\, cos42$$
$$\frac{1}{2}[\sin(x+12) + sinx] = \frac{1}{2}[\sin(x+84) + sinx]$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\sin(x+12) = \sin(x+84)$$
$$x + 12 = 180 - (x+84)$$
$$x + 12 = 96 - x$$
$$2x = 84\ ve\ x = 42$$

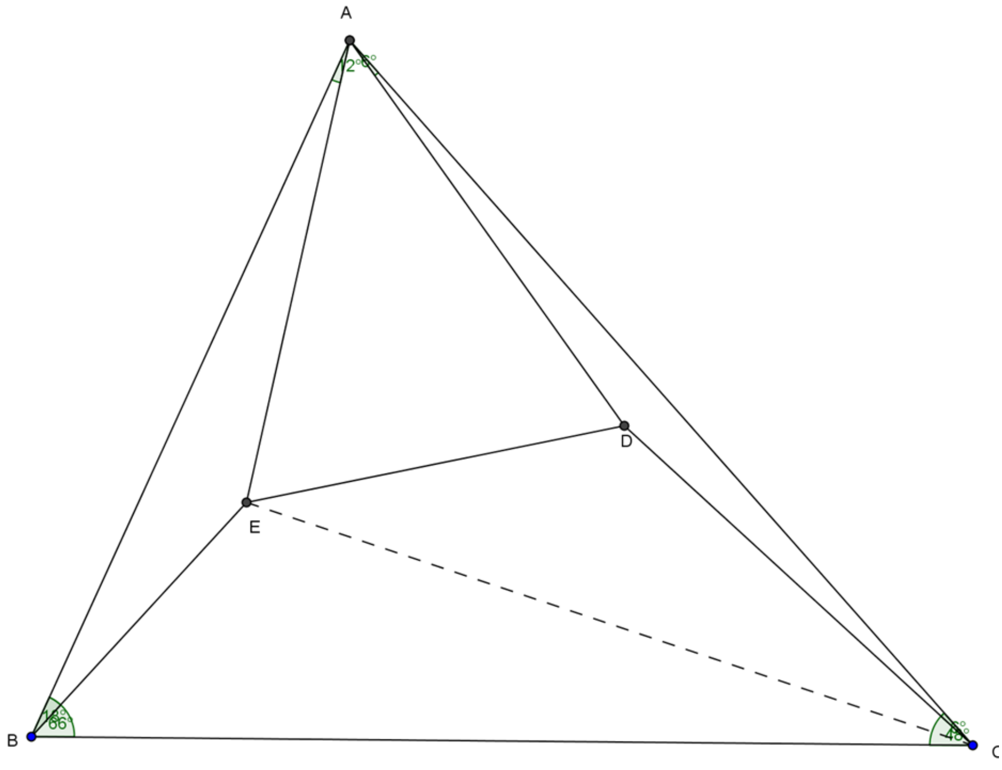
olur.

Soru:



m(DAC)=m(DCA)=6, m(BCD)=42, m(DAE)=48, m(EAB)=12, m(EBA)=18 olduğuna göre m(ADE) kaç derecedir.

Çözüm:

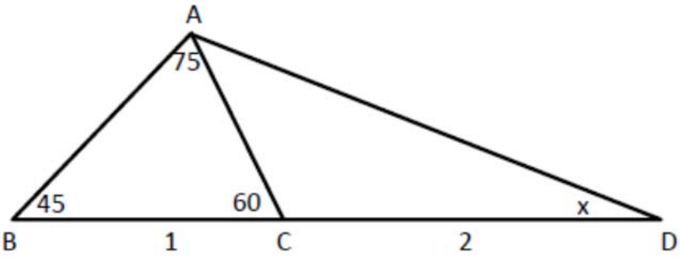


Önve [CE] çizelim. Önce BCE açısının öcüsünü bulalım. ABC üçgeninde $|CA| = |CB| = b\ ve$ $|CE| = a$ diyelim ve CAE ile CBE üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım $m(ACE) = 48 - x, m(CAE) = 54, m(EBC) = 48\ ve\ m(BCE) = x$ olduğundan

$$BCE\ de\ \frac{a}{sin(48+x)} = \frac{b}{sin48}$$
$$ACE\ de\ \frac{a}{sin(102-x)} = \frac{b}{sin54}$$
Taraf tarafa oranlanırsa
$$\frac{\sin(102-x)}{\sin(48+x)} = \frac{sin54}{sin48}$$
$$\sin(78+x)\,sin48 = \sin(48+x)\,sin54$$
$$\cos(30+x) - \cos(126+x) = \cos(6-x) - \cos(102+x)$$
$$\cos(30+x) - \cos(6-x) = \cos(126+x) - \cos(102+x)$$
$$-2sin18\sin(12+x) = -2\sin(114+x)\,sin12$$
$$2sin12sin48\sin(12+x) = \sin(114+x)\,sin12$$
$$sin48\sin(12+x) = \sin(114+x)\,sin30$$
$$\cos(36-x) - \cos(60+x) = \cos(84+x) - \cos((144+x)$$
$$-\cos(144+x) + \cos(120-x) = \cos(84+x) - \cos(144+x)$$
$$120 - x = 84 + x\ den\ 2x = 36\ dan\ x = 18$$
Olarak bulunur. Bu durumda m(EBD)=24 olarak bulunur. ACE üçgeninde m(CED)=y diyelim ve Trigo Ceva uygularsak
$$sin6sin48siny = sin6\sin(96-y)\,sin24$$
$$2sin24cos24siny = \sin(96-y)\,sin24$$
$$\sin(y+24) + \sin(y-24) = \sin(84+y)$$
$$\sin(y-24) = \sin(84+y) - \sin(y+24)$$
$$\sin(y-24) = 2sin30\cos(54+y)$$
$$\sin(y-24) = \sin(36-y)$$
$$y - 24 = 36 - y\ den\ 2y = 60\ dan\ y = m(CED) = 30\ olur.$$
İstenen m(ADE)=m(DAC)+m(ACD)+m(DCE)+m(CED)=6+6+24+30=66 olur.

Soru:

Verilenlere göre x kaç derecedir.



Çözüm:

$|AC| = a$ diyelim. ABC de $\dfrac{a}{\sin 45} = \dfrac{1}{\sin 75}$ ve ACD de $\dfrac{a}{\sin x} = \dfrac{2}{\sin(60-x)}$ yazılır ve taraf tarafa oranlanırsa $\dfrac{\sin x}{six45} = \dfrac{\sin(60-x)}{2\sin 75}$ ifadesinde sin75=cos15 yazılırsa

sinx2cos15=sin(60 − x)sin45 ve her iki yan sin15 ile çarpılır ve sin45 = cos45 yazılırsa

sinxsin30 = sin(60 − x)cos45sin15

$$\sin x \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\sin(105-x)}_{\cos(x-15)} + \sin(15-x)\right]\sin 15$$

sinx = sin15.sin(15 − x) +sin15. cos(x − 15)

$$\sin x = \frac{1}{2}\left[\cos x - \cos(30-x)\right] + \frac{1}{2}\left[\sin x + \sin(30-x)\right]$$

$$2\sin x = \cos - \cos(30-x) + \sin x + \sin(30-x)$$

$$\sin x - \sin(30-x) = \cos x - \cos(30-x)$$

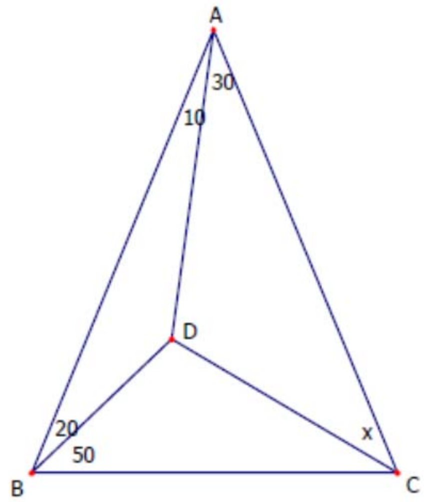
$$2\cos 15 \sin(x-15) = -2\sin 15 \sin(x-15)$$

$$\sin 15 \sin(x-15) + \cos 15 \sin(x-15) = 0$$

$$\sin(x-15)\left[\sin 15 + \cos 15\right] = 0$$

dan sin(x − 15)=0 ve x = 15 olur.

Soru:
Yandaki şekilde m(BAD)=10, m(DAC)=30,
m(ABD=20, m(CBD)=50 ise m(ACD)=x kaçtır.



Çözüm:

ABC de $|AB| = |AC| = b \ ve \ |AD| = a$ diyelim.

ABD de sin kuralı : $\dfrac{b}{sin30} = \dfrac{a}{\sin 20}$

ADC de sin kuralı $\dfrac{b}{sin(x+30)} = \dfrac{a}{\sin x}$

taraf tarafa oranlanırsa $\dfrac{\sin(x+30)}{sin30} = \dfrac{\sin x}{\sin 20}$ olur.

Buradan

$$\frac{1}{2}\sin x = \sin(x+30)\sin 20 \ ve \ \sin x = 2\sin(x+30)\sin 20$$

Yazılır her iki taraf cos20 ile çarpılırsa $\cos 20 \sin x = \sin(x+30)\sin 40$ elde edilir. Cos20 = sin70 yaılır ve ters dönüşüm uygulanırsa

$$\sin 70 \sin x = \sin(x+30)\sin 40$$
$$\cos(70-x) - \cos(70+x) = \cos(x-10) - cos(x+70)$$

Buradan da

cos870 – x)=cos(x – 10)

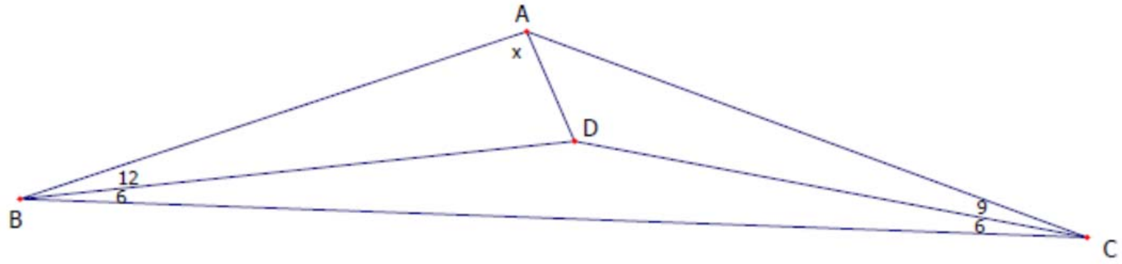
70 – x=x – 10

ve 2x = 80 den

x = 40

olarakı bulunur.

Soru:
Yandaki şekilde m(ABD)=12, m(ACD)=9,
m(DBC)=m(DCB)=6 olduğuna göre m(BAD)=x
kaç derecedir.



Çözüm:
$|DB| = |DC| = a \ ve \ |AD| = b$ diyelim ve ABD ve ACD üçgenlerinde sin kuralı uygulayalım:

$$\frac{a}{\sin x} = \frac{b}{\sin 12} \ ve \ \frac{a}{Sin(147 - x)} = \frac{b}{\sin 9}$$

yazılır. Taraf tarafa oranlanır ve içler dışlar çarpımı yapılırsa

sinxsin9=sin12sin(147 – x)

olur. Burada sin18 = 2sin12sin48 eşitliğinden $\sin 12 = \frac{\sin 18}{2\sin 48}$ yazılırsa

$$\sin x \sin 9 = \sin(33 + x)\frac{\sin 18}{2\sin 48} \ ve \ \sin x \sin 9 = \sin(33 + x)\frac{2\sin 9 \cos 9}{2\sin 48}$$

sadeleştirmeler yapılırsa

$$\sin x \cos 42 = \sin(33 + x)\cos 9$$

ters dönüşüm uygulanırsa

$$\sin(x + 42) + \sin(x - 42) = \sin(x + 42) + \sin(24 + x)$$

eşitliğinden

sin(x – 42)=sin(24 + x)

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü

x – 42 = 180 – (24 + x) dir.

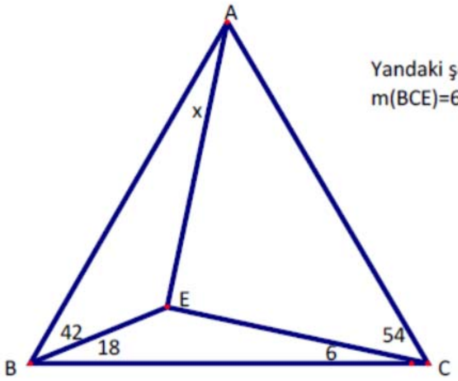
Buradan

x – 42 = 156 – x ve 2x = 198

x = 99

elde edilir.

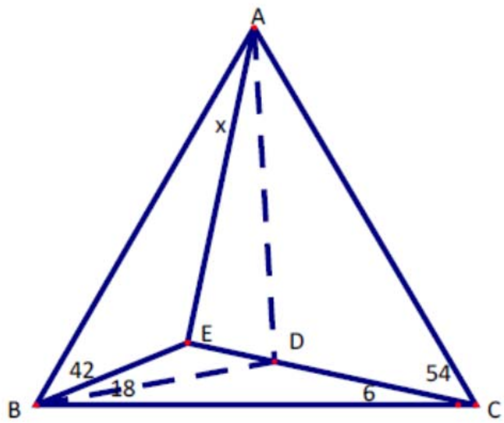
Soru:



Yandaki şekilde m(BAE)=x, m(ABE)=42, m(EBC)=18, m(BCE)=6 ve m(ACE)=54 ise x kaç derecedir.

Çözüm:

m(DBC)=6 olacak şekilde [BD] ve [AD] çizilirse



$|BD| = |DC|, m(EBD) = 12, m(BAD) = 30, m(EAD) = 30 - x$
olacaktır. Buradan m(EBD)=m(EDB)=12 ve
m(ADE)=84 olur. $|EB| = |ED| = a \text{ ve } |AE| = b$
diyerek ABE ve ADE üçgenlerinde sin kuralı
uygulanırsa

$\dfrac{a}{\sin x} = \dfrac{b}{\sin 42}$ ve $\dfrac{a}{\sin(30-x)} = \dfrac{b}{\sin 84}$ yazılır. Eşitlikler taraf tarafa oranlanırsa

$\dfrac{\sin(30-x)}{\sin x} = \dfrac{\sin 84}{\sin 42}$, $\dfrac{\sin(30-x)}{\sin x} = \dfrac{2\sin 42 \cos 42}{\sin 42}$ yazılır. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$\sin x \cdot 2\cos 42 = \sin(30-x)$ ve $\sin x \cdot 2\sin 48 = \sin(30-x)$ $2\sin 48 = \dfrac{\sin 18}{\sin 12}$ yazılırsa

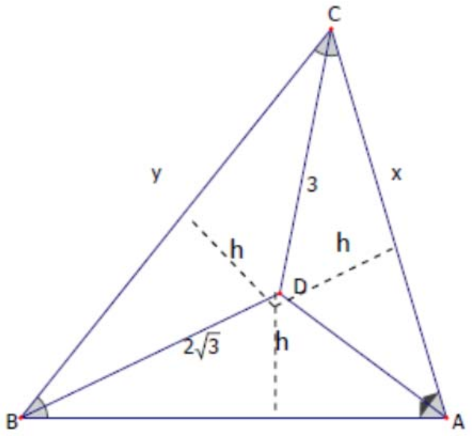
Sinxsin18=sin(30 – x)sin12 elde edilir. Burada ters dönüşüm uygulanırsa
cos(x – 18) – cos (x + 18) = cos(18 – x) – cos(42 – x) den cos(x + 18) = cos (41 – x) den x + 18=42 – x ve 2x = 24 den x = 12 bulunur.

Soru:

Yandaki şekilde D iç açıortayların kesişme noktasıdır.

$|AD| = 3, |BD| = 2\sqrt{3}, |AC| = x \; ve \; |BC| = y$ dir.

$x \cdot y = 21$ olduğuna göre m(BAC) kaç derecedir.



Çözüm:

M(CAD)=m(BAD)=a, m(ABD)=m(CBD)=b ve m(BCD)=m(ACD)=c olsun.m(ADC)=90+b, m(ADB)=90+c, m(BDC)=90+a olacaktır.

ADC de sin kuralı

$$\frac{3}{\sin a} = \frac{x}{\sin(90+b)} \; den \; x = \frac{3\cos b}{\sin a}$$

BCD de sin kuralı $\frac{3}{\sin c} = \frac{y}{\sin(90+a)} \; dan \; y = \frac{3\cos a}{\sin b}$ olur. $x \cdot y = \frac{9\cos a \cos b}{\sin a \sin b} = 21$ olur.

Buradan 3cosacosb=7sinasinb yazılır.

3cosacosb – 3csinasinb = 4sinasinb

3cos(a + b) = 4 sinasinb

a + b + c = 90

a + b = 90 – c

cos(a + b)=sinc

3sinc= 4sinasinb

D noktasından kenarlara dikmeler çizilir ve uzunluğu h ile gösterilirse

$\sin a = \frac{h}{|AD|}, \; \sin b = \frac{h}{2\sqrt{3}}, \; \sin c = \frac{h}{3}$ olur. Bu değerler yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa

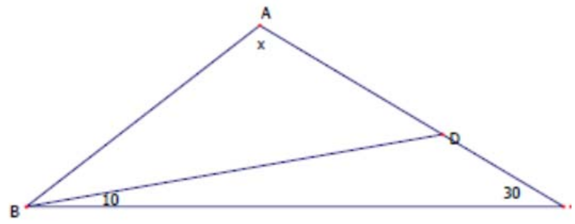
$$3\frac{h}{3} = 4\frac{h}{|AD|} \cdot \frac{h}{2\sqrt{3}} \; den \; |AD| = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

Olacaktır. Buradan $\sin a = \frac{h}{\frac{2h}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Olur. Sonuç olarak m(BAD)=a=30 ve m(BAC)=2a = 60 olacaktır.

Soru:

Yandaki şekilde m(ACB)=30, m(DBC)=10 ve $|AC| = |BD|$ olduğuna göre m(BAC)=x kaç derecedir.



Çözüm:

$|AC| = |BD| = a \; ve \; |BC| = b$ diyelim ve ABC ve DBC üçgenlerinde sin kuralı yazalım:

m(ABC)=150 – x ve m(BDC)=140 olduğundan $\frac{b}{\sin x} = \frac{a}{\sin(150-x)} \; ve \; \frac{b}{\sin 140} = \frac{a}{\sin 30}$ olur.

Taraf tarafa oranlanırsa $\frac{\sin 30}{\sin(150-x)} = \frac{\sin 140}{\sin x}$, $\frac{\sin 30}{\sin(30+x)} = \frac{\sin 40}{\sin x}$ yazılabilir. İşlem sürdürülürse

$$\sin x \sin 30 = \sin(x+30)\sin 40$$

$$\frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}\left[\cos(x-10) - \cos(x+70)\right]$$

$$\sin x = \cos(x-10) - \sin(20-x)$$

$$\sin x + \sin(20-x) = \cos(x-10)$$

$$2\sin 10 \cos(x-10) - \cos(x-10) = 0$$

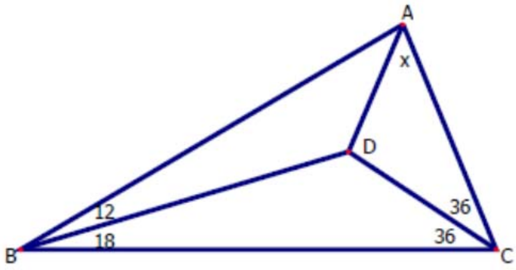
$$\cos(x-10) = 0 \text{ dan}$$

$$x - 10 = 90$$

$$x = 100$$

olarak bulunur.

Soru:
Yandaki şekilde m(ACD)=m(BCD)=36
m(ABD)=12, m(CBD)=18 olduğuna göre
m(CAD)=x kaç derecedir.



Çözüm:
Şekilde m(BAD)=78 – x dir. Ceva teoreminin trigonometriye uygulamasından

$$\sin x \sin 12 \sin 36 = \sin(78 - x)\sin 18 \sin 36$$

$$\sin x \sin 12 = \sin(78 - x)\sin 18$$

sin18=2sin12sin48 eşitliği kullanılarak

$$\sin x \sin 12 = \sin(78 - x) 2 \sin 12 \sin 48$$

$$\frac{1}{2}\sin x = \sin(78 - x)\sin 48$$

$$\sin 30 \sin x = \sin(78 - x)\sin 48$$

ters dönüşüm uygulanır ve sadeleştirilirse

$$\cos(x - 30) - \cos(x + 30) = \cos(x - 30) - \cos(126 - x)$$

den

$$x + 30 = 126 - x$$

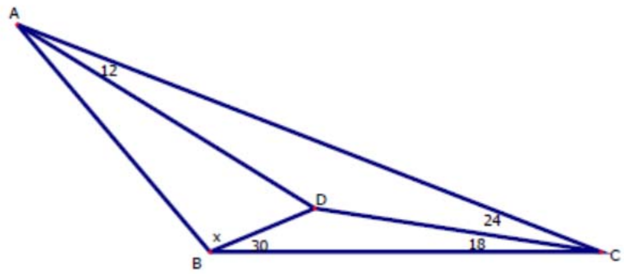
$$2x = 96$$

$$x = 48$$

olarak bulunur.

Soru:

Yandaki şekilde m(ACD)=24, m(BCD)=18, m(CBD)=30, m(CAD)=12 olduğuna göre m(ABD) = x kaç derecedir.



Çözüm:

Şekilde m(BAD)=96 – x dir.

Yukarıdaki soruda uygulanan düşünce tarzı ile

$$\sin(96-x)\sin30\sin24=\sin12\sin x\sin18$$

$$\sin(96-x)\frac{1}{2}\cdot 2\sin12\cos12=\sin12\sin x\sin18$$

$$\cos(x-6)\cos12=\sin x\sin18$$

$$\cos(x+6)+\cos(x-18)=\cos(x-18)-\cos(x+18)$$

$$x+6=180-(x+18)$$

den

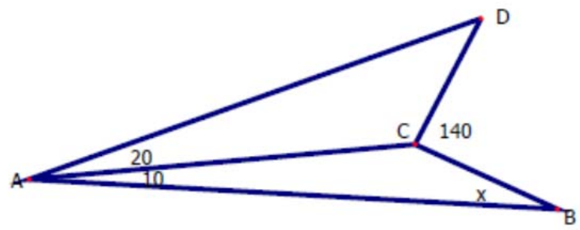
$$2x=146$$

$$x=73$$

bulunur.

Soru:

Yandaki şekilde m(DAC)=20, m(BAC)=10 m(BCD)=140 ve $|BC| = |CD|$ olduğuna göre m(ABC)=x kaç derecedir.



Çözüm:

Şekilde m(ADC)=110 – x dir. $|BC| = |CD| = a \ ve \ |AC| = b$ diyelim ve ADC ile ABC üçgenlerinde sin kuralı uygulayalım:

$$\frac{a}{\sin 20} = \frac{b}{\sin(110-x)} \ ve \ \frac{a}{\sin 10} = \frac{b}{\sin x}$$

yazılır. taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{\sin x}{\sin(70+x)} = \frac{\sin 10}{\sin 20}$$

$$\frac{\sin x}{\sin(70+x)} = \frac{\sin 10}{2\sin 10 \cos 10}$$

$$\frac{\sin x}{\sin(70+x)} = \frac{1}{2\cos 10} \ dan \ \sin x \cos 10 = \frac{1}{2}\sin(70+x)$$

$$\sin x \cos 10 = \sin(70 + x)\cos 60$$

$$\sin(x + 10) + \sin(x - 10) = \sin(x + 130) + \sin(x + 10)$$

$$x - 10 = 180 - (130 + x)$$

$$2x = 60$$

$$x = 30$$

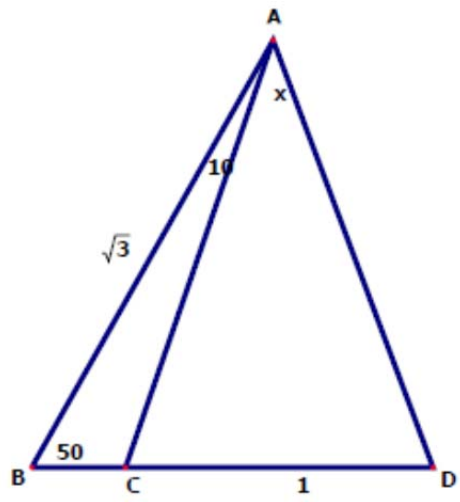
olarak bulunur.

Soru:

Yandaki şekilde m(BAC)=10, m(ABC)=50

$|AB| = \sqrt{3}\ ve\ |CD| = 1$ olduğuna göre

m(CAD)=x kaç derecedir.



Çözüm:

Şekilde m(ACD)=60, m(ADC)= 120 – x dir.

$|AD| = a$ der ve ACD ile ABD üçgenlerinde

sin kuralı uygularsak

$$\frac{a}{\sin 60} = \frac{1}{\sin x}\ ve\ \frac{a}{\sin 50} = \frac{\sqrt{3}}{\sin(120-x)}$$

yazılır. İfadeler taraf tarafa ornlanırsa:

$$\frac{\sin 50}{\sin 60} = \frac{\sin(120-x)}{\sqrt{3}\sin x}\ den\ \frac{\sin 50}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sin(120-x)}{\sqrt{3}\sin x}$$

$$\frac{2\sin 50}{\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{\sin(120-x)}{\cancel{\sqrt{3}}\ \sin x}\ den\ 2\sin x \sin 50 = \sin(120-x)$$ olur.

son eşitlikte sin50=cos40 yazalım ve her iki tarafını sin40 ile çarpalım

$$\sin x \sin 80 = \sin(120-x)\sin 40$$

olur. Ters dönüşüm uygulanır ve sadeleştirilirse

cos(80 – x) – cos(80 + x) = cos(80 – x) – cos8160 – x)

80 + x = 160 – x

2x = 80

x = 40

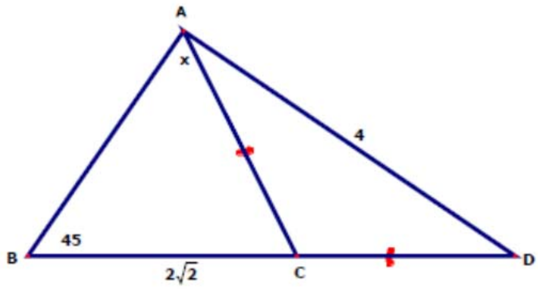
olarak bulunur.

Soru:

Yandaki şekilde m(ABC)=45, $|AC| = |CD|$

$|AD| = 4$, $|BC| = 2\sqrt{2}$ olduğuna göre m(BAC)=x

kaç derecedir.



Çözüm:

Şekilde m(ACD)=45 + x ve $m(CAD) = m(CDA) = \dfrac{135 - x}{2}$ dir. $|AC| = |CD| = a$ der ve ABC ile ACD üçgenlerinde sin kuralı uygularsak:

$$\frac{a}{\sin 45} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin x}(I), ve\ \frac{a}{\sin\left(\dfrac{135-x}{2}\right)} = \frac{4}{\sin(45+x)}$$

yazılır. $\sin\left(\dfrac{135-x}{2}\right) = \sin\left(180 - \dfrac{135-x}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{45+x}{2}\right)$ olduğundan yerine yazılırsa

$$\frac{a}{\sin\left(\dfrac{45+x}{2}\right)} = \frac{4}{2\sin\left(\dfrac{45+x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{45+x}{2}\right)}\ ve\ \frac{a}{1} = \frac{2}{\cos\left(\dfrac{45+x}{2}\right)}(II)$$

olur. (I) ve (II) eşitlikleri taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{1}{\sin 45} = \frac{2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{45+x}{2}\right)}{2\sin x}\ den\ \sin x = \cos\left(\frac{45+x}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{45+x}{2}\right) = \sin\left(90 - \frac{45+x}{2}\right) = \sin\left(\frac{45-x}{2}\right)$$

yazılırsa

$$\sin x = \sin\left(\frac{45-x}{2}\right)\ veya\ \sin x = \left(180 - \frac{45-x}{2}\right)$$

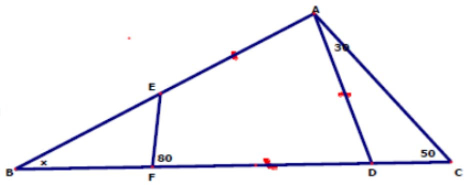
eşitlikleri yazılabilir. Buradan

3x=45 den x = 15 veya 3x=315 den x = 105

olarak bulunur.

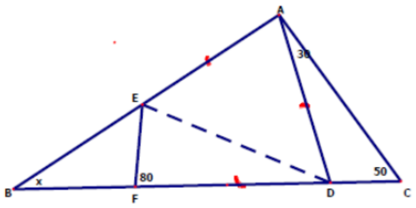
Soru:

Yandaki şekilde m(DAC)=30, m(ACD)=50, m(DFE)=80 ve $|AE|=|AD|=|DF|$ olduğuna göre m(ABC)=x kaç derecedir.



Çözüm:

[DE] yi çizelim. Açılar hesaplanırsa m(ADB)=80,



$$m(AED)=m(ADE)=40+\frac{x}{2}\ ve\ m(DEF)=60+\frac{x}{2}$$

m(BAD)=100 – x olur.

$|AE|=|AD|=|DF|=a\ ve\ |DE|=b$ diyelimve

AED ile FED üçgenlerinde sin kuralı uygulayalım:

$$\frac{a}{\sin\left(40+\frac{x}{2}\right)}=\frac{b}{\sin(100-x)}\ ve\ \frac{a}{\sin\left(60+\frac{x}{2}\right)}=\frac{b}{\sin 80}$$

eşitlikleri yazılır. Taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{\sin\left(60+\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(40+\frac{x}{2}\right)}=\frac{\sin 80}{\sin(100-x)}\ den\ \frac{\sin\left(60+\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(40+\frac{x}{2}\right)}=\frac{\sin 80}{\sin(80+x)}$$

$$\frac{\sin\left(60+\frac{x}{2}\right)}{\cancel{\sin\left(40+\frac{x}{2}\right)}}=\frac{\sin 80}{2\cancel{\sin\left(40+\frac{x}{2}\right)}\cos\left(40+\frac{x}{2}\right)}$$

$$\sin 80=2\sin\left(60+\frac{x}{2}\right)\sin\left(50-\frac{x}{2}\right)$$

sin80=cos(x + 10) – cos(110)

sin80=cos(x + 10) + cos70

sin80 = cos(x + 10) + sin20

sin80 – sin20=cos(x + 10)

2cos50sin30=cos(x + 10)

$$2\cos 50\cdot\frac{1}{2}=\cos(x+10)$$

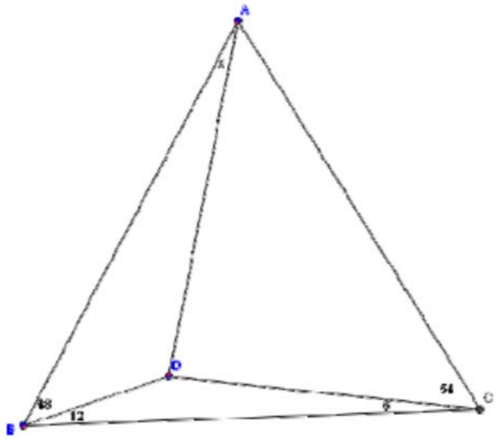
cos50=cos(x + 10)

50 = x + 10

x = 40

olarak bulunur

Soru:
Yandaki şekilde ABC eşkenar üçgendir.
m(DBC)=12 ve m(DCB)=6 olduğuna göre
m(BAD)=x kaç derecedir.



Çözüm:

$|AB| = |AC| = a \ ve \ |AD| = b$ diyelim ve ABD ve ACD üçgenlerinde sin kuralı uygulayalım:

$\dfrac{a}{\sin(132-x)} = \dfrac{b}{\sin 48} \ ve \ \dfrac{a}{\sin(66+x)} = \dfrac{b}{\sin 54}$ yazılır. sin(132 – x)=sin(48+x) yazarak taraf

tarafa oranlanırsa $\dfrac{\sin(66+x)}{\sin(48+x)} = \dfrac{\sin 54}{\sin 48}$ olur. İçler dışlar çarpımı yapılırsa

$$\sin(66 + x)\sin48 = \sin(48 + x)\sin54$$
$$\cos(18 + x) - \cos(114 + x) = \cos(6 - x) - \cos(102 + x)$$
$$\cos(18 + x) - \cos(6 - x) = \cos(114 + x) - \cos(102 + x)$$
$$\cancel{-2}\,\sin 12 \sin(6+x) = \cancel{-2}\,\sin(108+x)\sin 6$$
$$2\cancel{\sin 6}\,\cos 6 \sin(6+x) = \sin(108+x)\cancel{\sin 6}$$
$$\sin(12 + x) + \sin x = \sin(72 - x)$$
$$\sin x = \sin(72 - x) - \sin(12 + x)$$
$$\sin x = 2\cos42\sin(30 - x)$$
$$\sin x = 2\sin48\sin(30 - x)$$

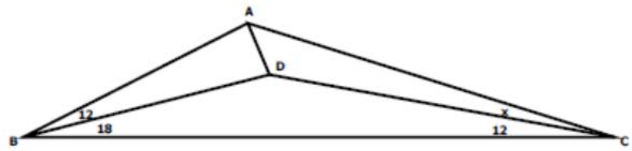
Burada sin18 = 2sin12sin48 eşitliğinden sin48 çekilerek yerine yazılırsa

$$\sin x = \frac{\sin 18}{\sin 12}\sin(30 - x)$$
$$\sin x \sin12 = \sin18\sin(30 - x)$$
$$\cos(x - 12) - \cos(x + 12) = \cos(x - 12) - \cos(48 - x)$$
$$\cos(x + 12) = \cos(48 - x)$$
$$x + 12 = 48 - x$$
$$2x = 36$$
$$x = 18$$

olarak bulunur.

Soru:

Yandaki şekilde m(ABD)=m(DCB)=12, m(DBC)=18 ve $|BA|=|BD|$ olduğuna göre m(ACD)=x kaç derecedir.



Çözüm:

$|BA|=|BD|=a$ ve $|BC|=b$ diyelim ve ABC ile DBC üçgenlerinde sin kuralı uygulayalım:

$$\frac{a}{\sin(x+12)}=\frac{b}{\sin(138-x)} \text{ ve } \frac{a}{\sin 12}=\frac{b}{\sin 150}$$

sin(138 – x) = sin(42 + x) yazılır ve taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{\sin(42+x)}{\sin(12+x)}=\frac{\sin 150}{\sin 12}$$

sin150sin(12 + x) = sin12sin(42 + x)

sin18 = 2 sin12sin48 eşitliğinde sin12 çekilir ve yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2}\sin(12+x)=\frac{\sin 18}{2\sin 48}\sin(42+x)$$

sin48sin(12 + x) = sin(42 + x)sin18

cos(36 – x) – cos(60 + x) = cos(24 + x) – cos (60 + x)

cos(36 – x) = cos(24 + x)

36 – x = 24 + x

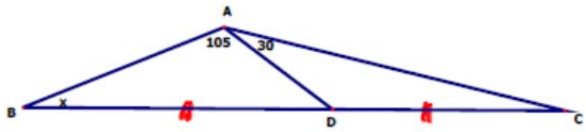
2x = 12

x = 6

olarak bulunur.

Soru:

Yandaki şekilde $|BD| = |DC|$, m(BAD)=105, m(DAC)=30 ise m(ABC)=x kaç derecedir.



Çözüm:

$|BD| = |DC| = a \ ve \ |AD| = b$ diyelim ve ABD ile ADC üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım:

$$\frac{a}{\sin 105} = \frac{b}{\sin x} \ ve \ \frac{a}{\sin 30} = \frac{b}{\sin(45-x)}$$

sin105 = sin75 ve sin(45 − x) = cos(45 + x) yazılarak taraf tarafa oranşanırsa

$$\frac{\sin 30}{\sin 75} = \frac{\cos(45+x)}{\sin x}$$

sinxsin30=cos(45 + x)sin75

$$\frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}\left[\sin(120+x) + \sin(30-x)\right]$$

sinx − sin(30 − x) = sin(120 +x)

2cos15sin(x − 15) = sin(60 − x)

Eşitliğin her iki yanı sin15 ile çarpılırsa

sin30sin(x − 15) = sin(60 − x)sin15

$$\cancel{\frac{1}{2}}\left[\cancel{\cos(45-x)} - \cos(15+x)\right] = \cancel{\frac{1}{2}}\left[\cancel{\sin(45-x)} - \cos(75-x)\right]$$

cos(15 + x) = cos875 − x)

15 + x = 75 − x

2x=60

x=30

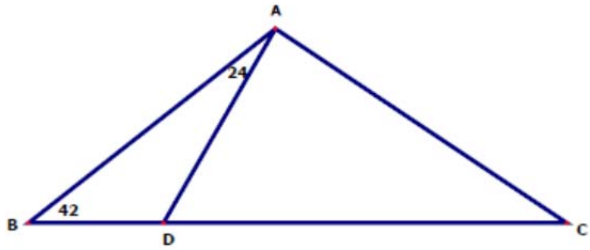
olarak bulunur.

Soru:

Yandaki şekilde

$|AB|^2 = |BD|\left(|BD| + 2|DC|\right)$

ve m(BAD)=24, m(ABC)=42 olduğuna göre m(ACB)=x kaç derecedir.



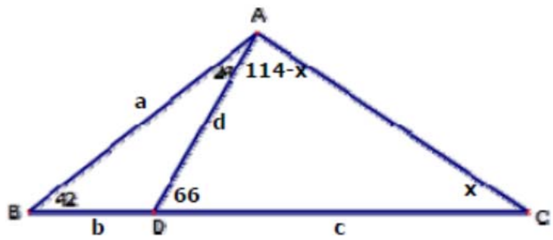
Çözüm:

Yandaki şekilde görülen düzenleme yapıldıktan sonra

ABD de sin kuralı:

$$\frac{a}{\sin 114} = \frac{d}{\sin 42} \ ve \ a = \frac{d \sin 66}{\sin 42}$$

$$\frac{b}{\sin 24} = \frac{d}{\sin 42} \ ve \ b = \frac{d \sin 24}{\sin 42}$$



ADC de sin kuralı:

$\dfrac{c}{\sin(114-x)} = \dfrac{d}{\sin x} \ ve \ c = \dfrac{d \sin(66+x)}{\sin x}$ olarak yazılır. Verilen bağıntı a, b, c ye göre düzenlenirse $a \ = b(b+2c)$ olur. Bu ifadede a, b ve c değerlerini yerleştirelim:

$$\frac{d^2 \sin^2 66}{\sin^2 42} = \frac{d \sin 24}{\sin 42}\left(\frac{d \sin 24}{\sin 42} + 2\frac{d \sin(66+x)}{\sin x}\right)$$

$$\frac{d^2 \cos^2 24}{\sin 42} = \frac{d^2 \sin 24}{1}\left(\frac{\sin 24 \sin x + 2 \sin\left(66+x\right) \sin 24 \sin 42}{\sin 42 \sin x}\right)$$

$$\cos^2 24 \sin x = \sin^2 24 \sin x + 2 \sin\left(66+x\right) \sin 24 \sin 42$$

$$\sin x \cos^2 24 - \sin x \sin \ \ 24 = 2 \sin\left(66+x\right) \sin 24 \sin 42$$

$$\sin x\left(\cos^2 24 - \sin^2 24\right) = 2 \sin\left(66+x\right) \sin 24 \sin 42$$

$$\sin x \cancel{\cos 48} = 2 \sin\left(66+x\right) \sin 24 \cancel{\sin 42}$$

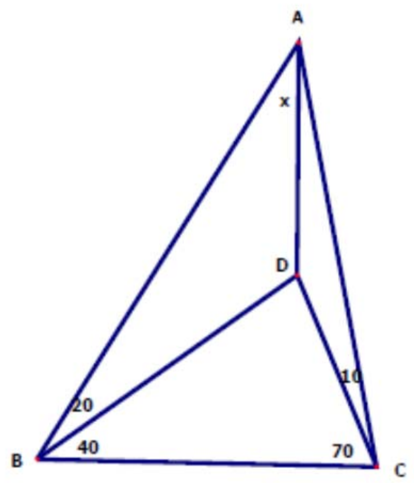
$$\sin x = 2 \cdot \cos\left(24-x\right) \sin 24$$

$$\sin x = 2 \cdot \frac{1}{2}\left[\sin\left(48-x\right) + \sin x\right]$$

olur. Buradan sinx = sin(48 – x) + sinx yazılarak sin(48 – x) 0 olur. Yani 48 – x = 0 ve x = 48 dir.

Soru :

Yandaki şekilde m(ABD)=20, m(DBC)=40, m(BCD)=70 m(DCA)=10 olduğuna göre m(BAD)=x kaç derecedir.



Çözüm:

$|AB| = a,\ |BD| = |DC| = b$ diyelim ve ABD ve ABC üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım:

ABD de $\dfrac{a}{\sin(160-x)} = \dfrac{b}{\sin x}$ *den* $\dfrac{a}{\sin\left(20+x\right)} = \dfrac{b}{\sin x}$

ABC de $\dfrac{a}{\sin 80} = \dfrac{b}{\sin 40}$ *den* $\dfrac{a}{2\sin 40\cos 40} = \dfrac{b}{\sin 40}$

yazılarak gerekli sadeleştirmeler yapılır ve taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{2\cos 40}{\sin(20+x)}\ ve\ 2\sin x\cos 40 = \sin(20+x)$$

2 sayısı eşitliğin diğer tarafına cos60 olarak yazılırsa $\sin x\cos 40 = \sin(20+x)\cos 60$

$$\sin x\cos 40 = \sin(20+x)\cos 60$$

$$\frac{1}{2}\left[\sin(x+40)+\sin(x-40)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin(80+x)+\sin(x-40)\right]$$

$$\sin(x + 40)=\sin(100 - x)$$

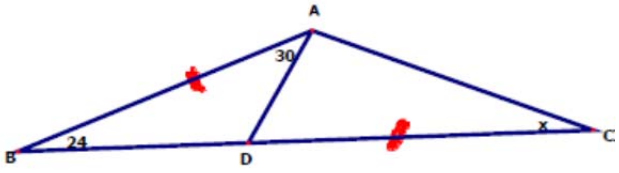
$$x + 40 = 100 - x$$

$$2x = 60$$

$$x = 30 \text{ olur.}$$

Soru:

Yandaki şekilde m(BAD)=30, m(ABC)=24 ve $|AB| = |DC|$ olduğuna göre m(ACB)=x kaç derecedir.



Çözüm:

$|AB| = |DC| = a\ ve\ |AD| = b$ diyelim ve ABD ile ADC üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım:

ABD de $\dfrac{a}{\sin 126} = \dfrac{b}{\sin 24}$

ADC de $\dfrac{a}{\sin(54+x)} = \dfrac{b}{\sin x}$

taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{\sin x}{\sin(54+x)} = \frac{\sin 24}{\sin 54}\ den\ \sin x \sin 54 = \sin 24 \sin(54+x)$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos(54-x) - \cos(54+x)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos(30+x) - \cos(78+x)\right]$$

$$\cos(54-x) + \cos(78+x) = \cos(30+x) + \cos(54+x)$$

$$2\cos66\cos(12 + x) = 2\cos(42 + x)\cos12$$

$$\sin24\cos(12 + x) = \cos(42 + x)\cos12$$

$$2\sin12\cos12\cos(12 + x) = \cos(42 + x)\cos12$$

$$2\sin12\cos(12 + x) = \cos(42 + x)$$

Burada sin18 = 2sin12sin48 eşitliğinden 2 sin12 çekilerek yerine yazılırsa

$$\frac{\sin 18}{\sin 48}\cos(12+x) = \cos(42+x)$$

$$\sin18\cos(12 + x) = \sin48\cos(42 + x)$$

$$\frac{1}{2}\left[\sin(30+x) + \sin(6-x)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin(90+x) + \sin(6-x)\right]$$

$$\sin(30 + x) = \sin(90 - x)$$

$$30 + x = 90 - x$$

$$2x = 60$$

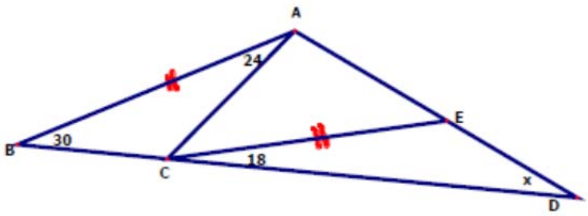
$$x = 30 \text{ olur.}$$

Soru:

Yandaki şekilde m(BAC)=24, m(ECD)=18

m(ABC)=30, $|AB| = |CE|$ olduğuna göre

m(ADB)=x kaç derecedir. (B, C ve D doğrusaldır)



Çözüm:

m(ACD)=54, m(CAD)=126 − x, m(CEA)=18 + x dir. $|AB| = |CE| = a \text{ ve } |AC| = b$ diyelim ve ACE ile ABC üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım:

$$\text{ACE üçgeninde } \frac{a}{\sin(126-x)} = \frac{b}{\sin(18+x)}$$

$$\text{ABC üçgeninde } \frac{a}{\sin 126} = \frac{b}{\sin 30}$$

İfadeler oranlanırsa

$$\frac{\sin(126-x)}{\sin(18+x)} = \frac{\sin 126}{\sin 30} \; dan \; \sin(126-x)\sin 30 = \sin 126 \sin(18+x)$$

$$\sin(126-x)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos(108-x) - \cos(144+x)\right]$$

$$\sin(54 + x) = \cos(108 - x) + \cos(36 - x)$$

$$\sin(54 + x) = \cos(108 - x) + \sin(54 + x)$$

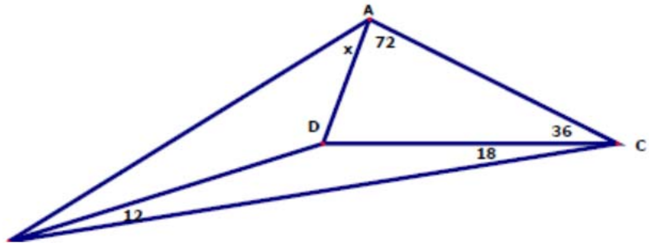
$$\cos(108 - x) = 0$$

$$108 - x = 90$$

x = 18 olur.

Soru:

Yandaki şekilde m(DBC)=12,



m(ACD)=36, m(BCD)=18, m(DAC)=72 ve ise m(BAD)=x kaç derecedir.

Çözüm:

Şekilde $m(ADC) = 72\ ve\ |CA| = |CD|$ dirm(ABD)=42 – xdir. TrigoCeva uygulanırsa

$$\sin x \sin 12 \sin 36 = \sin 72 \sin(42 - x) \sin 18$$

$$\sin x \sin 12 \sin 36 = \sin(42 - x) \cos 18 \sin 18$$

$$\sin x \sin 12 \sin 36 = \frac{\sin(42 - x)\sin 36}{2}$$

$$\sin x \sin 12 = \sin 30 \sin(42 - x)$$

$$\cos(x - 12 - \cos(x + 12) = \cos(x - 12) - \cos(72 - x)$$

$$\cos(x + 12) = \cos(72 - x)$$

$$x + 12 = 72 - x$$

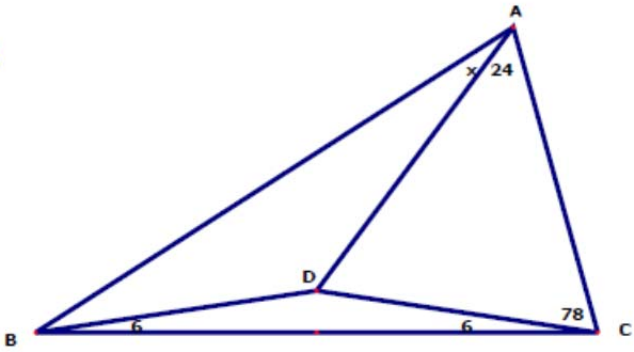
$$2x = 60$$

$$x = 30$$

bulunur.

Soru:

Yandaki şekilde m(CAD)=24, m(ACD)=78
m(DBC)=m(DCB)=6 olduğuna göre
m(BAD)=x kaç derecedir.



Çözüm:

Şekilde m(ABD)=66 – x dir. Trig- Ceva uygulanırsa

sinxsin6sin78=sin24sin(66 – x)sin6

sinxcos12=2sin12cos12sin(66 – x)

$$\sin x = 2\sin 12 \sin(66 - x)$$

$$\sin x \frac{1}{2} = \sin 12 \sin(66 - x)$$

sin18=2sin12sin48 eşitliğinden sin12 hesaplanır ve yerine yazılırsa

$$\sin x \frac{1}{\cancel{2}} = \sin(66 - x)\frac{\sin 18}{\cancel{2}\sin 48}$$

sinxsin48 = sin(66 − x)sin18

$$\frac{1}{2}\left[\cos\left(x-48\right)-\cos\left(x+48\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\cos\left(x-48\right)-\cos\left(84-x\right)\right]$$

cos(x + 48) = cos(84 − x)

x + 48 = 84 − x

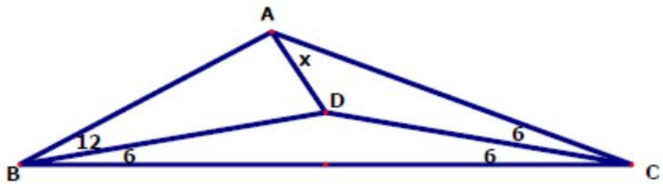
2x = 36

x = 18

bulunur.

Soru:

Yandaki şekilde m(ABD)=12, m(DBC)=m(DCB)=m(ACD)=6, olduğuna göre m(CAD)=x kaç derecedir.



Çözüm:

Şekilde m(BAD)=150 – x dir.

TrigoCeva uygulanırsa

$$\sin x \sin 12 \sin 6 = \sin(150 - x) \sin 6 \sin 6$$

$$\sin x \sin 12 = \sin(30 + x) \sin 6$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos(x-12)-\cos(x+12)\right]=\frac{1}{2}\left[\cos(24+x)-\cos(36+x)\right]$$

$$\cos(36 + x) - \cos(x + 12) = \cos(24 + x) - \cos(x - 12)$$

$$-2\sin(24+x)\sin 12 = -2\sin(x+6)\sin 18$$

sin18=2sin12 sin48 eşitliği sin 18 yerine yazılarak

$$\sin(24 + x) \sin 12 = \sin(x + 6) 2\sin 12 \sin 48$$

$$\frac{1}{2}\sin(24+x)=\sin(6+x)\sin 48$$

$$\sin 30 \sin(24 + x) = \sin(6 + x) \sin 48$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos(x-6)-\cos(54+x)\right]=\frac{1}{2}\left[\cos(42-x)-\cos(54+x)\right]$$

$$\cos(x - 6) = \cos(42 - x)$$

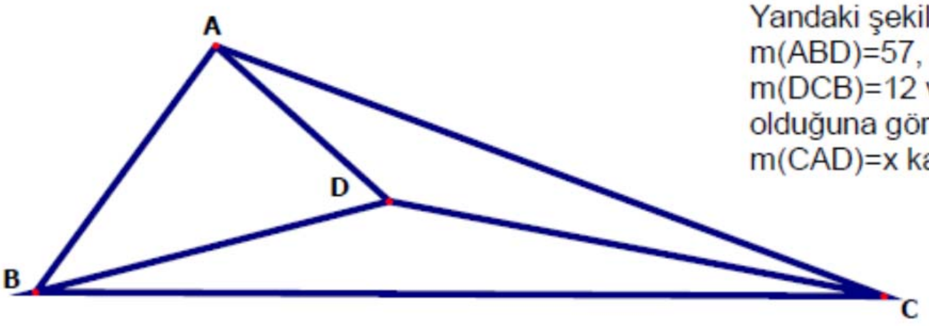
$$x - 6 = 42 - x$$

$$2x = 48$$

$$x = 24$$

Bulunur.

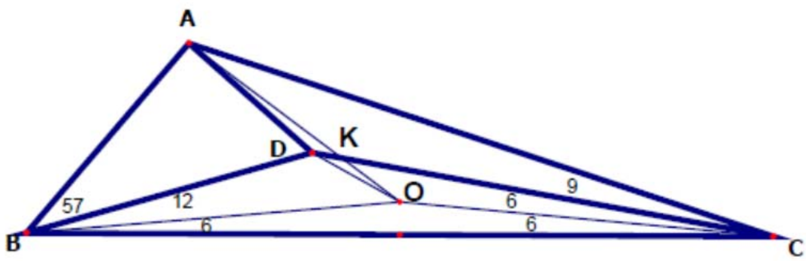
Soru:



Yandaki şekilde m(ABD)=57, m(DBC)=18 m(DCB)=12 ve m(ACD)=9 olduğuna göre m(CAD)=x kaç derecedir.

Çözüm:

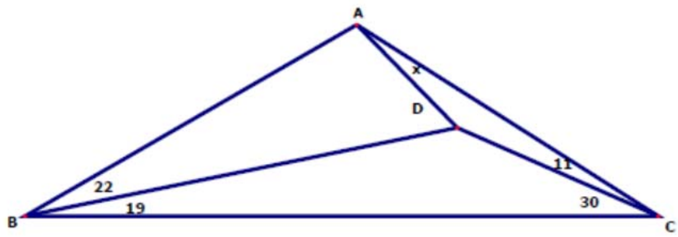
Bu soru yukarıdaki soru ile ilişkilidir. DBC üçgeninde m(OBC=m(OCB)=6 olacak şekilde O noktası alınır ve [OD] çizilirse yukarıaki soruda verilen üçgen elde edilmiş olur. Yukarıdaki sorunun çözümünden m(CDO)=24 olduğunu biliyoruz.



Öte yandan ABC üçgeninde m(BAC)=84 ve OBC üçgeninde m(BOC)=168 olduğundan O noktası ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir. Yani $|OA| = |OB| = |OC|$ dir. Buna göre m(OAC)=m(OCA)=6+9=15 ve AKC üçgeninde m(CKO)= 15 + 9 = 24 olur (dış açı), Oysa m(CDO)=24 olduğunu yukardan biliyoruz. ODK üçgeninde CKO bir dış açı olduğundan ölçüsü, KOD ile CDO açılarının ölçüleri toplamına eşittir. Yani m(CKO)=m(KDO) + m(KOD) den 24 = m(KOD) + 24 olup m(KOD)=0 olur. yani D ve K noktaları çakışıktır. Bir başka deyişle D = K ve m(CAD)=m(CAK)=15 olur.

Soru:

Yandaki şekilde
m(ABD)=22,
m(ACD)=11



m(DBC)=19
m(DCB)=30
olduğuna göre m(DAC)=x kaç derecedir.
Çözüm:

Şekilde m(BAD)=98 – x dir.Diğer açılar hesaplanırsa m(ADB)= 60 + x
$|AB| = |AC| = a \ ve \ |AD| = b$ diyelim ve ABD ile ACD üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım:

$$\frac{a}{\sin(60+x)} = \frac{b}{\sin 22} \ ve \ \frac{a}{\sin(169-x)} = \frac{b}{\sin 11}$$

yazılır. sin(169 – x) = sin(11 + x) yazılarak taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{\sin(11+x)}{\sin(60+x)} = \frac{\sin 11}{\sin 22} \ ve \ \frac{\sin(11+x)}{\sin(60+x)} = \frac{\sin 11}{2\sin 11 \cos 11} \ den \ \frac{\sin(11+x)}{\sin(60+x)} = \frac{1}{2\cos 11}$$

$$2\sin(11 + x) \cos 11=\sin(60 + x)$$

$$\sin(22 + x) + \sin x= \sin(60 + x)$$

$$\sin(22 + x) = \sin(60 + x) - \sin x$$

$$\sin(22 + x) = 2 \cos(30 + x) \sin 30$$

$$\sin(22 + x) = \cos(30 + x)$$

$$22 + x + 30 + x = 90$$

$$2x = 38$$

$$x = 19$$

olarak bulunur.

Soru:

sin30 sinx = sin(30 + x) sin24 denkleminde x kaçtır.

Çözüm:

Ters dönüşüm uygulanırsa

cos(x – 30) – cos(x + 30) = cos(x + 6) – cos(x + 54)

cos(x + 54) – cos(x + 30) = cos(x + 6) – cos(x – 30)

$$-2\sin(42+x)\sin 12 = -2\sin(x-12)\sin 18$$

Burada sin18 = 2sin12sin48 yazılırsa

sin(42 + x) sin12 = sin(x – 12) 2sin12 sin48

$$\sin(42+x)\frac{1}{2} = \sin(x-12)\sin 48$$

sin(42 + x) sin30 = sin(x – 12) sin48

cos(12 + x) – cos(72 + x) = cos(x – 60) – cos(x + 36)

cos(12 + x) – cos(x – 60) = cos(72 + x) – cos(x + 36)

$$-2\sin(x-24)\sin 36 = -2\sin(54+x)\sin 18$$

$$\sin(x-24)2\sin 18\cos 18 = \sin(54+x)\sin 18$$

$$\sin(x-24)\cos 18 = \frac{1}{2}\sin(54+x)$$

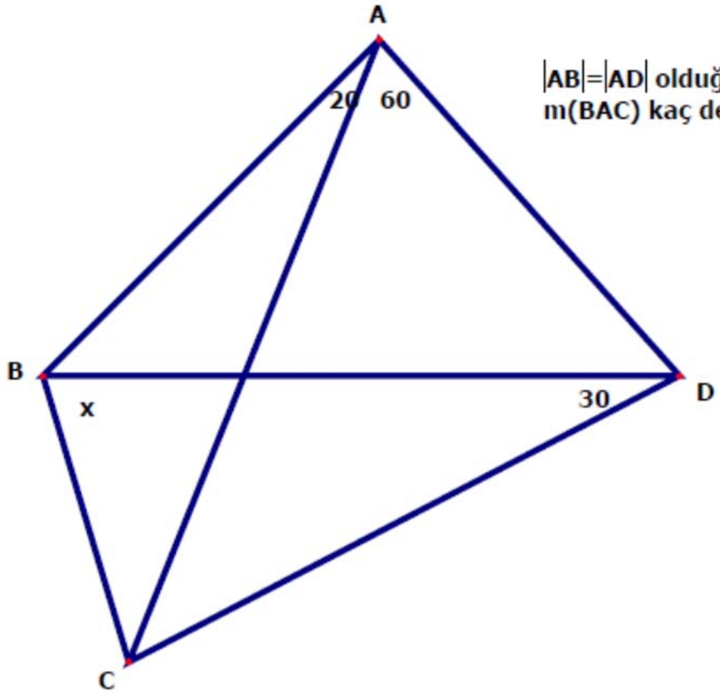
$$\sin(x-24)\cos 18 = s\,in(54+x)\cos 60$$

$$\frac{1}{2}\left[\sin(x-6)+\sin(x-42)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin(114+x)+\sin(x-6)\right]$$

sin(x – 42) = sin(66 – x)

x – 42 = 66 – x den 2x = 108 ve x = 54 bulunur.

Soru:



$|AB|=|AD|$ olduğuna göre m(BAC) kaç derecedir.

Çözüm:

Açılar yazılırsa m(ABD)=ADB)=50. m(ACD)=110 – x, m(ACD)=40 olur.

$|AB| = |AD| = b \; ve \; |AC| = c$ diyelim ve ABC ile ACD üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım

$$\frac{b}{\sin(110-x)} = \frac{c}{\sin(50+x)} \; ve \; \frac{b}{\sin 40} = \frac{c}{\sin 80}$$

Eşitlikler taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{\sin 40}{\sin(110-x)} = \frac{\sin 80}{\sin(50+x)} \; ve \; \frac{\cancel{\sin 40}}{\sin(110-x)} = \frac{2\cancel{\sin 40}\cos 40}{\sin(50+x)}$$

$$2\sin(110 - x)\cos 40 = \sin(50 + x)$$

$$\sin(110 - x)\cos 40 = \frac{1}{2}\sin(50 + x)$$

$$\sin(110 - x)\sin 50 = \sin 30 \sin(50 + x)$$

$$\cos(60 - x) - \cos(160 - x) = \cos(x + 20) - \cos(80 + x)$$

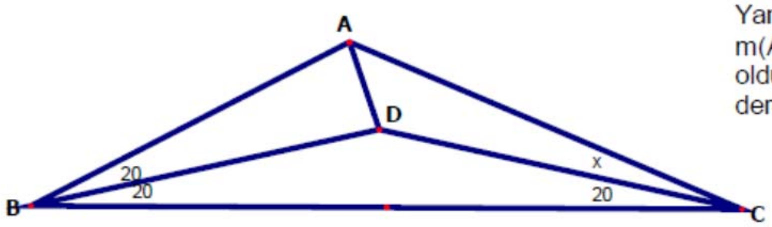
$$\cos(60 - x) + \cos(x + 20) = \cos(x + 20) + \cos(100 - x)$$

$$\cos(60 - x) = \cos(x - 100)$$

$$60 - x = x - 100$$

2x = 160 dan x = 80 buşunur.

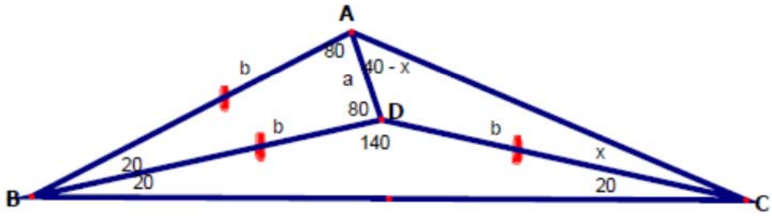
Soru:



Yandaki şekilde $|BA|=|BD|$ m(ABD)=m(DBC)=m(DCB)=20 olduğuna göre m(ACD)=x kaç derecedir.

Çözüm:

Açılar yazılırsa Şekildeki gibidir:



n(BAD)=m(BDA)=80, m(BDC)=140, m(ADC)=140 ve m(DAC) = 40 – x olur.

$|BA| = |BD| = |CD| = b$ ve $|AD| = a$ diyelim ve ABD ile ADC üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım.

ABD üçgeninde $\dfrac{a}{\sin 20} = \dfrac{b}{\sin 80}$ den $\dfrac{a}{\sin 20} = \dfrac{b}{\cos 10}$

ADC üçgeninde $\dfrac{a}{\sin x} = \dfrac{b}{\sin(40-x)}$ yazılır. Eşitlikler traf tarafa oranlanırsa

$\dfrac{\sin x}{\sin 20} = \dfrac{\sin(40-x)}{\cos 10}$ dan $\dfrac{\sin x}{2\sin 10 \cancel{\cos 10}} = \dfrac{\sin(40-x)}{\cancel{\cos 10}}$

Buradan sinx = 2sin(40 – x) sin10 olur. 2 sayısı eşitliğin öbür yanına alınırsa

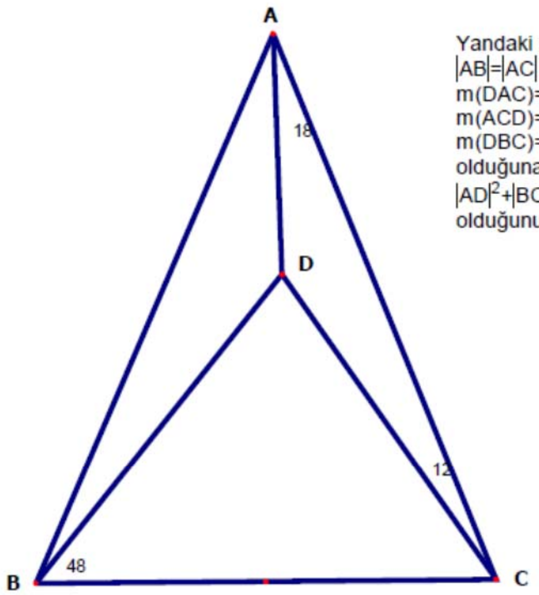
$$\frac{1}{2}\sin x = \sin(40-x)cis10$$

$$\sin 30 \sin x = \sin(40-x)\sin 10$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\left[\cancel{\cos(30-x)} - \cos(30+x)\right] = \cancel{\frac{1}{2}}\left[\cancel{\cos(30-x)} - \cos(50-x)\right]$$

cos(30 + x) = cos(50 – x) den 30 + x = 50 – x ve 2x = 20 den x = 10 olarak bulunur.

Soru:



Yandaki şekilde
$|AB|=|AC|$
m(DAC)=18
m(ACD)=12
m(DBC)=48
olduğuna göre
$|AD|^2+|BC|^2 = |DB|^2+|DC|^2$
olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Önce ABC üçgeninde açıları bulalım:
m(ABD)=x olsun. m(BCD)=36 + x olur. m(ADB= 114 + x, m((BDC)=96 – x , m(ADC)=150, olarak yazılır.

$|AB|=|AC|=b,\ |BC|=a,\ |AD|=c,\ |DB|=d\ \ ve\ |DC|=e$ diyelim.

ABD üçgeninde sinüs kuralı: $\dfrac{b}{\sin(114+x)}=\dfrac{c}{\sin x}$

ADC üçgeninde sin kuralı: $\dfrac{b}{\sin 150}=\dfrac{c}{\sin 12}$

sin150 = sin30 hyazılır ve taraf tarafa oranlanırsa $\dfrac{\sin 30}{\sin(114+x)}=\dfrac{\sin 12}{\sin x}$

$$\sin 30 \sin x = \sin 12 \sin(114 + x)$$

Burada sin18 = 2sin12 sin48 eşitliğinden sin12 hesaplanır ve yerine yazılırsa

$$\sin 30 \sin x = \frac{\sin 18}{2\sin 48}\sin(66-x)$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}\sin x = \frac{\sin 18}{\cancel{2}\sin 48}\sin(66-x)$$

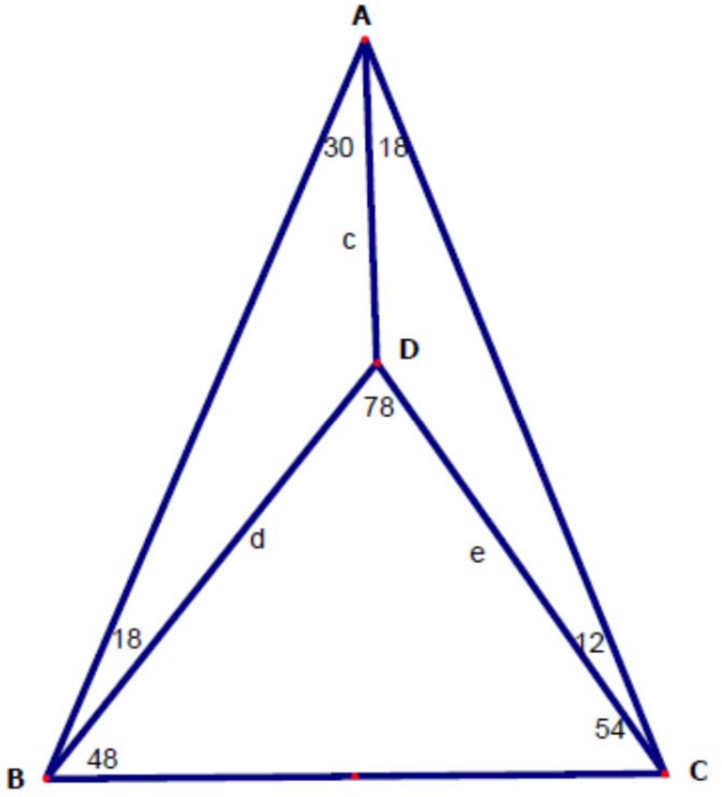
$$\sin 48 \sin x = \sin 18 \sin(66-x)$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\left[\cancel{\cos(48-x)}-\cos(48+x)\right]=\cancel{\frac{1}{2}}\left[\cancel{\cos(48-x)}-\cos(84-x)\right]$$

$$\cos(48 + x) = \cos(84 - x) \text{ den}$$

$$2x = 36 \text{ ve } x = 18 \text{ bulunur.}$$

Bundan sonra açılar yazılırsa şekildeki gibi olur:



ABD üçgeninde sinüs kuralı: $\dfrac{c}{\sin 18} = \dfrac{d}{\sin 30}$

ADC üçgeninde sinüs kuralı: $\dfrac{c}{\sin 12} = \dfrac{e}{\sin 18}$

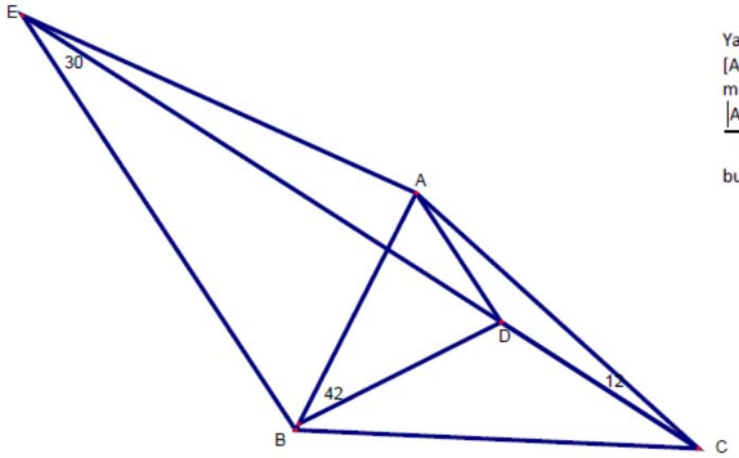
yazılır ve taraf tarafa çarpılırsa $\dfrac{c^2}{\sin 12 \cancel{\sin 18}} = \dfrac{de}{\sin 30 \cancel{\sin 18}}$ den $c^2 = 2de \sin 12$ (I) olarak bulunur.

DBC üçgeninde coj kuralı uygulanırsa

$a^2 = d^2 + e^2 - 2de\cos 78 = d^2 + e^2 - 2de\sin 12 = d^2 + e^2 - c^2$

Buradan da $a^2 + c^2 = d^2 + e^2$ yani $|BC|^2 + |AD|^2 = |DB|^2 + |DC|^2$ sonucu bulunur.

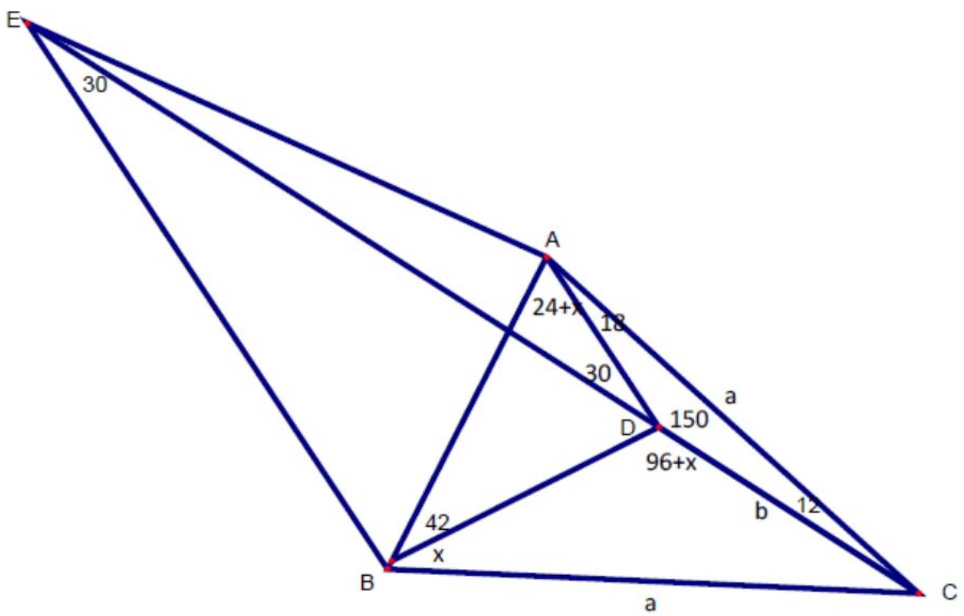
Soru:



Yandaki şekilde $|AC|=|BC|$ [AD]//[BE], m(CEB)=30, m(ABD)=42, m(ACD)=12 ise $\dfrac{|AC|+|AB|}{|CE|}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm:

Önce ABC de açıları bulalım. Paralellikten m(ACE)=30 ve m(DAC)=18 olur. m(DBC)=x denirse m(BAD)=24 + x olur. m(ADC)=150 ve m(BDC) = 96 + x olur.



$|AC| = |BC| = a,\ |CD| = b$ diyerek ADC ile BDC üçgenlerinde sinüs kuralı uygulanırsa:

ADC üçgeninde $\dfrac{a}{\sin 150} = \dfrac{b}{\sin 18}$ den $\dfrac{a}{\sin 30} = \dfrac{b}{\sin 18}$

BDC üçgeninde $\dfrac{a}{\sin(96+x)} = \dfrac{b}{\sin x}$ den $\dfrac{a}{\sin(84-x)} = \dfrac{b}{\sin x}$

Taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{\sin(84-x)}{\sin 30} = \frac{\sin x}{\sin 18} \quad den \quad \frac{\sin(84-x)}{\frac{1}{2}} = \frac{\sin x}{\sin 18}$$

sinx = 2sin(84 – x) sin18

Eşitliğin her iki yanı cos18 ile çarpılırsa

sinx cos18 = sin36 sin(84 – x)

Eşitliğin her iki yanı 2cos36 ile çarpılırsa

2sinx cos18 cos36 = sin72 sin(84 – x)

2sinx cos18 cos36 = cos18 sin(84 – x)

2sinx cos36 = sin(84 – x)

sin(x + 36) + sin(x – 36) = sin(84 – x)

sin(x – 36) = sin(84 – x) – sin(x + 36)

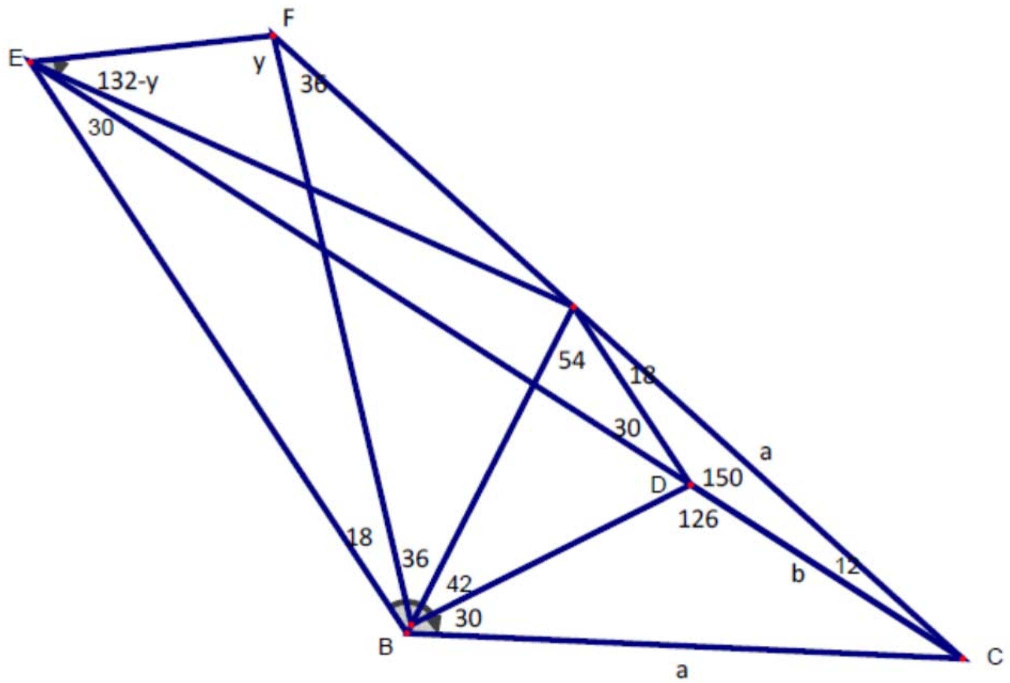
sin(x – 36) = 2cos60 sin(24 – x)

$\cos 60 = \frac{1}{2}$ olduğundan sadeleştirilirse

x – 36 = 24 – x den

2x = 60 ve x = 30 olur.

Buna göre ABC de m(ABC=m(BAC)=72, m(BAD)=54 olur. [CA üzerinde $|AF| = |AC|$ olacak şekilde bir F noktası alınır ve açılar yazılırsa aşağıdaki şekilde görüldüğü üzere m(AFB)=m(ABF)=36, m(FBE)=18, m(BFE)=y dersek m(FEB) = 162 – y ve m(FEC) = 132 – yve m(CFE)=36 + y olur.



$|EC| = l \ ve \ |CF| = k$ diyelim ve FEC ile EDC üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım:

FEC üçgeninde $\dfrac{k}{\sin(132-x)} = \dfrac{l}{\sin(36+y)}$, EDC üçgeninde $\dfrac{a}{\sin 30} = \dfrac{l}{\sin 126}$ ifadeler oranlanırsa $\dfrac{k \sin 30}{a \sin(132-y)} = \dfrac{\sin 126}{\sin(36+y)}$ *den* $\dfrac{k \sin 30}{a \sin(48+)} = \dfrac{\sin 54}{\sin(36+y)}$ olur.

Öte yandan FBC üçgeninde $\dfrac{k}{\sin 108} = \dfrac{a}{\sin 36}$ *dan* $\dfrac{k}{\sin 72} = \dfrac{a}{\sin 36}$ *ve* $\dfrac{k}{2 \sin 36 \cos 36} = \dfrac{a}{\sin 36}$

buradan da $\dfrac{k}{a} = 2\cos 36$ değeri yukarıda yerine yazılırsa

$$\frac{\cancel{2 \cos 36 \sin 30}}{\sin(48+y)} = \frac{\cancel{\cos 36}}{\sin(36+y)}$$

sin(48 + y) = sin(36 + y)

sin(48 + y) = sin(144 * y)

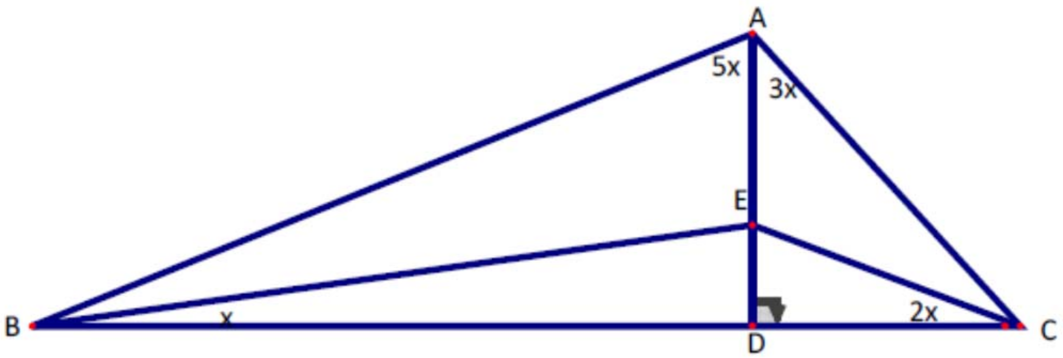
48 + y = 144 − y

2y = 96

y=48

olur. Yani CEF üçgeninde m(CFE)=36 + 48 = 84 ve m(FCE)=12 olduğundan m(FEC) = 84 olur. Bu da $|CF| = |CE|$ demektir. $|AF| = |FB| \ ve \ |CF| = |CA| + |AF| = |CA| + |AB|$ olduğundan istenen oranda yerine yazılırsa $\dfrac{|AC| + |AB|}{|CE|} = \dfrac{|AC| + |AF|}{|CE|} = \dfrac{|CF|}{|CE|} = 1$ olarak bulunur.

Soru:



Şekilde $[BC]\perp[AD]$, m(BAD)=5x, m(CAD)=3x, m(EBC)=x ve m(ECB)=2x olduğuna göre x kaç derecedir.

Çözüm:

$|BD|=a, |DC|=b, |ED|=c\ ve\ |AD|=d$ diyelim.

ABD üçgeninde $\tan 5x=\frac{a}{d}$

BDE üçgeninde $\tan x=\frac{c}{a}$

ACD üçgeninde $\tan 3x=\frac{b}{d}$

EDC üçgeninde $\tan 2x=\frac{c}{b}$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan dikkat edilirse $\tan 5x\tan x=\frac{a}{d}\cdot\frac{c}{a}=\frac{c}{d}$ ve

$\tan 3x\tan 2x=\frac{b}{d}\cdot\frac{c}{b}=\frac{c}{d}$ dir. Yani tan5x tanx = tan3x tan2x dir. Buradan

$$\frac{\sin 5x\sin x}{\cos 5x\cos x}=\frac{\sin 3x\sin 2x}{\cos 3x\cos 2x}$$

sin5x sinx cos3x cis2x = cos5x cosx sin3x sin2x

sin5x cos3x sinx cos2x = cos5x sin3x cosx sin2x

$$\frac{1}{2}\left[\sin 8x+\sin 2x\right]\frac{1}{2}\left[\sin 3x-\sin x\right]=\frac{1}{2}\left[\sin 8x-\sin 2x\right]\frac{1}{2}\left[\sin 3x+\sin x\right]$$

sin8xsin3x–sin8xsinx+sin2xsin3x–sin2xsinx = sin8xsin3x+sin8xsinx–sin2xsin3x–sin2xsinx

2sin3xsin2x = 2sin8xsinx

sin3x.2sinxcosx = sin8xsinx

2sin3xcosx = sin8x

$$2\cdot\frac{1}{2}\left[\sin 4x+\sin 2x\right]=\sin 8x$$

sin2x=sin8x – sin4x

sin2x = 2cos6xsin2x

2cos6x = 1

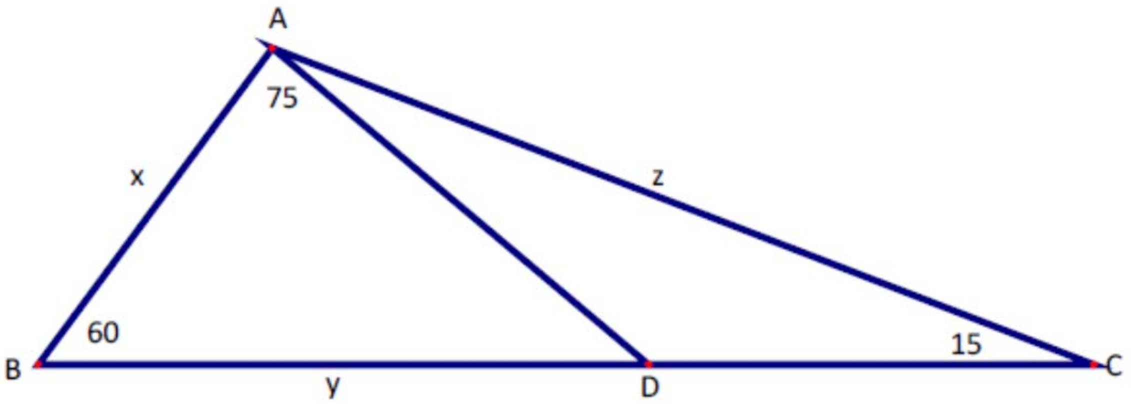
$$\cos 6x=\frac{1}{2}\ den\ \cos 6x=\cos 60$$

6x = 60

x = 10

olarak bulunur.

Soru:



Şekilde |AB|=x, |BD|=y ve |AC|=z dir. Yaılan açı ölçülerine göre $\frac{x+y}{z}$ oranının değeri kaçtır.

Çözüm:

Yazılmayan açı ölçüleri m(ADB)=45, m(DAC)=30, m(BAC)=105 dir.

ABD üçgeninde sinüs kuralı: $\frac{x}{\sin 45}=\frac{y}{\sin 75}$ *den* $\frac{y}{x}=\frac{\sin 75}{\sin 45}$ olur. Her iki yana 1 eklenirse

$$\frac{x+y}{x}=\frac{\sin 75+\sin 45}{\sin 45} \quad (I)$$

ifadesi elde edilir.

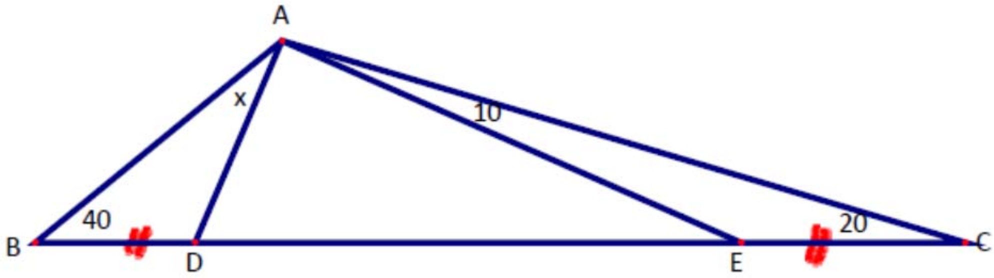
ABC üçgeninde sinüs kuralı $\frac{z}{\sin 60}=\frac{x}{\sin 15}$ *den* $\frac{z}{x}=\frac{\sin 60}{\sin 15}$ (II) olur. I ve II ifadeleri taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{\frac{x+y}{x}}{\frac{z}{x}}=\frac{\frac{\sin 75+\sin 45}{\sin 45}}{\frac{\sin 60}{\sin 15}}=\frac{2\cancel{\sin 60}\cos 15}{\sin 45}\cdot\frac{\sin 15}{\cancel{\sin 60}}=\frac{2\sin 15\cos 15}{\sin 45}$$

$$\frac{x+y}{z}=\frac{\sin 30}{\sin 45} \text{ den } \frac{x+y}{z}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

olarak bulunur.

Soru:



Şekilde |BD|=|EC|, m(ABD=40, m(EAC)=10 ve m(ACB)=20 olduğuna göre m(BAD)=x kaç derecedir..

Çözüm:

$|BD| = |EC| = a, |AB| = b \ ve \ |AC| = c$ diyelim. Açılar yazılırsa şekildeki gibi m(ADE)=40 + x , m(AED)=30 olur. Sırasıyla ABD, AEC ve ABC üçgenlerinde sinüs kuralı uygulanırsa

ABD üçgeninde $\dfrac{a}{\sin x} = \dfrac{c}{\sin(40+x)}$

AECX üçgeninde $\dfrac{a}{\sin 10} = \dfrac{b}{\sin 150}$ den $\dfrac{a}{\sin 10} = \dfrac{b}{\sin 30}$

eşitlikler taraf tarafa oranlanırsa $\dfrac{\sin 10}{\sin x} = \dfrac{c \sin 30}{b \sin(40+x)}$

ABC üçgeninde $\dfrac{c}{\sin 20} = \dfrac{b}{\sin 40}$ dan $\dfrac{c}{b} = \dfrac{\sin 20}{\sin 40}$

olur.Bu değer yukarıda yerine yazılırsa

$$\frac{\sin 10}{\sin x} = \frac{\sin 20 \sin 30}{\sin 40 \sin(40+x)}$$

$$\frac{\cancel{\sin 10}}{\sin x} = \frac{\cancel{2} \cancel{\sin 10} \cos 10 \cancel{\sin 30}}{\sin 40 \sin(40+x)}$$

sinx cos10 = sin40 sin(40 + x)

sinx cos10 = sin(40+x) cos50

$$\cancel{\frac{1}{2}}\left[\sin(x+10) + \cancel{\sin(x-10)}\right] = \cancel{\frac{1}{2}}\left[\sin(x+90) + \cancel{\sin(x-10)}\right]$$

sin(x + 10) = sin(90 – x)

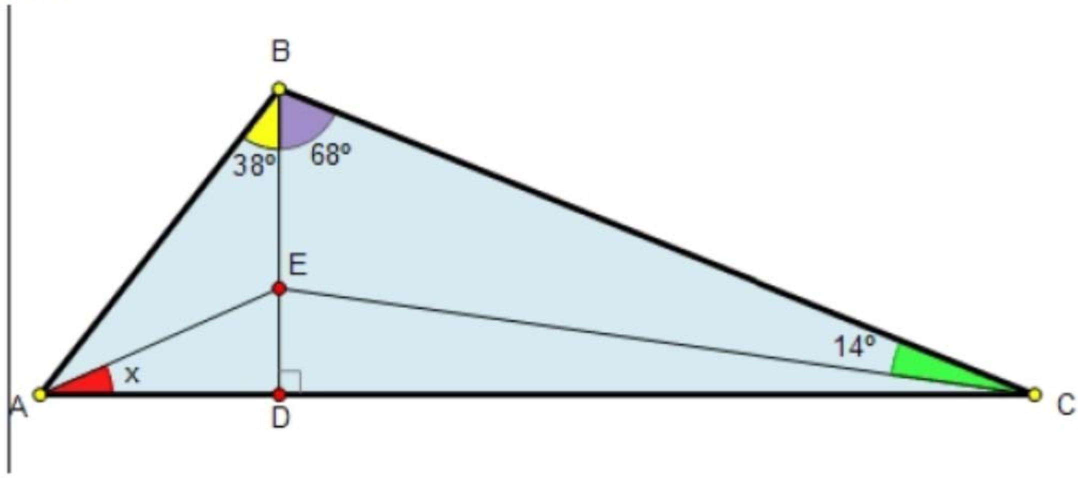
x + 10 = 90 – x

2x = 80

x = 40

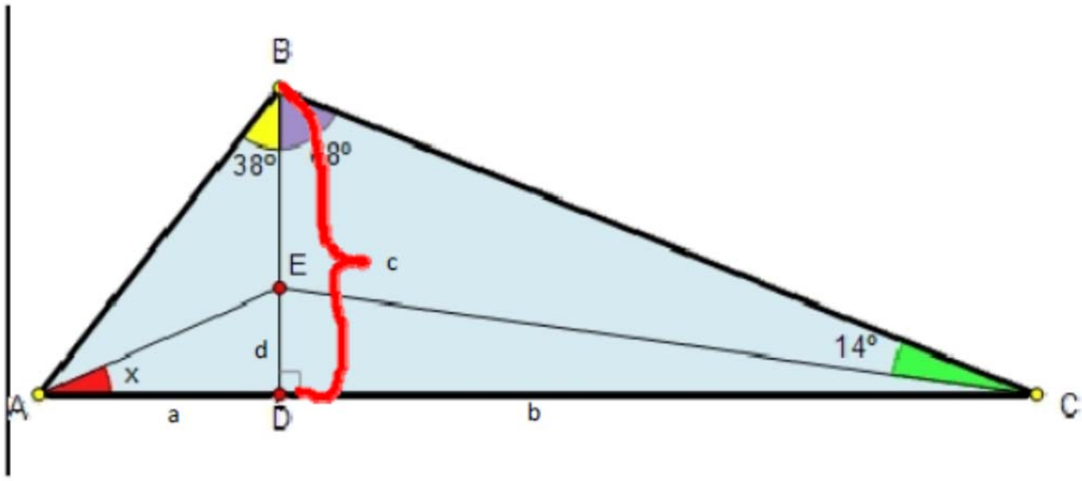
olarak bulunur.

Soru:



Yukarıdaki şekilde verilenlere göre m(EAD)=x kaç derecedir.

Çözüm:



$|AD| = a, |DC| = b, |BD| = c, |CD| = d$ diyelim.

BAD üçgeninde $\tan 38 = \dfrac{a}{c}$

EAD üçgeninde $\tan x = \dfrac{d}{a}$, ifadeleri taraf tarafa çarpılırsa $\tan x \tan 38 = \dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{d}{a} = \dfrac{d}{c}$

BCD üçgeninde $\tan 68 = \dfrac{b}{c}$

EDC üçgeninde $\tan 8 = \dfrac{d}{b}$ ifadeleri taraf tarafa çarpılırsa $\tan 68 \tan 8 = \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{d}{b} = \dfrac{d}{c}$ dir. Buradan tanx tan38 = tan68 tan8 yazılır. Yani:

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin 38}{\cos 38} = \frac{\sin 68}{\cos 68} \cdot \frac{\sin 8}{\cos 8}$$

sinx cos8 sin38 cos68 = cosx sin8 cos38 sin68

$$\frac{1}{2}\left[\sin(x+8) + \sin(x-8)\right]\frac{1}{2}\left[\sin 106 - \sin 30\right] = \frac{1}{2}\left[\sin\left(x+8\right) - \sin\left(x-8\right)\right]\frac{1}{2}\left[\sin 106 + \sin 30\right]$$

sin(x + 8) sin106 – sin(x + 8) sin30 + sin(x – 8) sin106 – sin(x – 8) sin30 = sin(x + 8) sin106 + sin(x + 8) sin30 – sin(x – 8) sin106 – sin(x – 8) sin30

2sin(x – 8) sin106 = 2sin(x + 8) sin30

2sin(x – 8) sin74 = sin(x + 8)

cos(x – 82) – cos(x + 66) = sin (x + 8)

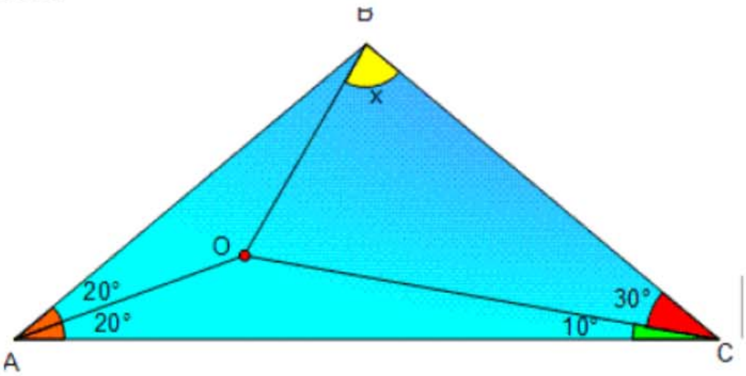
cos(82 – x) – cos(x + 66) = sin(x + 8)

sin(x + 8) – cos(x + 66) = sin(x + 8)

cos(x + 66) = 0 dan x + 66 = 90

x = 24 olur.

Soru:



Çözüm:

m(ABO)=100 – x , m(AOB)=60 + x ve m(BOC)=150 – x dir. $|BA| = |BC| = b \ ve \ |BO| = a$ diyelim ve BAO ile BCO üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım:

BAO üçgeninde $\dfrac{a}{\sin 20} = \dfrac{b}{\sin(60+x)}$

BOC üçgeninde $\dfrac{a}{\sin 30} = \dfrac{b}{\sin(150-x)}$ den $\dfrac{a}{\sin 30} = \dfrac{b}{\sin(30+x)}$ olur. Taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{\sin 30}{\sin 20} = \frac{\sin(30+x)}{\sin(60+x)}$$

$$\frac{1}{2}\cos(30-x) = \frac{1}{2}\left[\cos(10+x) - \cos(50+x)\right]$$

$$\cos(30-x) + \cos(50+x) = \cos(10+x)$$

$$2\cos 40\cos(10+x) - \cos(10+x) = 0$$

$$\cos(x+10)\left[2\cos 40 - 1\right] = 0$$

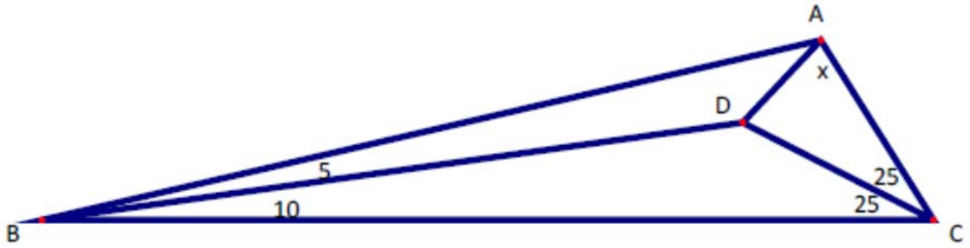
$$\cos(x+10) = 0$$

$$x + 10 = 90$$

$$x = 80$$

olarak bulunur

Soru:



Şekilde m(ABD)=5, m(DBC)=10, m(BCD)=m(ACD)=25 olduğuna göre m(DAC)=x kaç derecedir.

Çözüm:

Şekilde m(BAD)=115 – x dir. TrigoCeva uygulanırsa:

$$\sin(115-x)\sin 10 \sin 25 = \sin x \sin 5 \sin 25$$

$$2\sin(115-x)\sin 5 \cos 5 = \sin 5 \sin x$$

$$2\sin(115-x)\cos 5 = \sin x$$

$$\sin(115-x)\cos 5 = \sin x \cos 60$$

$$\frac{1}{2}\left[\sin(120-x)+\sin(110-x)\right]=\frac{1}{2}\left[\sin(60+x)+\sin(x-60)\right]$$

$$\sin(110-x) = \sin(x-60)$$

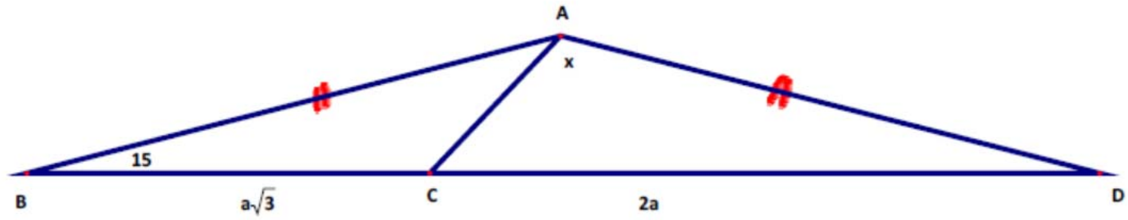
$$110-x = x-60$$

$$2x = 170$$

$$x = 85$$

olarak bulunur.

Soru:



Çözüm:

Şekilde m(ACB)=15 ve m(BAC)=150 – x dir. ABC ve ADC üçgenlerinde sinüs kuralı uygulanırsa

ABC üçgeninde $\dfrac{a\sqrt{3}}{\sin(150-x)} = \dfrac{|AD|}{\sin 15}$

ADC üçgeninde $\dfrac{2a}{\sin x} = \dfrac{|AD|}{\sin 15}$

Taraf tarafa oranlanırsa $\dfrac{\sqrt{3}\sin x}{2\sin(30+x)} = 1 \ ve\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \sin(30+x)$ yazılır. Buradan

$$\sin 60 \sin x = \sin(30 + x)$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos(60-x)-\cos(60+x)\right] = \sin(30+x)$$

$$\cos(60 - x) - \cos(60 + x) = 2\sin(30 + x)$$

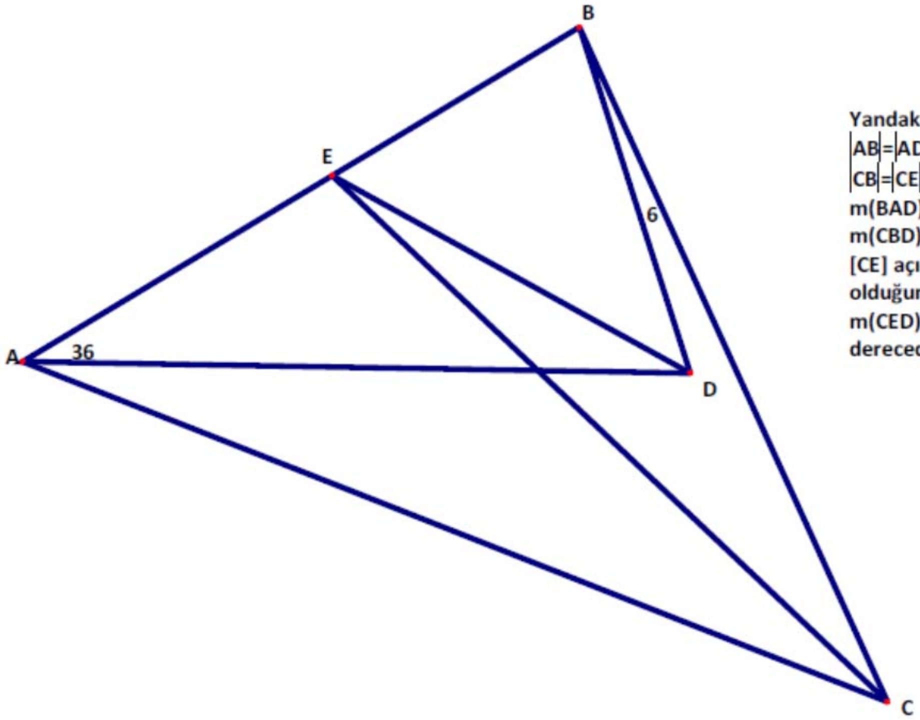
$$\cos(120 - x) = 2\cos(60 - x) - \cos(60 - x)$$

$$\cos(120 - x) = \cos(60 - x)$$

$$120 - x = x - 60$$

$$2x = 180 \text{ ve } x = 90 \text{ olur.}$$

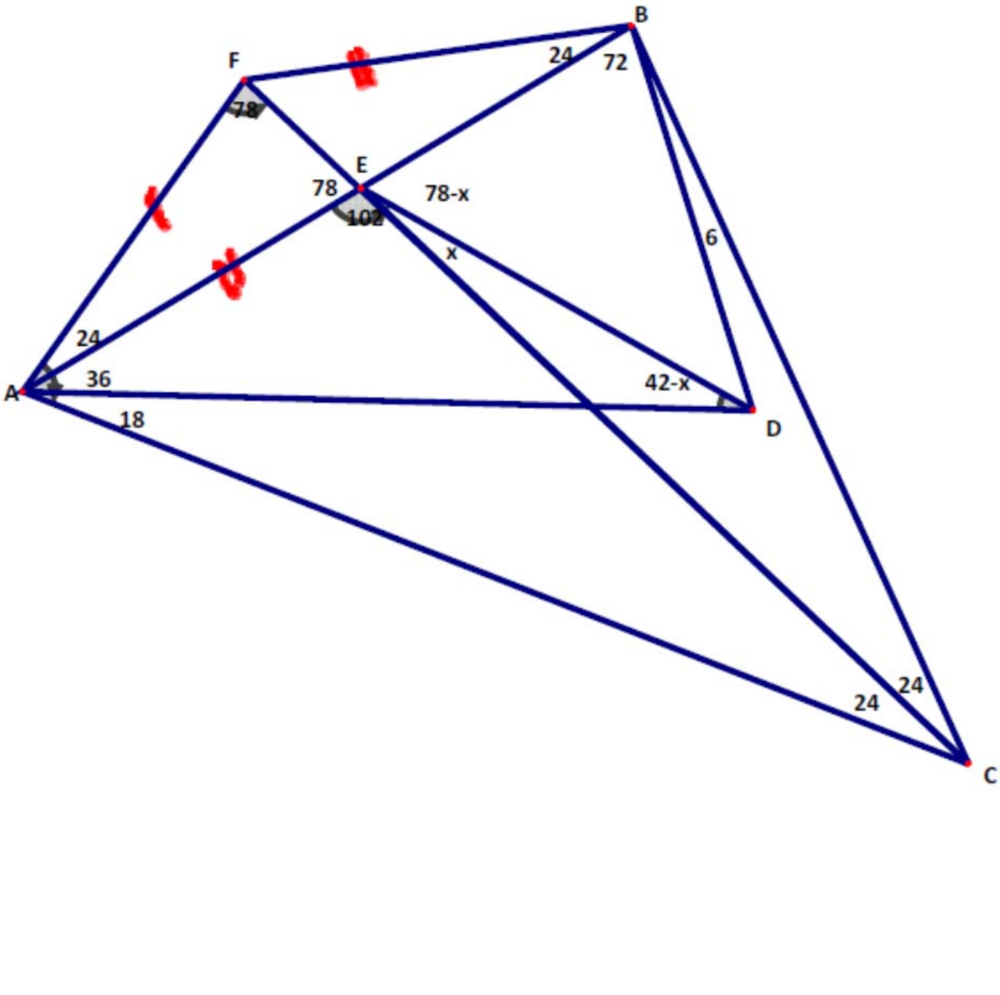
Soru:



Yandaki şekide
|AB|=|AD|
|CB|=|CE|
m(BAD)=36
m(CBD)=6
[CE] açıortay olduğuna göre m(CED) kaç derecedir.

Çözüm:

Yazılmayan açıları hesaplarsak m(ABD)=m(ADB)=72, m(ABC)=78, m(BCE)=m(EC A)=24, m(CEB)=78 , m(DAC)=18 ve m(BAC)=54 olur.



ACE açısı üzerine şekildeki gibi $|CA| = |CF|$ olacak şekilde CAF üçgeni oluşturulur ve [BF] çizilir ve açılar yazılırsa m(CAF)=m(CFA)=78, m(FAE)=24 olur. Ayrıca m(FCB)=24 olduğundan AFBC kirişler dörtgenidir. Buna göre m(FBA)=m(TCA)=24, m(AFE)=m(AEF)=78, m(AED)=102 + x, m(BED)=78 – x olacaktır. Ayrıca $|AF| = |FB| = |AE|$ olur. AED üçgeninde BED bir dış açı olduğundan m(EDA)=42 – x olur.

FAB üçgeninde $|FA| = b \; ve \; |AB| = a$ dersek EAD üçgeninde $|AE| = b \; ve \; |AD| = a$ olur. Bu üçgenlerde sinüs kuralı uygulanırsa

FAB üçgeninde $\dfrac{b}{\sin 24} = \dfrac{a}{\sin 132} \; den \; \dfrac{b}{\sin 24} = \dfrac{a}{\sin 48}$

EAD üçgeninde sinüs kuralı $\dfrac{b}{\sin(42-x)} = \dfrac{a}{\sin(102+x)} \; den \; \dfrac{b}{\sin(42-x)} = \dfrac{a}{\sin(78-x)}$

yazılır. Taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{\sin 24}{\sin(42-x)} = \frac{\sin 48}{\sin(78-x)} \; den \; \frac{\cancel{\sin 24}}{\sin(42-x)} = \frac{2\cancel{\sin 24}\cos 24}{\sin(78-x)}$$

$$2\sin(42-x)\cos 24 = \sin(78-x)$$

$$\sin(42-x)\cos 24 = \frac{1}{2}\sin(78-x)$$

$$\sin(42-x)\cos 24 = \sin 30 \cos(12+x)$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\left[\sin(66-x) + \cancel{\sin(18-x)}\right] = \cancel{\frac{1}{2}}\left[\sin(42+x) + \cancel{\sin(18-x)}\right]$$

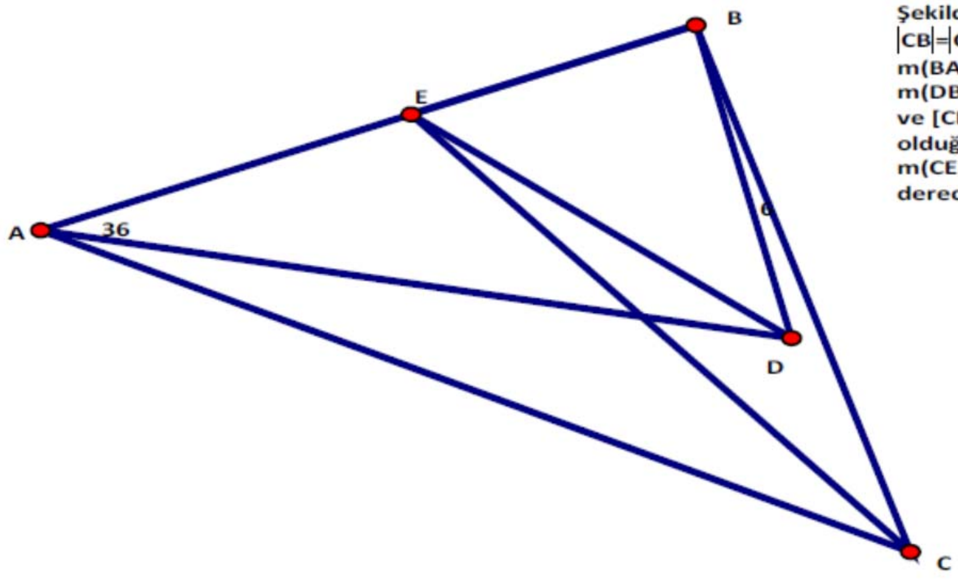
$$\sin(66-x) = \sin(42+x)$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

bulunur.

Soru:

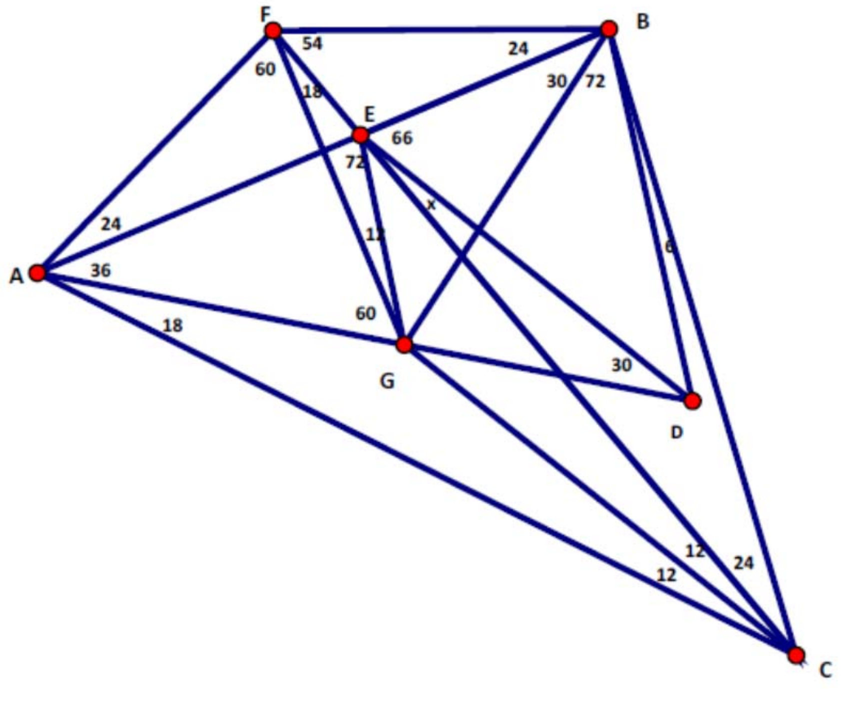


Şekilde |AB|=|AD|
|CB|=|CE|,
m(BAD)=36
m(DBC)=6
ve [CE] açıortay
olduğuna göre
m(CED)=x kaç
derecedir.

Çözüm:

Bu soruya geometriden bir çözüm

Yazılmayan açıları hesaplarsak m(ABD)=m(ADB)=72, m(ABC)=78, m(BCE)=m(EC A)=24, m(CEB)=78 , m(DAC)=18 ve m(BAC)=54 olur.



Önce CAF 24-78-78 üçgenini ve içer,s,nde CAG ve CEG 12-18-150 üçgenlerini oluşturalım.AGE üçgeni eşkenar olur. [BF] çizilirse m(FAB)=m(FCB)=24 olduğundan ACBI dörtgeni kirişler dörtgenidir ve m(FBA)=m(FCA)=24 olur. [EG] ve [BG] çizilirse aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$|FA| = |FB| = |FG| = |AG|$, AGE üçgeninde m(AEG)=m(AGE)=72, m(GFE)=18, m(FGE)=12

FGB üçgeninde m(GFB)=72, m(FGB)=m(FBG)=54, m(ABG)=30 olur.

GEBD dörtgeninde m(GEB)=108 ve m(GDB)=72 olduğundan kirişler dörtgenidir. Yani m(EBG)=m(EDG)=30 olur.

EAD üçgeninde BED dış açı olduğundan m(BED)=m(EAD) + m(EDA)=36 + 30 =66 dır.

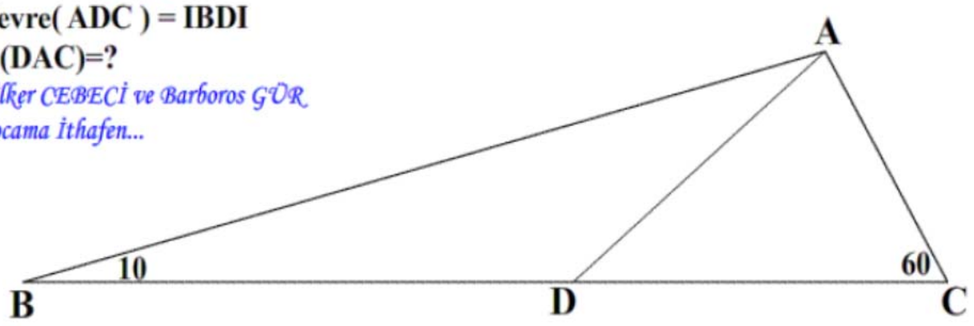
CEB üçgeninde m(CEB)=78 ve x + 66 = 78 olduğundan x = 12 olur.

Mehmet KARAYEL

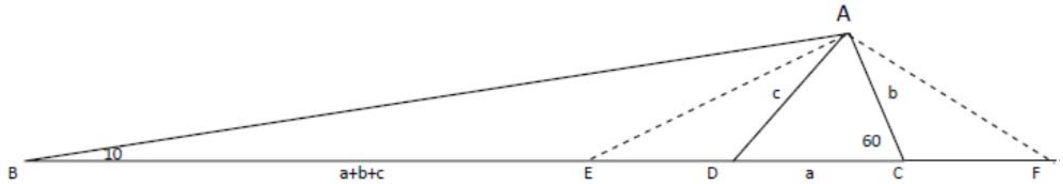
Çevre(ADC) = IBDI

m(DAC)=?

İ.İlker CEBECİ ve Barboros GÜR Hocama İthafen...



Çözüm:



Yukarıdaki şekilde m(DAC)=2x olsun , m(BAD)=110 – 2x olacaktır. BAD de Sin kuralı uygulanırsa

$\dfrac{c}{Sin10} = \dfrac{a+b+c}{\sin(110-2x)}$ olur. $|AD| = |DE|$ olacak şekilde $E \in [BD]$ işaretlenirse

m(AED)=60 – x ve $|AC| = |CF|$ olacak şekilde $F \in [BC$ işaretlenirse

$|EF| = a+b+c \ ve \ m(EAF) = 90+x$, $|AF| = b\sqrt{3}$ olur. AEF de Sin kuralı uygulanırsa

$\dfrac{b\sqrt{3}}{\sin(60-x)} = \dfrac{a+b+c}{\sin(90+x)}$ olur. Bu iki orantı taraf tarafa oranlanırsa $\dfrac{c\sin(60-x)}{b\sqrt{3}\sin 10} = \dfrac{\sin(90+x)}{\sin(110-2x)}$

ADC üçgeninde m(ADC)=120 – 2x dir. Sin kuralı uygulanırsa

$\dfrac{c}{\sin 60} = \dfrac{b}{\sin(120-2x)}$ ve $\dfrac{c}{b} = \dfrac{\sin 60}{\sin(120-2x)}$ elde edilir. Bu değer yukarıda yerine yazılır ve yarım açı formülleri uygulanırsa $\dfrac{\sin 60.\sin(60-x)}{\sqrt{3}\sin(120-2x).\sin 10} = \dfrac{\sin(90+x)}{\sin(110-2x)}$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(60-x)}{\sqrt{3}.2\sin(60-x)\cos(60-x)\sin 10} = \frac{\cos x}{\sin(110-x)}$$

$$\frac{1}{4\cos(60-x)\sin 10} = \frac{\cos x}{\sin(110-x)}$$

$$\sin(110-2x) = 4\cos(60-x)\cos x\sin 10$$

$$\sin(110-2x) = 2[\cos 60 + \cos(60-2x)]\sin 10$$

$$\sin(110-2x) = \sin 10 + 2\sin 10 cos(60-2x)$$

$$\sin(110-2x) = \sin 10 + \sin(70-2x) - \sin(50-2x)$$

$$\sin(110-2x) + \sin(50-2x) = \sin 10 + \sin(70-2x)$$

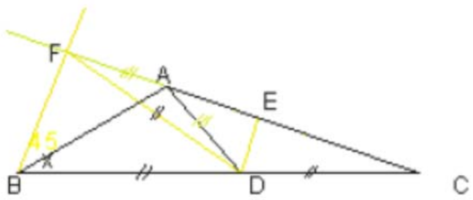
$$2\sin(80-2x)\cos 30 = 2\sin(40-x)\cos(x-30)$$

$$2\sin(40-x)\cos(40-x)\cos 30 - \sin(40-x)\cos(x-30) = 0$$

$$\sin(40-x)\left[2\cos(40-x)\cos 30 - c0s(x-30)\right] = 0$$

Buradan sin(40 – x) = 0 dan 40 – x = 0 ve x = 40 olur. Dolayısıyla m(DAC)= 2x = 80 olur.

Soru:

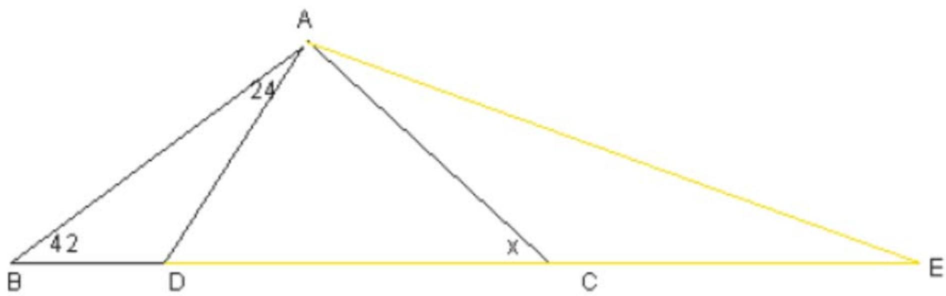


$|BD| = |DC|$
m(BAD)=105 ve m(DAC)=30
ise m(ABC)=x kaç derecedir.

Çözüm:
D noktasından [DE]⊥[AC] çizelim.
ADE üçgeninde
$|AD| = 2|DE|$ olacaktır.

[BF⊥[CA çizerek FAB dik üçgenini oluşturaxak olursak m(FBA)=m(FAB)=45 ve $|FB| = |FA|$ olacaktır. [DF] yi çizelim. FBC dik üçgeninde D, hipotenüsün orta noktası olduğundan $|FE| = 2|DE|$ ve $|FA| = |FE| = |AD|$ olur. AFD üçgeninde m(AFD)=m(ADF) olacaktır. CAD, AFD üçgeninde bir dış açıdır. Buna göre m(AFD)=m(ADF)=15 olur. [FD] FBC dik üçgeninde hipotenüse ait kenarortay olduğundan $|DF| = |DB| = |DC|$ dir. Buna göre BDF üçgeninde m(DFB)=m(DBF)=75 olacaktır. Buradan da m(ABC)=x=30 olacaktır.

Soru:



Yukarıdaki şekilde $|AB|^2 = |BD|(|BD| + 2|DC|)$ olduğuna göre m(ACB) kaç derecedir.

Çözüm:
$|AB|^2 = |BD|(|BD| + 2|DC|) = |BD|^2 + 2|BD||DC|$ ifadesinin her iki yanına $|DC|^2$ eklenirse $|AB|^2 + |DC|^2 = (|BD| + |DC|)^2 = |BC|^2$ olur. Buradan $|AB|^2 = |BC|^2 - |DC|^2$ ve

$$|AB|^2 = (|BC| - |DC|)(|BC| + |DC|) = |BD|(|BC| + |DC|)$$

sonucu elde edilir. m(DAE)=90 olacak şekilde DAE dik üçgeni çizilirse m(ADE)=66, m(AED)=26 derece olacaktır. Bu durmda BAD üçgeni ile BEA üçgenleri AA kuralı gereğince benzer olacaktuır. Benzerlik orantısı yazılırsa

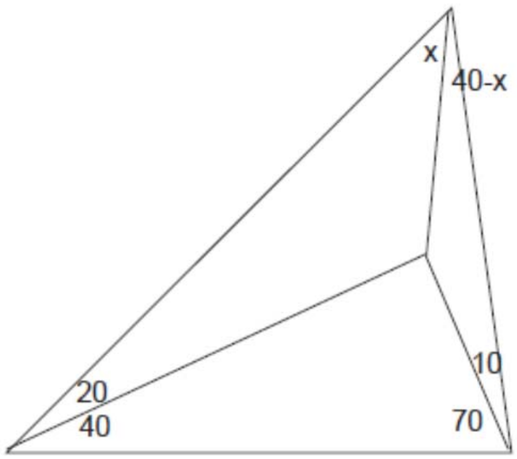
$$\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|BD|}{|AB|} \; den \; |AB|^2 = |BD||BE|$$

olarak bulunur.Yukarıdaki eşitlikle karşılaştırıldığında

$$|AB|^2 = |BD||BE| = |BD|(|BC| + |DC|) \; den$$

$$|BE| = |BC| + |CE| = |BC| + |DC| \; den \; |DC| = |CE|$$

olur. DAE dik üçgen olduğundan $|DC| = |AC| = |CE|$ olacaktır. Yani CAD üçgeni ikizkenardır. m(ADC==m(DAC)=66 ve m(ACD)=x=48 olur.



Soru:

Yandaki şekilde x kaç derecedir.

Yukarıdaki üçgende trigo-ceva uygularsak

sinx.sin40.sin10=sin(40-x).sin70.sin20

sinx.sin40.sin10=sin(40-x).cos20.sin20

$$\sin x.\sin 40.\sin 10 = \sin(40-x).\frac{2\sin 20.\cos 20}{2}$$

$$\sin x.\cancel{\sin 40}.\sin 10 = \sin(40-x).\frac{1}{2}.\cancel{\sin 40}$$

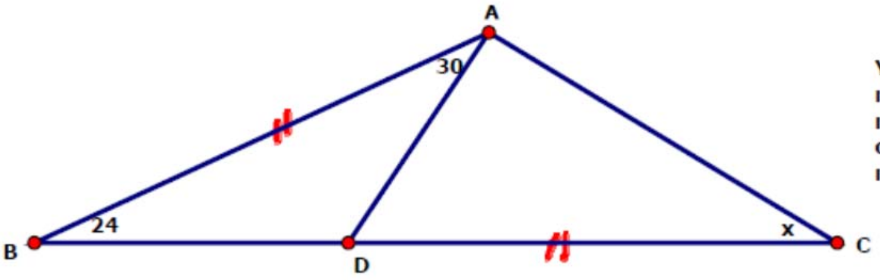
sinx.sin10=sin(40-x).sin30 ters dönüşümden

cos(x-10) - cos(x + 10)=cos(x - 10) - cos(70 - x)

cos(x + 10) = cos(70 - x)

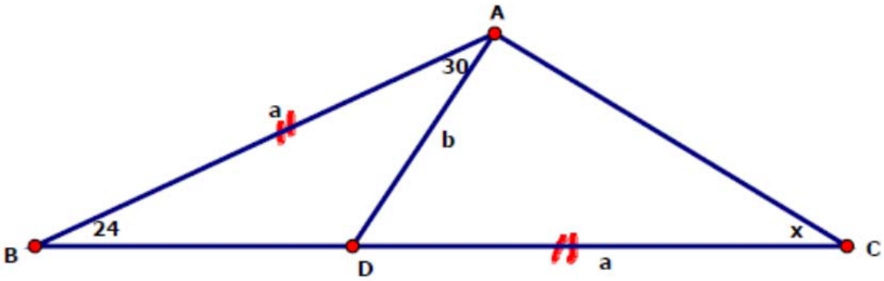
x + 10 = 70 - x den x = 30 olur.

Soru:



Yandaki şekilde |AB|=|DC|
m(BAD)=30
m(ABC)=24
olduğuna göre
m(ACB)=x kaç derecedir..

Çözüm:



ABD üçgeninde $\dfrac{a}{\sin 126}=\dfrac{b}{\sin 24}$ ve ADC üçgeninde $\dfrac{a}{\sin(126-x)}=\dfrac{b}{\sin x}$ yazılır ve taraf tarafa oranlanırsa $\dfrac{\sin(54+x)}{\sin 54}=\dfrac{\sin x}{\sin 24}$ olur. Bu orantıda gerekli düzenleme yapılırsa:

$$\sin x \sin 54 = \sin(54 + x) \sin 24$$

Ters dönüşüm uygulanır ve sadeleştirmeler yapılırsa

$$\cos(54 - x) - \cos(54 + x) = \cos(30 + x) - \cos(78 + x)$$

$$\cos(54 - x) + \cos(78 + x) = \cos(30 + x) + \cos(54 + x)$$

$$2 \cos 66 \cos(x + 12) = 2 \cos(42 + x) \cos 12$$

$$\sin 24 \cos(x + 12) = \cos(42 + x) \cos 12$$

$$2 \sin 12 \cos 12 \cos(x + 12) = \cos(42 + x)\cos 12$$

$$2\sin 12 \cos(x + 12) = \cos(42 + x)$$

$$\sin 18 = 2 \sin 48 \sin 12$$

eşitiği kullanılarak $\sin 12=\dfrac{\sin 18}{2\sin 48}$ yazılırsa

$$\sin 18 \cos(x + 12) = \sin 48 \cos(42 + x)$$

$$\sin(x + 30) + \sin(6 - x) = \sin(90 + x) + \sin(6 - x)$$

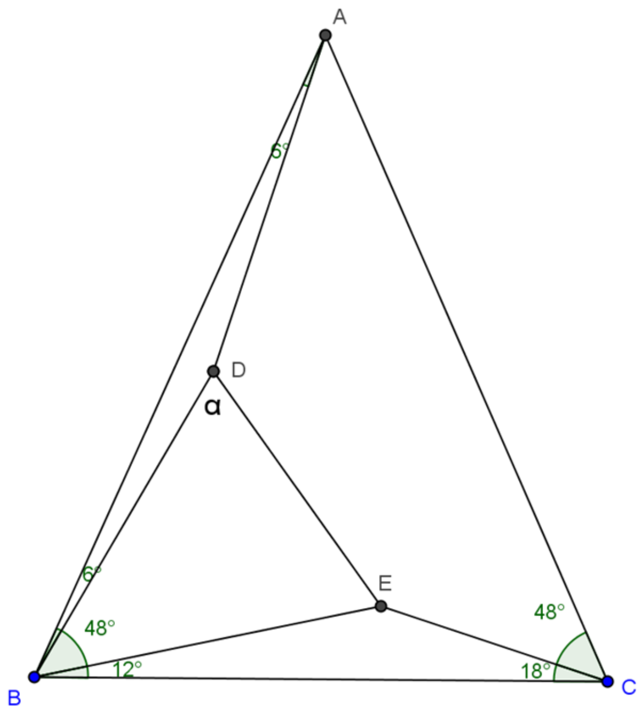
$$\sin(x + 30) = \sin(90 - x)$$

$x + 30 = 90 - x$ den $2x = 60$

$$x = 30$$

bulunur.

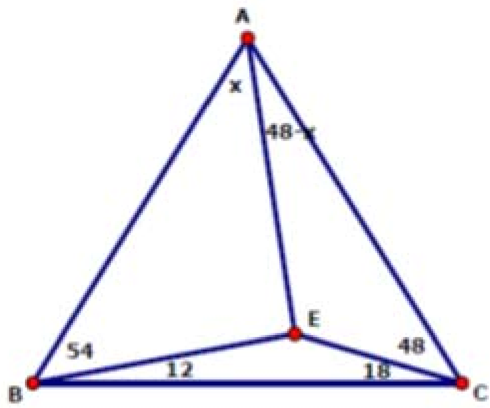
Soru:



m(ABD)=m(BAD)=6
m(DBE)=48, m(EBC)=12
m(BCE)=18 ve m(ACE)=48
olduğuna göre m(BDE) ka.
Derecedir.

Soruyu iki aşamada çözeceğiz:

1. Aşama : Şekilde [AE] cizelim yandaki şekilde ABE ve ACE üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım.



$$ABE\ de \frac{|AB|}{\sin(54+x)} = \frac{|AE|}{\sin 54}$$

$$ACE\ de \frac{|AC|}{\sin(84+x)} = \frac{|AE|}{\sin 48}$$

yazılır. ABC de $|AB| = |AC|$ olduğu görülür ve taraf tarafa oranlanırsa:

$\frac{\sin(84+x)}{\sin(54+x)} = \frac{\sin 48}{\sin 54}$ olur. Buradan sin(84+x)sin54 = sin(54+x)sin48 eşitliği yazılır. gerekli düzenlemelerle:

cos(30+x) – cos(138+x) = cos(6+x) – cos(102+x) olur. Buradan
cos(30+x) – cos(6 +x) = cos(138+x) – cos(1Dönüşüm uygulanırsa
sin(18+x)sin(12 = sin(120+x)sin18
elde edilir. Burada sin18 = 2sin12sin48 eşitliği ulanılarak

sin(18+x)sin(12 = sin(120+x)2sin12sin48

sin(18+x) sin30 = sin(60 – x) sin48 ters dönüşüm uygulanarak sadeleştirilirse

cos(x – 12) – cos(48 + x) = cos(x – 12) – cos(108 – x) sadeleştirilirse

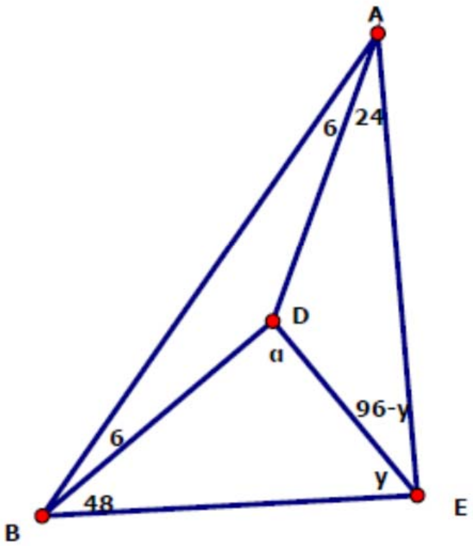
48 + x = 108 – x

2x = 60 ve x = 30

olarak bulunur.

2. Aşama: ABE üçgeninde ABD üçgenini oluşturalım ve [DE] nı çizerek şekildeki açıyı oluşturalım.

$|AD| = |BD|$ dir. ADE ve BDE üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayarak



$$ADE\,de\,\frac{|AD|}{\sin(96-y)} = \frac{|DE|}{\sin 24}$$

$$BDE\,de\,\frac{|BD|}{\sin y} = \frac{|DE|}{\sin 48}$$ yazılır. Taraf Tarafa

oranlanırsa $\dfrac{\sin 48}{\sin 24} = \dfrac{\sin y}{\sin(96-y)}$

$$\frac{2\cancel{\sin 24}\cos 24}{\cancel{\sin 24}} = \frac{\sin y}{\sin(84+y)} \quad .$$

$$2\sin(84+y)\cos 24 = \sin y$$

$$\sin(84+y)\cos 24 = \frac{1}{2}\sin y$$

$$\sin(84+y)\cos 24 = \sin y \cos 60$$

Ters dönüşüm uygulanır ve sadeleştirmeler yapılırsa

sin(108 + y) + sin(60 + y) = sin(60 + y) + sin(y – 60) ve buradan

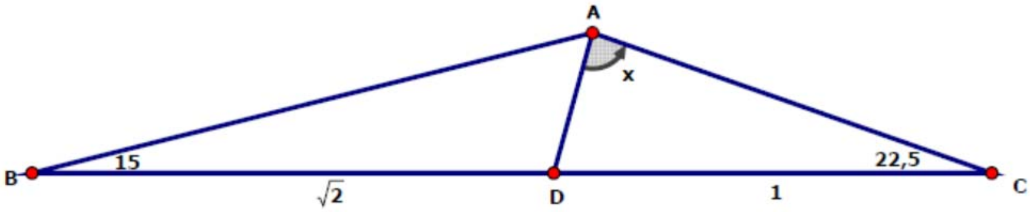
sin(72 – y) = sin(y – 60) den 72 – y = y – 60

2y = 132

y = 66 olur.

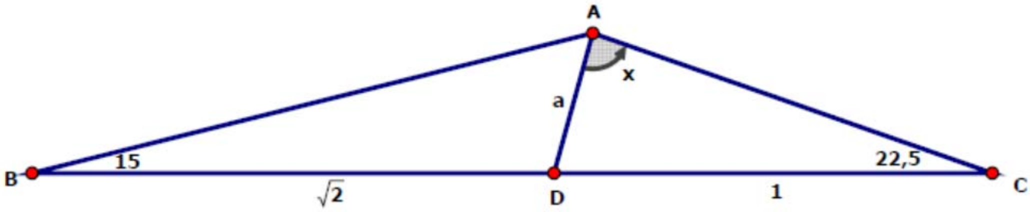
BDE üçgeninde α + y = 132 olduğundan α = 66 olarak bulunur.

Soru:



Şekilde m(ABC)=15, m(ACB)=22,5 , $|BD| = \sqrt{2}\ ve\ |CD| = 1$ olduğuna göre m(DAC) = x kaç derecedir.

Çözüm:



ABD üçgeninde $\dfrac{a}{\sin 15} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sin(142,5 - x)}$ den $a = \dfrac{\sqrt{2}\sin 15}{\sin(37,5 + x)}$ yazılır.

ACD üçgeninde $\dfrac{a}{\sin 22,5} = \dfrac{1}{\sin x}$ den $a = \dfrac{\sin 22,5}{\sin x}$ olur. Bir birine eşitlenir ve içler dışlar çarpımı yapılırsa:

$$\sqrt{2}\sin 15 \sin x = \sin(37,5)\sin 22,5$$

$$\sqrt{2}\sin(45-30)\sin x = \frac{1}{2}\left[\cos(x+15) - \cos(x+60)\right]$$

$$\sqrt{2}\left[\sin 45\cos 30 - \cos 45 \sin 30\right]\sin x = \frac{1}{2}\left[\cos(x+15) - \cos(x+60)\right]$$

$$\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 30 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 30\right]\sin x = \frac{1}{2}\left[\cos(x+15) - \cos(x+60)\right]$$

$$\sin x \cos 30 - \sin x \sin 30 = \frac{1}{2}\left[\cos(x+15) - \cos(x+60)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\sin(x+30) + \sin(x-30)\right] - \frac{1}{2}\left[\cos(x-30) - \cos(x+30)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos(x+15) - \cos(x+60)\right]$$

$$\sin(x + 30) \cancel{- \sin(30 - x)} - \cos(x - 30) + \cos(x + 30) = \cos(x + 15) \cancel{- \cos(x + 60)}$$

$$\sin(x + 30) - \cos(x - 30) + \sin(60 - x) = \cos(x + 15)$$

$$\sin(x + 30) + \sin(60 - x) = \cos(x + 15) + \cos(x - 30)$$

$$2\sin(45)\cos(x-15)=2\cos(x-7,5)\cos(22,5)$$

$$2\sin 22,5\ \cos 22,5\ \cos(x-15) = \cos(x-7,5)\ \cos 22,5$$

$$\sin 22,5\ \cos(x-15) = \sin 30\ \cos(x-7,5)$$

$$\frac{1}{2}\left[\sin(x+7,5)+\sin(37,5-x)\right]=\frac{1}{2}\left[\sin(x+22,5)+\sin(37,5-x)\right]$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\sin(x + 7,5) = \sin(x + 22,5)$$

$$\sin(x + 7,5) = \sin(157,5 - x)$$

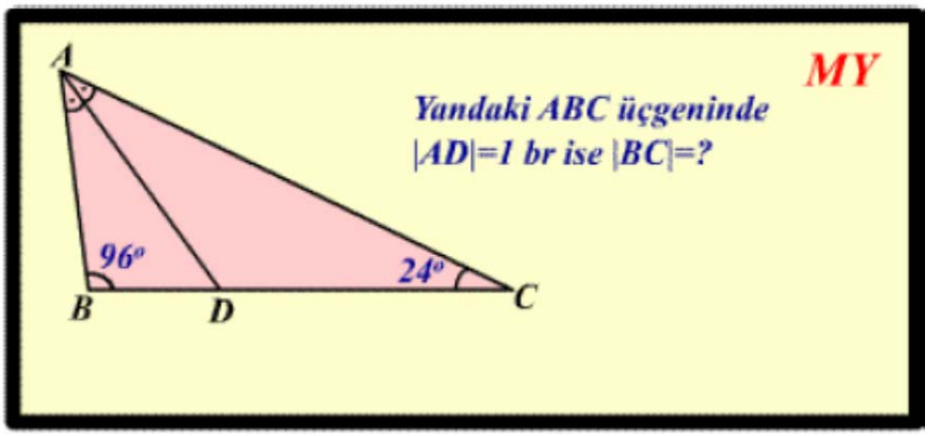
$$x + 7,5 = 157,5 - x$$

$$2 = 150 \text{ ve } x = 75$$

olarak bulunur.

Soru:

Zihin bulandıran sorular 2.



Çözüm:

Şekilde m(BAD) = m(DAC) = 30 $|AD| = 1, |BC| = a\ ve\ |AC| = b$ diyelim. ABC ve ADC üçgenlerinde sinüs kuralı uygulanırsa

$$\frac{a}{sin60} = \frac{b}{sin96}\ ve\ \frac{1}{sin24} = \frac{b}{sin126}$$

Bu orantılar taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{asin24}{sin60} = \frac{sin126}{sin96}\ ve\ \frac{asin24}{sin60} = \frac{cos36}{sin84}$$

$$a = \frac{sin60cos36}{sin84sin24} = \frac{\sqrt{3}cos36}{2cos6sin24} = \frac{\sqrt{3}cos36}{sin30 + sin28}$$

Burada sin18 = 2sin12sin48=cos36-cos60 eşitliği yazılırsa

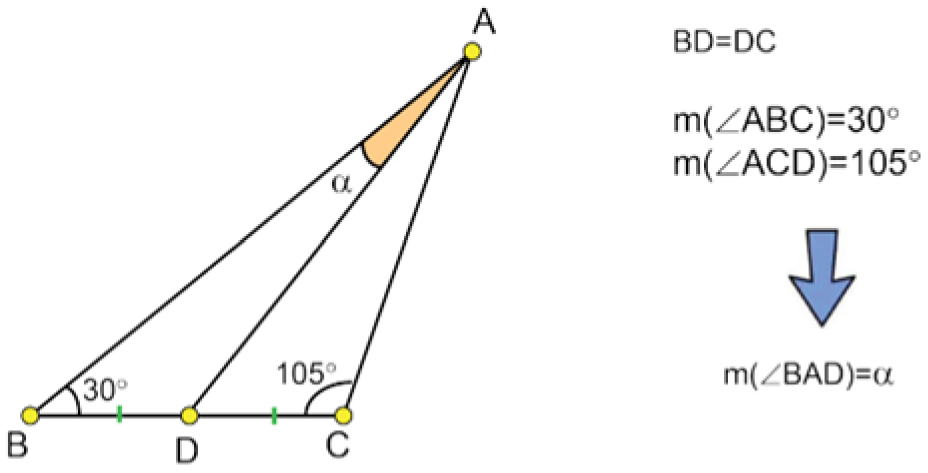
$$a = \frac{\sqrt{3}cos36}{sin30 + cos36 - cos60} = \frac{\sqrt{3}cos36}{cos36}$$

Ve buradan

$$a = \sqrt{3}$$

Olarak bulunur.

Soru:



Çözüm:
Şekilde m(BAC)=45, m(DAC)=45 – α dır. $|BD| = |DC| = a\ ve\ |AD| = b$ diyerek ABD ve ADC üçgenlerinde sinüs kuralı uygulanırsa

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin30}\ ve\ \frac{a}{\sin(45-\alpha)} = \frac{b}{sin105}$$

Bu orantılar taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{\sin(45-\alpha)}{sin\alpha} = \frac{sin75}{sin30}$$

$$sin\alpha sin75 = sin30\sin(45-\alpha)$$

eşitlikleri yazılır. Buradan

$$\frac{1}{2}[\cos(75-\alpha) - \cos(75+\alpha)] = \frac{1}{2}\cos(45+\alpha)$$

$$\cos(75-\alpha) = \cos(45+\alpha) + \cos(75+\alpha)$$

$$\cos(75-\alpha) = 2\cos(60+\alpha)\,cos15$$

olur. Her iki yan sin15 ile çarpılırsa

$$\cos(75-\alpha)\,sin1 = \cos(60+\alpha)\,sin30$$

$$\sin(15+\alpha)\,sin15 = \sin(30-\alpha)\,sin30$$

$$cos\alpha - \cos(30+\alpha) = cos\alpha - cos(60-\alpha)$$

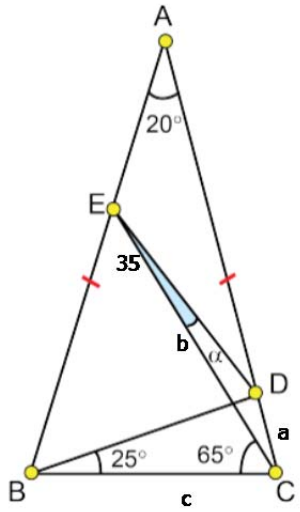
eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikten

30 + α = 60 – α

2α=30 ve α = 15

elde edilir.

Soru:



Şekilde $|AB| = |AC|$, m(BAC)=20, m(CBD)=25, m(BCE)=65 olduğuna göre m(CED) kaç derecedir.

Çözüm:

Şekilde m(BDC)=75 dir. ECD üçgeninde sinüs kuralı uygulayalım $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin(15+\alpha)}$, BCD üçgeninde sinüs kuralı uygulayalım $\dfrac{a}{\sin 25} = \dfrac{c}{\sin 75}$ olur. Bu iki orantı taraf tarafa oranlanırsa

$\dfrac{\sin 25}{\sin\alpha} = \dfrac{b\sin 75}{c\sin(15+\alpha)}$ yazılır. EBC üçgeninde sinüs kuralı uygulanırsa

$\dfrac{b}{\sin 80} = \dfrac{c}{\sin 35}$ *den* $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin 80}{\sin 35}$ olur. yukarıdaki orantıda yerine yazılırsa

$\dfrac{\sin 25}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin 80\sin 75}{\sin 35\sin(\alpha+15)}$ eşitliği elde edilir. Bu orantıda gerekli işlemler yaoılırsa

$$sin35sin25\sin(15+\alpha) = sin80sin75sin\alpha$$

$$\frac{1}{2}[cos10 - cos60]\sin(15+\alpha) = \frac{1}{2}[cos5 - cos155]sin\alpha$$

$$\sin(15+\alpha)\,cos10 - \sin(15+\alpha)\,cos60 = sin\alpha cos5 + sin\alpha cos25$$

$$\sin(25+\alpha) + \sin(5+\alpha) - \sin(75+\alpha) - \sin(\alpha-45)$$
$$= \sin(5+\alpha) + \sin(\alpha-5) + \sin(25+\alpha) + \sin(\alpha-25)$$

$$-\sin(75+\alpha) + \sin(45-\alpha) = -\sin(5-\alpha) + \sin(\alpha-25)$$

$$\sin(45-\alpha) + \sin(5-\alpha) = \sin(75+\alpha) + \sin(\alpha-25)$$

$$2\sin(25-\alpha)\,cos20 = 2\sin(25+\alpha)\,cos50$$

$$\sin(25-\alpha)\,cos20 = \sin(25+\alpha)\,sin40$$

$$\sin(25-\alpha)\,cos20 = 2\sin(25+\alpha)\,2sin20cos20$$

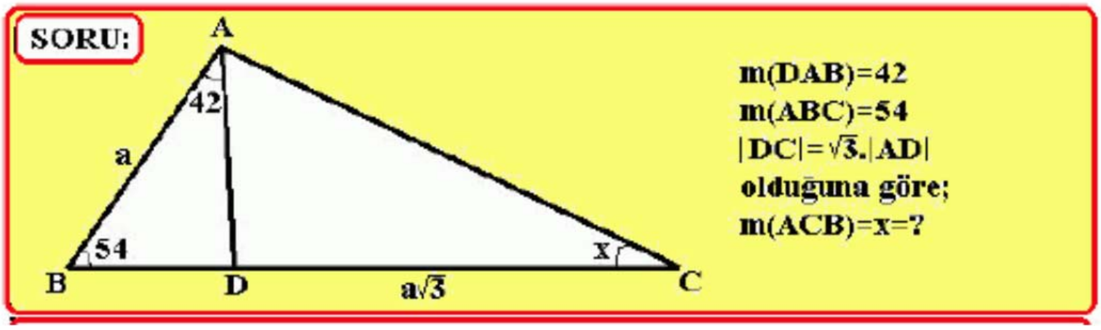
$$\sin(25-\alpha)\frac{1}{2} = \sin(25+\alpha)\,sin20$$

$$\sin(25-\alpha)\,sin30 = \sin(25+\alpha)\,sin20$$

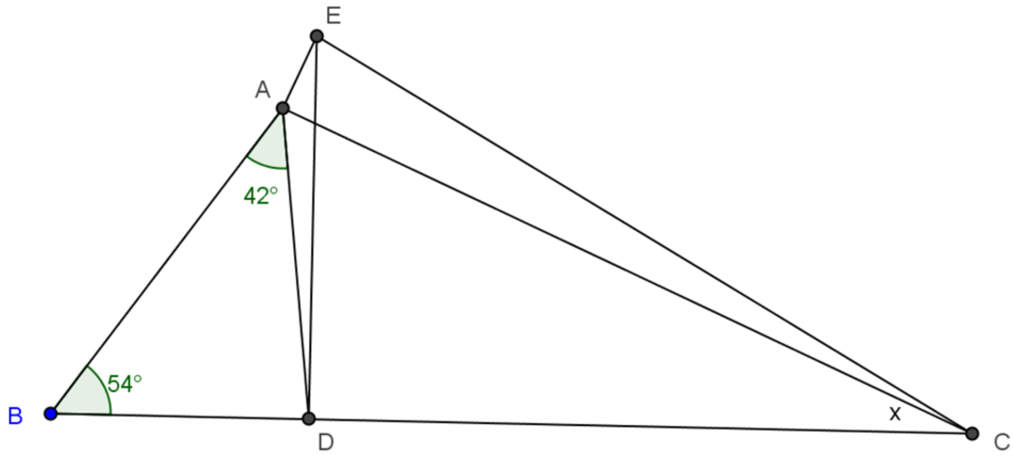
$$\frac{1}{2}[\cos(5+\alpha) - \cos(55-\alpha)] = \frac{1}{2}[\cos(5+\alpha) - \cos(45+\alpha)]$$

55 – α = 45 + α

2α = 10 ve α = 5 olarak bulunur.



Çözüm:



$[DE]\perp[BC]$ ve $|DE| = 1$ olacak şekilde EDC ve EAD üçgenlerini oluşturalım. m(ADE)=6, m(DCE)=30 olur. m(DEA)=α diyelim ve ADE ile ABD üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım.

$$|AD| = a\ diyelim\ \frac{1}{sin\alpha} = \frac{a}{\sin(6+\alpha)}, \frac{1}{sin84} = \frac{a}{sin54}$$

Taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{sin84}{sin\alpha} = \frac{sin54}{\sin(\alpha+6)}\ ve\ \frac{cos6}{sin\alpha} = \frac{cos36}{\sin(\alpha+6)}$$

Gerekli düzenleme yapılır ve ters dönüşüm uygulanırsa

$$\sin(\alpha+12) + sin\alpha = \sin(\alpha+36) + \sin(\alpha-36)$$

$$\sin(\alpha+12) - \sin(\alpha-36) = \sin(\alpha+36) - sin\alpha$$

$$2\cos(\alpha-12)\,sin24 = 2\cos(\alpha+18)\,sin18$$

$$cos(\alpha-12)2sin12cos12 = cos(\alpha+18)2sin12sin48$$

$$cos(\alpha-12)cos12 = cos(\alpha+18)cos42$$

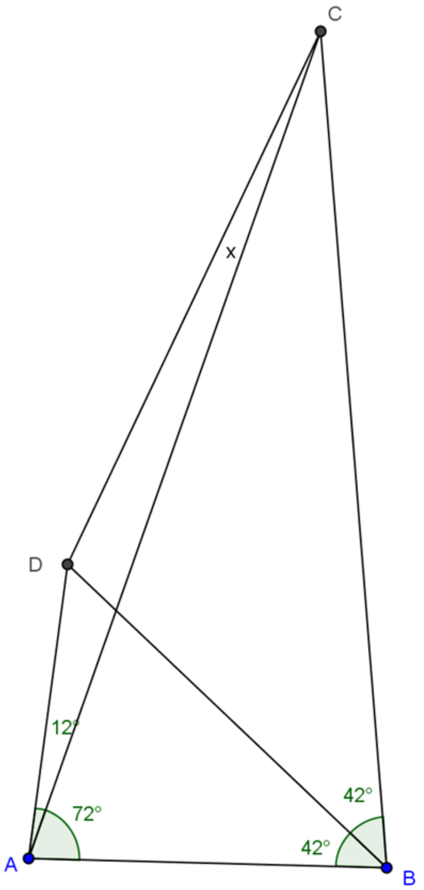
$$cos\alpha + cos(\alpha-24) = cos(\alpha+60) + cos(\alpha-24)$$

$$cos\alpha = cos(360-\alpha-60)$$

$$2\alpha = 300\ ve\ \alpha = 150$$

Olur. Bu ise ADCE dörtgeninin bir kirişler dörtgeni olduğu anlamıma gelir. Yani m(ADE)=m(ACE)=6 olacaktır. m(DCE)=m(DCA)+m(ACE)=x+6=30 dan x=24 olur.

Soru:



Şekilde m(ABD)=42, m(DBC)=42, m(CAB)=72 ve m(DAC)=12 ise m(ACD)=x kaç derecedir.

Çözüm:

DAB üçgeninde m)ADC)=54 ve m(ACB)=24 dir. $|DA| = a, |DB| = b \ ve \ |DC| = c$ diyelim ve DAB, DBC ve ADC üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım:

$$\frac{a}{sin42} = \frac{b}{sin84}, \frac{b}{\sin(x+24(} = \frac{c}{sin42} \ ve \ \frac{a}{sinx} = \frac{c}{sin12}$$

İlk ikisi taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{a}{c} = \frac{xis(x+24)}{sin84}$$

Ve üçüncü orantıdan

$$\frac{a}{c} = \frac{sinx}{sin12}$$

Eşitlenirse

$$\frac{\sin(x+24)}{cos6} = \frac{sinx}{2sin6cos6}$$

$$2sin6\sin(24+x) = sinx$$

$$\sin(x+24) \, sin6 = sin30sinx$$

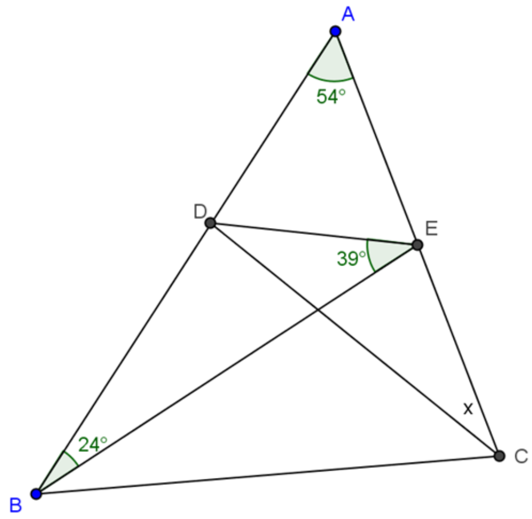
$$\cos(18+x) - \cos(30+x) = \cos(30-x) * \cos(30+x)$$

$$18 + x = 30 - x$$

$$2x = 12 \ ve \ x = 6$$

Olur.

Soru:



Yandaki şekilde $|BE| = |EC|$, m(BAC)=54, m(ABE)=24, m(BED)=39 olduğuna göre m(ACD)=x kaç derecedir.

Çözüm:

Şekilde m(ADE)=m(AED)=63 dür. $|AD| = |AE| = a\ ve\ |BE| = |AC| = b$ diyelim, ABE ve ACD üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım;

$$\frac{a}{sin24} = \frac{b}{sin54}\ ve\ \frac{a}{sinx} = \frac{b}{\sin(54+x)}$$

Taraf tarafa oranlanırsa:

$$\frac{sinx}{sin24} = \frac{\sin(54+x)}{sin54}$$

$$sin54sinx = \sin(54+x)\,sin24$$

$$\cos(54-x) - \cos(54+x) = \cos(30+x) - \cos(78+x)$$

$$\cos(54-x) + \cos(78+x) = \cos(30+x) + \cos(54+x)$$

$$2cos66\cos(12+x) = 2cos42+x)cos12$$

$$sin24\cos(12+x) = \cos(42+x)\,cos12$$

$$2sin12cos12cos(12+x) = \cos(42+x)\,cos12$$

$$2sin12\cos(12+x) = \cos(42+x)$$

Burada $sin18 = 2sin12sin48$ eşitliği kullanılırsa

$$\frac{sin18}{sin48}\cos(12+x) = \cos(42+x)$$

$$sin18\cos(12+x) = sin48\cos(42+x)$$

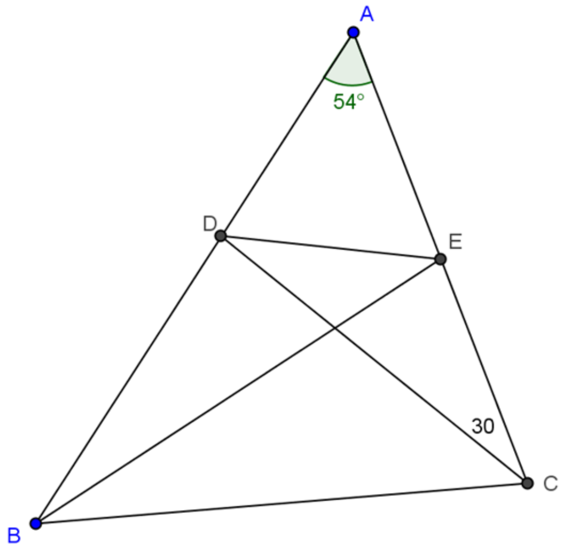
$$\sin(30+) + \sin(6-x) = \sin(90-x) + \sin(6-x)$$

$$30 + x = 90 - x$$

$$2x = 60\ ve\ x = 30$$

Olarak bulunur.

Soru:



Şekilde $|AD| = |AE|, |BE| = |AC|$ ve m(BAC)=54, m(ACD)=30 olduğuna göre m(ABE)=x kaç derecedir.

Çözüm:

Burada $4sinxsin(60-x)\sin(60+x) = sin3x$ eşitliğini kullanacağız. Önce bu eşitliğin ispatını görelim. Bu ispat Ali Ergin Ustaya aittir.

$$sin3x = \sin(2x+x) = sin2xcosx + cos2xsinx$$
$$= 2sinxcosxcosx + (1-2sin^2x)sinx$$
$$= 2sinx(1-sin^2x) + sinx - 2sin^3x$$
$$= 3sinx - 4sin^3x$$

Olduğu biliniyor. Ayrıca;

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = sin^2acos^2b - cos^2asin^2b$$
$$= sin^2a(1-sin^2b) - (1-sin^2a)sin^2b$$
$$= sin^2a - sin^2b$$

Olur. Burada a=60 yazılırsa

$$\sin(60-b)\sin(60+b) = \frac{3}{4} - sin^2b$$

b=x yazalım ve eşitliğin her iki yanını 4sinx ile çarpalım:

$$4sinxsin(60-x)\sin(60+x) = 3sinx - 4sin^3x = sin3x$$

Olur.

Şimdi soruya dönelim:

$|AD| = |AE| = b, |AC| = |BE| = a$ diyelim ve ABE ile ACD üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım:

$$\frac{b}{sinx} = \frac{a}{sin54}, \frac{b}{sin30} = \frac{a}{sin84}$$

Taraf tarafa oranlanırsa:

$$\frac{sin30}{sinx} = \frac{cos6}{sin54}\ den\ sinxcos6 = sin30sin54$$
$$sinx = \frac{sin54}{2cos6}$$

Olur. Yukarıdaki eşitlikte x yerine 6 yazalım: $4sin6sin54sin6 = sin18$ olur. Buradan

$$sin54 = \frac{sin18}{4sin6sin66}$$

Eşitliği yazılır. $sin18 = 2sin12sin48$ olduğu dikkate alınarak yerine yazılırsa

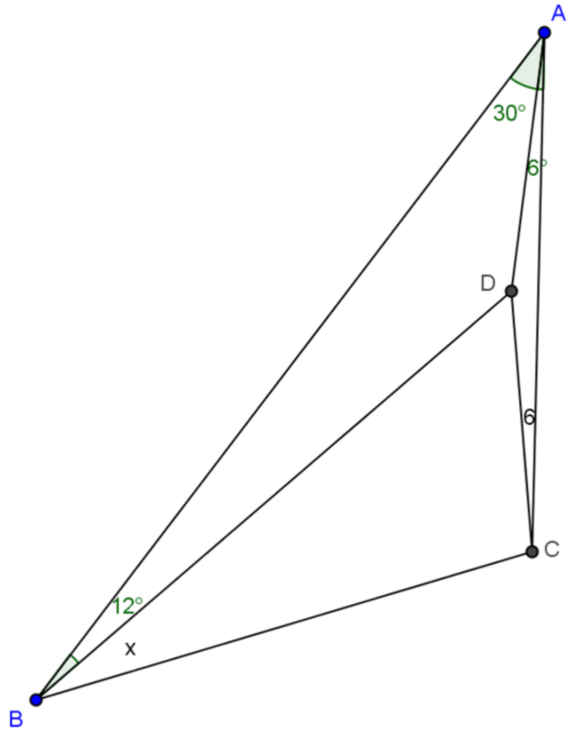
$$sinx = \frac{sin18}{8cos6sin6sin66} = \frac{2sin12sin48}{4sin12cos24} = \frac{2sin24cos24}{2cos24}$$

$$sinx = sin24$$

$$x = 24$$

Olarak bulunur.

Soru:



$m(DAC) = m(DCA) = 6$
$m(BAD) = 30, m(ABD) = 12$
Olduğuna göre m(DBC)=x kaç derecedir.

Çözüm:

$|AD| = |CD| = a\ ve\ |BD| = b$ diyerek ABD ve DBC üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım:

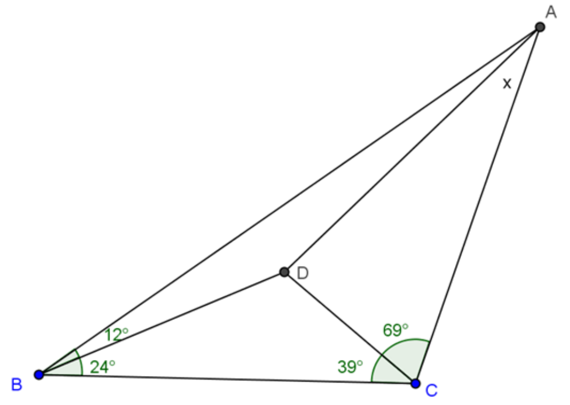
$$\frac{a}{sin12} = \frac{b}{sin30}\ ve\ \frac{a}{sinx} = \frac{b}{\sin(54+x)}$$

Taraf tarafa oranlanırsa

$$\frac{sinx}{sin12} = \frac{\sin(54+x)}{sin30}$$
$$sinxsin30 = \sin(54+x)\,sin12$$
$$sinx = 2sin12\sin(54+x)$$
$$sinxcos12 = \sin(54+x)\,sin24$$
$$sin78sinx = \sin(54+x)\,sin24$$
$$\cos(78-x) - \cos(78+x) = \cos(30+x) - \cos(78+x)$$
$$78 - x = 30 + x$$
$$2x = 48\ ve\ x = 24$$

Olur.

Soru:



Şekilde $|CB| = |CA|$, m(DBC)=24, m/DBA)=12, m(DCA)=69 olduğuna göre m(DAC)=x ka. Derecedir.

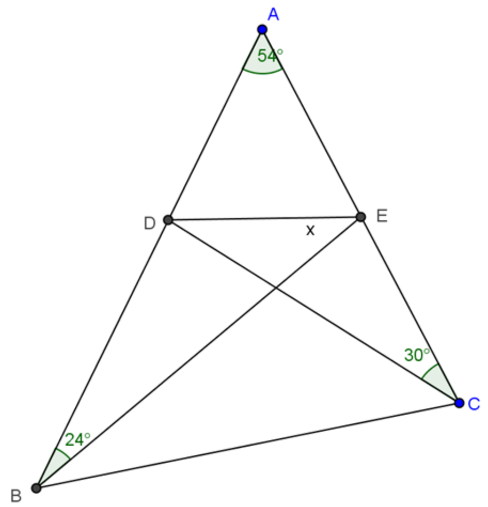
Çözüm:

ABC m(BAD)=36-xdir, üçgeninde trigoceva uygulanırsa:

$$\sin(36-x)\, sin24 sin69 = sinx sin12 sin39$$
$$\sin(36-x)\, 2sin12 cos12 sin69 = sinx sin12 sin39$$
$$\sin(36-x)\, sin78 sin69 = sinx sin39 \frac{1}{2}$$
$$\sin(36-x)\, sin78 sin69 = sinx sin39 sin30$$
$$\sin(36-x)\, [cos9 - cos147] = sinx[cos9 - cos69]$$
$$\sin(36-x)\, cos9 + \sin(36-x)\, cos33 = sinx cos9 - sinx cos69$$
$$\sin(45-x) + \sin(27-x) + \sin(3-x) + \sin(69-x)$$
$$= \sin(x+9) + \sin(x-9) - \sin(x+69) - \sin(x-69)$$
$$\sin(45-x) + \sin(27-x) + \sin(3-x) + \sin(69-x)$$
$$= \sin(x+9) + \sin(x-9) - \sin(x+69) + \sin(69-x)$$
$$\sin(45-x) - \sin(x-9) + \sin(27-x) - \sin(x+9) + \sin(3-x) + \sin(x+69) = 0$$
$$2cos18 \sin(27-x) + \sin(27-x) + \sin(3-x) + 2\cos(x+39)\, sin30 = 0$$
$$2cos18 \sin(27-x) + \sin(27-x) + \sin(3-x) + \sin(51-x) = 0$$
$$2cos18 \sin(27-x) + \sin(27-x) + 2\sin(27-x)\, cos24 = 0$$
$$\sin(27-x)\, [2cos18 + 1 + 2cos24] = 0$$
$$\sin(27-x) = 0$$
$$27 - x = 0\ dan\ x = 27$$

Olur.

Soru:



Şekilde $|AC| = |BE|$, m(BAC)=54 m(ACD)=30, m(ABE)=24 olduğuna göre m(BED)=x kaç derecedir.

Çözüm:
$|AC| = |BE| = a, |AD| = c\ ve\ |AE| = b$ diyelim ve ABE ile ACD üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım;

$$\frac{b}{sin24} = \frac{a}{sin54}, \frac{c}{sin30} = \frac{a}{sin84}$$

Taraf tarafa oranlanırs;

$$\frac{bsin30}{csin24} = \frac{sin84}{sin54}\ den\ \frac{b}{c} = \frac{2sin24sin84}{sin54}$$

Olarak yazıır. Burada 4sinasin(60 – a)sin(60+a)=sin3a eşitliğinde a=24 yazılarak

$$4sin24sin36sin84 = sin72$$
$$4sin24sin36sin84 = 2sin36cos36$$
$$2sin24sin84 = cos36 = sin54$$

Olduğundan

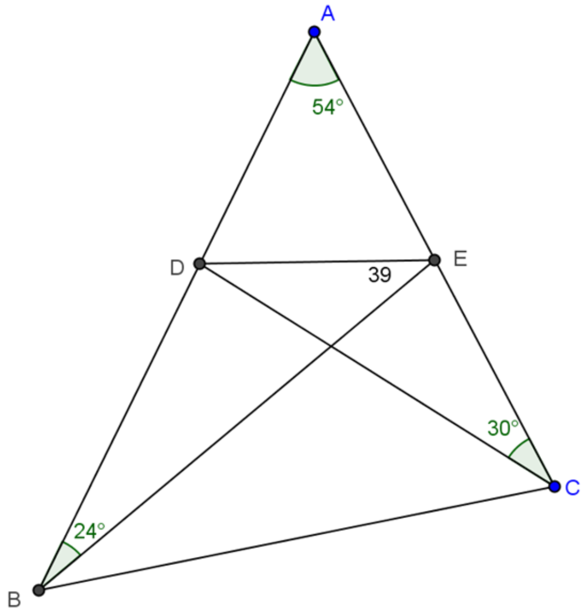
$$\frac{b}{c} = \frac{sin54}{sin54}\ den\ b = c$$

Olarak bulunur. Yani ADE ikizkenardır. Buna göre m(ADE)=m(AED)=63 olur. DBE üçgeninde ADE dış açı olduğundan

$$x + 24?\,63\ den\ x = 39$$

Olarak bulunur.

Soeu:



Şekilde m(BAC)=54, m(ABE)=24, m(ACD)=30 ve m(BED)=39 olduğuna göre $|AC| = |BE|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

ADE üçgeninde $|AD| = |AE| = c, |AC| = a\ ve\ |BE| = b$ diyelim. ABE ve ACD üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım:

$$\frac{c}{sin24} = \frac{b}{sin54}\ ve\ \frac{c}{sin30} = \frac{a}{sin84}$$

Taraf tarafa oranlanırsa

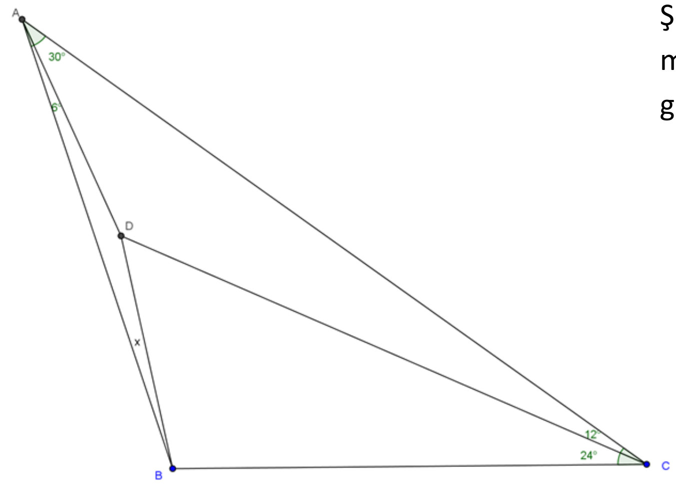
$$\frac{sin30}{sin24} = \frac{bsin84}{asin54}\ den\ \frac{a}{b} = \frac{2sin24sin84}{sin54}$$

Yukarıdaki sorudan 2sin24sin84=cos36=sin54 olduğunu biliyoruz. Yarine yazılırsa

$$\frac{a}{b} = \frac{sin54}{sin54}\ den\ a = b$$

Olduğu görülür. Yani $|AC| = |BE|$ dir.

Soru:



Şekilde $|AB| = |BC|$, m(DAC)=30, m(BCD)=24, m(DCA)=12 olduğuna göre m(DBA)=x ka. Derecedir.

Çözüm:

$|AB| = |BC| = a\ ve\ |BD| = b$ diyelim Açılar hesaplanırsa m(BDC)=48 + x olur. DBA ve DDBC üçgenlerinde sinüs kuralı uygulanırsa

$$\frac{b}{sin6} = \frac{a}{\sin(6+x)}, \frac{b}{sin24} = \frac{a}{\sin(48+x)}$$

Taraf tarafa oranlanırsa:

$$\frac{sin24}{\sin 6} = \frac{\sin(48+x)}{\sin(6+x)}$$

Yukarıdaki örneklerden 2sin24sin84=cos36 eşitliği kullanılırsa

$$\frac{cos36}{2sin84sin6} = \frac{\sin(48+x)}{\sin(6+x)}\ den \sin(6+x)\,cos36 = \sin(48+x)\,2sin6cos6$$

$$\sin(6+x)\,cos36 = \sin(48+x)\,sin12$$

$$\sin(6+x)\,cos36 = \sin(48+x)\,cos78$$

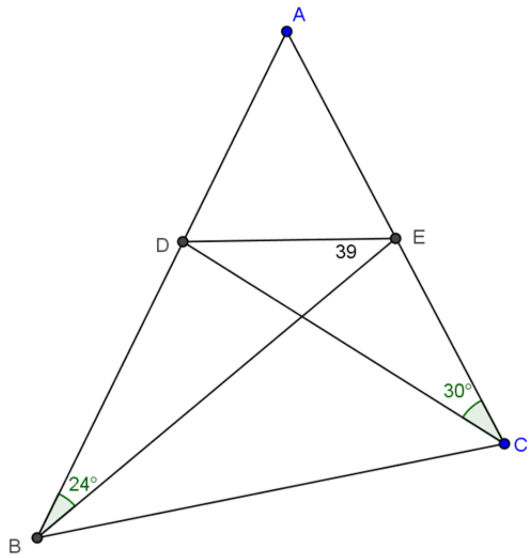
$$\frac{1}{2}[\sin(42+x) + \sin(x-30)] = \frac{1}{2}[\sin(126+x) + \sin(x-30)]$$

$$\sin(42+x) = \sin(54-x)$$

$$42 + x = 54 - x\ den\ 2x = 12\ ve\ x = 6$$

Olarak bulunur.

Soru:



Şekilde $|AC| = |BE|$, m(ABE)=24, m(BED)=39, m(ACD)=30 olduğuna göre m(BAC)=x kaç derecedir.

Çözüm:

$|AC| = |BE| = a, |AE| = b\ ve\ |AD| = c$ diyelim ve ABE, ACD ve ADE üçgenlerinde sinüs kuralı uygulayalım:

$$\frac{a}{sinx} = \frac{b}{sin24}, \frac{a}{\sin(30+x)} = \frac{c}{sin30}\ ve\ \frac{b}{sin63} = \frac{c}{\sin(63+x)}$$

Önce ilk ikisi taraf tarafa oranlanırsa:

$$\frac{\sin(30+x)}{sinx} = \frac{bsin30}{csin24}\ ve\ üçüncüden\ \frac{b}{c} = \frac{\sin 63}{\sin(63+x)}$$

Elde edilir. Yerine yazılırsa;

$$\frac{\sin(30+x)}{sinx} = \frac{sin63sin30}{\sin((63+x)sin24}$$

Düzenlenir ve 2sin24sin84=cos36 yazılırsa

$$sinxsin63sin84 = \sin(30+x)\sin(63+x)\,sin54$$

İfadesi elde edilir. Ters dönüşüm sadeleştirilerek uygulanırsa:

$$sinx[cos21 - cos147] = \sin(30+x)[\cos(x+9) - \cos(x+117)]$$
$$sinx[cıs21 + \cos 33] = \sin(30+x)[\cos(x+9) + \cos(63-x)]$$
$$sinxcos21 + sinxcos33 = \sin(30+x)\cos(x+9) + \sin(30+x)\cos(63-x)$$

Ters dönüşüm uygulanır ve sadeleştirilirse

$$\sin(x+21) + \sin(x-21) + \sin(x+33) + \sin(x-33) =$$
$$\sin(2x+39) + sin21 + sin93 + sin(2x-33)$$

Düzenlenirse:

$$\sin(x+21) - sin21 + \sin(x-33) - \sin(2x-33) + \sin(x-21) - \sin(2x+39)$$
$$+ \sin(x+33) - sin87 = 0$$

Dönüşüm uygulanırsa:

$$2\cos\left(\frac{x}{2}+21\right)sin\frac{x}{2}-2cos\left(\frac{3x}{2}-33\right)sin\frac{x}{2}-2cos\left(\frac{3x}{2}+9\right)sin\left(\frac{x}{2}+30\right)$$
$$+2\cos(\left(\frac{x}{2}+60\right)\sin\left(\frac{x}{2}-27\right)=0$$
$$2sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[cos\left(\frac{x}{2}+21\right)-cos\left(\frac{3x}{2}-33\right)\right]-2sin\left(81-\frac{3x}{2}\right)sin\left(\frac{x}{2}+30\right)$$
$$+2sin\left(\frac{x}{2}-27\right)cos\left(\frac{x}{2}+60\right)=0$$

$$2sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[-2sin(x-6)sin\left(-\frac{x}{2}+27\right)\right]+2sin\left(3\left(\frac{x}{2}-27\right)\right)sin\left(\frac{x}{2}+30\right)$$
$$+2sin\left(\frac{x}{2}-27\right)cos\left(\frac{x}{2}+60\right)=0$$
$$4sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[sin(x-6)sin\left(\frac{x}{2}-27\right)\right]+2sin\left(3\left(\frac{x}{2}-27\right)\right)sin\left(\frac{x}{2}+30\right)$$
$$+2sin\left(\frac{x}{2}-27\right)cos\left(\frac{x}{2}+60\right)=0$$

Burada;

$$\frac{x}{2}-27=t$$

Diyelim ve yukarıdaki ifade de yerine yazalım;

$$4sin\left(\frac{x}{2}\right)[sin(x-6)sin(t)]+2sin(3t)sin\left(\frac{x}{2}+30\right)$$
$$+2sin(t)cos\left(\frac{x}{2}+60\right)=0$$

Haline gelir. Burada $sin3a=sina(3-4sin^2a)$ eşitliği kullanılırsa:

$$4sin\frac{x}{2}\sin(x-6)\,sin(t)+2sin(t)[3-4sin^2(t)]sin\left(\frac{x}{2}+30\right)+2sin(t)cos\left(\frac{x}{2}+60\right)=0$$

$$Dikkat\ edilirse\ sin(t)\ ortak\ çarpandır.$$

Ortak çarpan parantezine alınırsa

$$2sin(t)\left[2sin\frac{x}{2}\sin(x-6)+[3-4sin^2(t)]sin\left(\frac{x}{2}+30\right)+cos\left(\frac{x}{2}+60\right)\right]=0$$
$$2sint=2sin\left(\frac{x}{2}-27\right)=0$$

Dan

$$\frac{x}{2}-27=0\ ve\ x=54$$

Olarak bulunur.