Kapak Konusu: Fonksiyonlar

Fonksiyonları Saymak

Hayri Ardal* / hayriardal@hotmail.com

Soru 1. *n elemanlı bir kümeden m elemanlı bir kümeye giden kaç fonksiyon vardır?*

Yanıt: m^n tane vardır, çünkü n elemanlı kümenin her elemanının gidebileceği tam m yer vardır. n elemanlı kümenin her elemanı için m elemanlı kümenin herhangi bir elemanını seçebiliriz.

Soru 2. *n elemanlı bir kümeden m elemanlı bir kümeye giden kaç eşleme vardır?*

Yanıt: Eşlemelerin sayısını bulmak da oldukça kolay. Eğer $n \neq m$ ise bu sayı sıfırdır, öyle bir eşleme olamaz. Eğer $n = m$ ise bu sayı $n!$'dir. Çünkü birinci elemanın gidecek n yeri vardır. Birinci elemanın gideceği yer belirlendiğinde ikinci elemana $n - 1$ yer kalır. Bu yer de belirlendiğinde, üçüncü elemana $n - 2$ yer kalır... Son elemana tek bir yer kalır.

> Demek ki n elemanlı bir kümenin rastgele bir fonksiyonunun bir eşleşme olma olasılığı $n!/n^n$ dir. Eğer $n = 1$ ise bu olasılık 1, yani yüzde yüzdür. Eğer $n = 2$ ise olasılık yüzde elliye düşer. $n = 3$ ise 2/9'a... Tahmin edildiği gibi n büyüdükçe eşleşme bulma olasılığı azalır. Nitekim, eğer n çok çok büyükse,
>
> $$\frac{n!}{n^n} \approx e\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.$$
>
> (Buradaki e logaritmik sabit olan 2,718... sayısıdır, demek ki olasılık yüzde elliden daha hızlı azalıyor.) Biraz basit analizle, bu olgudan, n sonsuza gittiğinde olasılıkların sıfıra yakınsadığı görülür.

Soru 3. *n elemanlı bir kümeden m elemanlı bir kümeye giden kaç birebir fonksiyon vardır?*

Yanıt: Eğer $n > m$ ise bu sayı sıfırdır. Eğer $n = m$ ise, her birebir fonksiyonun bir eşleme olması gerektiğinden bu sayı $n!$ dir. Ya $n < m$ ise?

Bu sayıya $f(n, m)$ diyelim. Demek ki, $f(n, n) = n!$ ve eğer $n > m$ ise $f(n, m) = 0$.

$f(n, m)$ sayılarını bulmak pek o kadar zor değildir, bulalım.

n elemanlı kümemizi

$$A = \{a_1, ..., a_n\}$$

olarak gösterelim, m elemanlı kümemizi de

$$B = \{b_1, ..., b_m\}$$

olarak gösterelim. A kümesinin birinci elemanı a_1'in B'de gidebileceği m yer vardır. Bu yer belirlendiğinde A'nın geri kalan $n - 1$ elemanına B'nin daha seçilmemiş $m - 1$ elemanı arasından değişik yerler beğenmemiz gerekecek. Demek ki,

$$f(n, m) = mf(n - 1, m - 1)$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitliği bir adım daha götürelim, yani n ve m yerine $n - 1$ ve $m - 1$ sayılarına uygulayalım:

$$f(n, m) = m(m - 1)f(n - 2, m - 2)$$

buluruz. Devamla,

$$f(n, m) = m(m-1) \ldots (m-i)f(n-(i+1), m-(i+1))$$

buluruz. Şimdi $i = n - 2$ olsun,

$$f(n, m) = m(m-1) \ldots (m-(n-2))f(n-(n-1), m-(n-1)),$$

yani

$$f(n, m) = m(m-1) \ldots (m-n+2)f(1, m-n+1)$$

buluruz. $f(1, m - n + 1)$ sayısı, 1 elemanlık bir kümeden $m - n + 1$ elemanlı kümeye giden birebir fonksiyonların sayısı, ki bu da $m - n + 1$'dir. Demek ki

$$f(n, m) = m(m-1) \ldots (m-n+2)(m-n+1),$$

yani

$$f(n, m) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Yanıtımızı bulduk. Eğer $n = m$ ise, yukarıda bulduğumuz $n!$ yanıtını bulduğumuza dikkatinizi çekeriz. Bu da yanıtımızın bir tür sağlamasıdır.

Soru 4. *n elemanlı bir kümeden m elemanlı bir kümeye giden kaç tane örten fonksiyon vardır?*

Yanıt: Bu soru yukardaki sorulardan daha zordur (ve bu yüzden en sona bırakılmıştır.)

Eğer $n < m$ ise yanıt sıfırdır elbet.

Eğer $n = m$ ise, her örten fonksiyon birebir olmak zorunda olduğundan, yanıt $n!$'dir.

Genel yanıtı bulacağız.

A ve B, sırasıyla n ve m elemanlı iki küme olsun.

F, A'dan B'ye giden fonksiyonlar kümesi olsun. Birinci soruda açıklandığı üzere, $|F| = m^n$.

* Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü yüksek lisans öğrencisi.

Her $i \in B$ için, F_i, A'dan $B \setminus \{i\}$ kümesine giden fonksiyonlar kümesi olsun. Bir başka deyişle,

$$F_i = \{f \in F : \text{her } x \in A \text{ için } f(x) \neq i\}$$

olsun. Gene birinci sorudan dolayı, $|F_i| = (m-1)^n$.

Örten olmayan her fonksiyon F_i kümelerinden birinin elemanıdır. Demek ki örten fonksiyonlar kümesi $F \setminus \cup_{i\in B} F_i$ kümesidir. Eğer $\cup_{i\in B} F_i$ kümesinin eleman sayısını bulursak sorumuzu yanıtlayabiliriz.

Önce, her $k \leq m$ için, eğer $i_1, i_2, ..., i_k$, B'nin birbirinden farklı k elemanıysa,

$$\left|F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \ldots \cap F_{i_k}\right| = (m-k)^n.$$

eşitliğine dikkati çekelim.

Şimdi $\cup_{i\in B} F_i$ kümesinin eleman sayısını bulalım:

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i\in B} F_i\right| &= \sum_{i\in B}|F_i| - \sum_{\substack{i_1,i_2\in B\\ i_1\neq i_2}}\left|F_{i_1}\cap F_{i_2}\right| + \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3\in B\\ i_1\neq i_2\neq i_3}}\left|F_{i_1}\cap F_{i_2}\cap F_{i_3}\right| - \ldots + (-1)^{m-1}\left|\bigcap_{i\in B} F_i\right|\\ &= \binom{m}{1}(m-1)^n - \binom{m}{2}(m-2)^n + \binom{m}{3}(m-3)^n - \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}(m-m)^n\\ &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}(m-k)^n.\end{aligned}$$

Dolayısıyla, örten fonksiyon sayısı,

$$|F| - \left|\bigcup_{i\in B} F_i\right| = m^n - \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k}(m-k)^n = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}\binom{m}{k}(m-k)^n$$

dir. Bulduk! Örten fonksiyon sayısı $\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}\binom{m}{k}(m-k)^n$ imiş. ♠

Yukardaki yanıttan iki ilginç sonuç çıkar:

1) Eğer $n < m$ ise, örten fonksiyon olmadığından,

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}\binom{m}{k}(m-k)^n = 0.$$

2) Eğer $n = m$ ise $n!$ örten fonksiyon olduğundan,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}(n-k)^n = n!$$

Nerden nereye!

$n = m + 1$ ise yukarda bulduklarımız bize hangi ilginç eşitliği verir?