

**Problem -1**

$n \in \mathbb{N}^+$  olmak üzere,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm**

$\sqrt[n]{1+n} = 1 + f(n)$  olsun.  
 $f(n) \geq 0$  olacağı açıktır.  
 $\sqrt[n]{1+n} = 1 + f(n) \Rightarrow 1+n = [1+f(n)]^n$   
 sağ tarafı Binom Teoremine göre açalım:  
 $1+n = 1+n \cdot f(n) + \frac{n(n+1)}{2!} \cdot [f(n)]^2 + \dots$   
 $\Rightarrow 1+n \geq 1 + \frac{n(n+1)}{2} \cdot [f(n)]^2$   
 $\Rightarrow 0 \leq [f(n)]^2 \leq \frac{2n}{n(n+1)}$   
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [f(n)]^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n(n+1)}$   
 $\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [f(n)]^2 \leq 0$   
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} [f(n)]^2 = 0$   
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$   
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+n} = 1$  bulunur.

Bu sonucu problemimizin çözümünde kullanalım:

$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{1+n}$   
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+n}$   
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (1)^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+n}$   
 $\Rightarrow 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \leq 1$   
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$   
 elde edilir.

**Problem -2**

$x \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere,  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\left(\frac{1}{x}\right)} = 1$  olduğunu gösteriniz.

**Çözüm**

**1. yol**

$n \in \mathbb{N}^+$  olmak üzere,  
 $n \leq x \leq n+1$  olsun.  
 Her  $n$  değeri için,  
 $\sqrt[n]{n} > 1$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  olması,  
 en azından  $n$ 'nin büyük değerleri için,  
 $(n+1)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \leq x^{\frac{1}{x}} \leq n^{\left(\frac{1}{n}\right)}$   
 sıralamasını yapmamıza olanak verir.  
 $(n+1)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \leq x^{\frac{1}{x}} \leq n^{\left(\frac{1}{n}\right)}$   
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{\left(\frac{1}{n+1}\right)} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\left(\frac{1}{n}\right)}$   
 $\Rightarrow 1 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} \leq 1$   
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$  elde edilir.

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$y = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln x$   
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$   
 Buradaki,  $\frac{\infty}{\infty}$  belirsizliği türevle giderilir:  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$   
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = e^0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$  bulunur.

**Problem -3**

$x \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$  değerini bulunuz.

**Çözüm****1. yol**

$x = \frac{1}{t}$  dönüşümü yapalım.

$x$ ,  $0^+$ 'a sağdan yaklaşırken  $t$ ,  $+\infty$ 'a ıraksayacaktır.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{\left( \frac{1}{t} \right)}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} t^{\left( \frac{1}{t} \right)}}$$

Problem-2'nin sonucunu kullanarak;

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \frac{1}{1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$$

elde edilir.

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Buradaki,  $\frac{\infty}{\infty}$  belirsizliği türevle giderilir:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = e^0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^x = 1 \text{ bulunur.}$$

**Problem -4**

$x \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$  değerini bulunuz.

**Çözüm**

Burada bir belirsizlik yoktur.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = (+\infty) \cdot (-\infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

olur.

**Problem -5**

$x \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} + \ln x \right)$  değerini bulunuz.

**Çözüm****1. yol**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} + \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1 + x \cdot \ln x}{x} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} + \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln(x^x)}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} + \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ 1 + \ln(x^x) \right] \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} + \ln x \right) = 1 \cdot +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} + \ln x \right) = +\infty \text{ bulunur.}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} + \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1+x \cdot \ln x}{x} \right)$$

Burada, L'Hospital kuralını doğrudan uygulayamayız. Çünkü; belirsizlik,  $\frac{0}{0}$  ya

da  $\frac{\infty}{\infty}$  biçiminde değildir. Kesrin payında  $0 \cdot \infty$  belirsizliği vardır. Dolayısıyla; uzatmadan, çözümü "1. yol" daki gibi tamamlamak daha uygun olur.

**Problem -6**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \cdot \ln(x^2-1) \text{ değerini bulunuz.}$$

**Çözüm**

**1. yol**

$x-1 = t$  dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \cdot \ln(x^2-1) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t \cdot \ln(t^2+2t) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left[ t^t \cdot (t+2)^t \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln t^t + \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(t+2)^t \\ &= \ln \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} t^t \right) + \ln \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} (t+2)^t \right) \\ &= 0 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \cdot \ln(x^2-1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x^2-1)}{\frac{1}{x-1}} = L$$

Burada,  $\frac{\infty}{\infty}$  belirsizliği vardır.

$$L = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x \cdot (x-1)}{(x-1)^2} = 0$$

**Problem -7**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{2x^2} \text{ değerini bulunuz.}$$

**Çözüm**

**1. yol**

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \text{ diyelim:}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right)}{2x^2};$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = t \text{ dönüşümü yaparsak,}$$

$$x = 2 \cdot \text{Arcsin} \sqrt{\frac{t}{2}} \text{ olur.}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right)}{2x^2}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-t)}{8 \cdot \left( \text{Arcsin} \sqrt{\frac{t}{2}} \right)^2}$$

$$\Rightarrow L = L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot \frac{1}{t} \cdot \ln(1-t)}{8 \cdot \left( \text{Arcsin} \sqrt{\frac{t}{2}} \right)^2}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{8 \cdot \left( \text{Arcsin} \sqrt{\frac{t}{2}} \right)^2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \ln \left[ (1-t)^{\frac{1}{t}} \right]$$

Soldaki limit için  $u = \text{Arcsin} \sqrt{\frac{t}{2}}$

dönüşümü yaparsak,  $t = 2 \sin^2 u$  olur.

$$\Rightarrow L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 u}{8 \cdot u^2} \cdot \ln \lim_{t \rightarrow 0} \left[ (1-t)^{\frac{1}{t}} \right]$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{4} \cdot \ln(e^{-1})$$

$$\Rightarrow L = -\frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{4x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{4 \cos x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{2x^2} = -\frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

**Problem -8**

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{\cos x}$  değerini bulunuz.

**Çözüm**

**1. yol**

$x - \frac{\pi}{2} = t$  diyelim.

$$y = t^{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)} \Rightarrow \ln y = \cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) \cdot \ln t$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-\sin t \cdot \ln t)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{-\sin t}{t} \cdot t \cdot \ln t\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t^t$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln y = -1 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{\cos x} = 1 \text{ bulunur.}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$x - \frac{\pi}{2} = t$  diyelim.

$$y = t^{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}$$

$$\Rightarrow \ln y = \cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right) \cdot \ln t$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-\sin t \cdot \ln t)$$

Burada,  $0 \cdot \infty$  belirsizliği vardır.

$\frac{\infty}{\infty}$  belirsizliğine dönüştürelim:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{-\ln t}{\frac{1}{\sin t}}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{-\frac{1}{t}}{\frac{-\cos t}{\sin^2 t}}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{\cos t} = 1 \cdot 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{\cos x} = 1 \text{ bulunur.}$$

**Problem -9**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$  değerini bulunuz.

**Çözüm****1. yol**

$e^x = t$  dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - \frac{1}{t}}{\ln t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1) \cdot (t+1)}{t \cdot \ln t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t+1)}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{t-1} \cdot \ln t} \\ &= 2 \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\ln(1+t-1) \frac{1}{t-1}} \\ &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**Problem -10**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$  değerini bulunuz.

**Çözüm****1. yol**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - e^{-x}}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} \end{aligned}$$

$e^x = t$  dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - \frac{1}{t}}{\ln t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1) \cdot (t+1)}{t \cdot \ln t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t+1)}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{t-1} \cdot \ln t} \\ &= 2 \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\ln(1+t-1) \frac{1}{t-1}} \\ &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**Problem -11**

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\ln(x^2-1)}$  değerini bulunuz.

**Çözüm**

Bir belirsizlik yoktur.  $\left(\frac{0^+}{-\infty}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\ln(x^2-1)} = 0$$

**Problem -12**

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)}$  değerini bulunuz.

**Çözüm****1. yol**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x-1) + \ln(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 + \frac{\ln(x+1)}{\ln(x-1)}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\ln 2}{-\infty}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{\infty}{\infty}$  belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{2x}{x^2-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{2x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

**Problem -13**

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\ln x}$  değerini bulunuz.

**Çözüm****1. yol**

$1 - \sqrt{x} = t$  dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\ln x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1-t)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cdot \ln(1-t) \frac{1}{t}} \\ &= -\frac{1}{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{1}{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**Problem -14**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - 1}{\tan x}$  değerini bulunuz.

**Çözüm****1. yol**

$e^{\tan x} - 1 = t$  dönüşümü yapalım.  
 $\tan x = \ln(1 + t)$  olur.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - 1}{\tan x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1 + t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1 + t) \frac{1}{t}} \\ &= 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - 1}{\tan x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} \cdot (1 + \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (e^{\tan x}) \\ &= 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**Problem -15**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\tan x}$  değerini bulunuz.

**Çözüm****1. yol**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{2x} - 1}{x} \cdot \frac{x}{\tan x} \right) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}}_1 \end{aligned}$$

$e^{2x} - 1 = t$  dönüşümü yapalım.

$x = \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + t)$  olur.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{1}{2} \cdot \ln(1 + t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{\ln(1 + t) \frac{1}{t}} \\ &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot e^{2x}}{1 + \tan^2 x} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\tan x} &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**Problem -16**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{\tan x}$  değerini bulunuz.

**Çözüm**

**1. yol**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{4x} - e^{3x}}{x} \cdot \frac{x}{\tan x} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{x} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}}_1$$

$e^x = t$  dönüşümü yaparsak  $x = \ln t$  olur.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{x}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 - t^3}{\ln t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3}{\ln \left( \frac{1}{t-1} \right)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3}{\ln(1+t-1) \left( \frac{1}{t-1} \right)}$$

$$= \frac{1}{\ln e}$$

$$= 1 \text{ bulunur.}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot e^{4x} - 3 \cdot e^{3x}}{1 + \tan^2 x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{3x}}{\tan x} = 1 \text{ bulunur.}$$

**Problem -17**

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \cos \pi x}{1 - x^2}$  değerini bulunuz.

**Çözüm**

**1. yol**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \cos \pi x}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1 + 1 + \cos \pi x}{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \cos \pi x}{1 - x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{1 - x^2} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{1 - x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{1 + x} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cos^2 \frac{\pi}{2} x}{1 - x^2}$$

$$= \frac{-1}{2} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} x \right)}{1 - x^2}$$

$$= \frac{-1}{2} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} x \right) \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} x \right) \cdot \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} \cdot (1 - x) \cdot (1 + x)}$$

$$= \frac{-1}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{0 \cdot \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$= \frac{-1}{2} \text{ bulunur.}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \cos \pi x}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \pi \cdot \sin \pi x}{-2x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \cos \pi x}{1 - x^2} = \frac{-1}{2} \text{ bulunur.}$$



**Problem -18**

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi}$  değerini bulunuz.

**Çözüm****1. yol**

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{4x - \pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{4}}{4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ bulunur.}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ bulunur.}$$

**Problem -19**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{6x^2}$  değerini bulunuz.

**Çözüm****1. yol**

$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  eşitliğini kullanalım:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{6x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos\left(2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)}{6x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)}{6x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \left(2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)^2}{6x^2 \cdot \left(2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{6x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{6x^2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{x^4}{16}$$

$$= 0 \text{ bulunur.}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{6x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x) \cdot \sin x}{12 \cdot x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{12} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= 0 \text{ bulunur.}$$

**Problem -20**

$\lim_{x \rightarrow y} \frac{\cos x - \cos y}{x - y}$  değerini bulunuz.

**Çözüm**

**1. yol**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow y} \frac{\cos x - \cos y}{x - y} &= \lim_{x \rightarrow y} \frac{-2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2\left(\frac{x-y}{2}\right)} \\ &= -\sin y \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

x'e göre türev alınır:

$$\lim_{x \rightarrow y} \frac{\cos x - \cos y}{x - y} = \lim_{x \rightarrow y} \frac{-\sin y}{1} = -\sin y \text{ bulunur.}$$

**Problem -21**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2x}{x + \sin x}$  değerini bulunuz.

**Çözüm**

**1. yol**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2x}{x + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{x} + 2}{1 + \frac{\sin x}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} (2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (1) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} \end{aligned}$$

$L_1$  için,  $e^x = t$  dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - \frac{1}{t}}{\ln t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1) \cdot (t+1)}{t \cdot \ln t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t+1)}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{t-1} \cdot \ln t} \\ &= 2 \cdot \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\ln(1+t-1) \frac{1}{t-1}} \\ &= 2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2x}{x + \sin x} = \frac{2+2}{1+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2x}{x + \sin x} = 2 \text{ bulunur.}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} + 2}{1 + \cos x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2x}{x + \sin x} = 2 \text{ bulunur.}$$

**Problem -22**

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$  değerini bulunuz.

**Çözüm**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x \cdot \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{1 - \cos x} \cdot \sqrt{1 + \cos x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x \cdot \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x \cdot \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{\sin^2 x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x \cdot \sqrt{1 + \cos x}}{|\sin x|} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x \cdot \sqrt{1 + \cos x}}{-\sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sqrt{1 + \cos x}) \\
 &= -\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

**Problem -23**

$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \sin x}}$  değerini bulunuz.

**Çözüm**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \sin x}} &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x \cdot \sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{1 - \sin x} \cdot \sqrt{1 + \sin x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x \cdot \sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x \cdot \sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{\cos^2 x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin 2x \cdot \sqrt{1 + \sin x}}{|\cos x|} \\
 &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \sqrt{1 + \sin x}}{-\cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} (-2 \cdot \sin x \cdot \sqrt{1 + \sin x}) \\
 &= -2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

**Problem -24**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \cdot \sin 2x}$  değerini bulunuz.

**Çözüm**

**1. yol**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \cdot \sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \cdot 2 \sin x \cdot \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left\{1 - \left[1 - 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right)\right]\right\} \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \cdot 4 \sin \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \cdot 4 \sin \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \left(\frac{x}{2}\right) \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x)}{4 \cdot x \cdot \cos \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{x}{2}\right) \cdot (1 + \cos x + \cos^2 x)}{\left(\frac{x}{2}\right) \cdot 4 \cdot \cos \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos x} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \cdot \sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x \cdot \sin x}{\sin 2x + x \cdot 2 \cos 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x}{2 \cos x + \frac{x}{\sin x} \cdot 2 \cos 2x} \\ &= \frac{3}{4} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**Problem -25**

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{x+a} - \cos \sqrt{x})$  değerini bulunuz.

**Çözüm**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{x+a} - \cos \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -2 \sin \frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}{2} \cdot \sin \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}}{2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ -2 \sin \frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}{2} \cdot \sin \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+a} + \sqrt{x})}{2(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ -2 \sin \frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}{2} \cdot \sin \frac{a}{2(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ -2 \sin \frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}{2} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{a}{2(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})} \\ &= \ell \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

**Problem -26**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$  değerini bulunuz.

**Çözüm**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos x - \sin x}{x^3 \cdot \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2 \cdot \cos x} \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right)}{x^2 \cdot \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin \left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \frac{x}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \cos x} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

**Problem -27**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x^2)}}{1 - \cos x}$  değerini bulunuz.

**Çözüm**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x^2)}}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 \cdot \sin^2\left(\frac{x^2}{2}\right)}}{2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \cdot \left| \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) \right|}{2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

bulunur.

**Problem -28**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}$  değerini bulunuz.

**Çözüm**

**1. yol**

$e^x = t$  dönüşümü yapalım:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - \frac{1}{t} - 2 \ln t}{(\ln t)^3} = L$$

Bir de  $\sqrt{t} = u$  dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - \frac{1}{t} - 2 \ln t}{(\ln t)^3} \\ \Rightarrow L &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2 - \frac{1}{u^2} - 4 \ln u}{8 \cdot (\ln u)^3} \\ \Rightarrow L &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u^2 - \frac{1}{u^2} - 2u + \frac{2}{u} + 2u - \frac{2}{u} - 4 \ln u}{8 \cdot (\ln u)^3} \\ \Rightarrow L &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\left(u - \frac{1}{u}\right) \left(u + \frac{1}{u} - 2\right)}{8 \cdot (\ln u)^3} \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u - \frac{1}{u} - 2 \ln u}{(\ln u)^3} \\ \Rightarrow L &= \frac{(u+1) \cdot (u-1)^3}{8 \cdot u^2 \cdot (\ln u)^3} + \frac{1}{4} \cdot L \\ \Rightarrow L &= \frac{u+1}{8 \cdot u^2 \cdot \left[\ln(1+u-1) \frac{1}{u-1}\right]^3} + \frac{1}{4} \cdot L \\ \Rightarrow L &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot L \\ \Rightarrow L &= \frac{1}{3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{6} \\ &= \frac{1}{3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**Problem -29**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$  değerini bulunuz.

**Çözüm****1. yol**

$\sin x = 3 \sin \frac{x}{3} - 4 \sin^3 \frac{x}{3}$  olduğundan,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3 \sin \frac{x}{3} + 4 \sin^3 \frac{x}{3}}{x^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3 \sin \frac{x}{3}}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3 \frac{x}{3}}{x^3}$$

Eşitliğin soluna L deyip sağındaki ilk terimde de  $x = 3t$  dönüşümü yapalım:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3 \sin \frac{x}{3}}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3 \frac{x}{3}}{x^3}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - 3 \sin t}{27 \cdot t^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3 \frac{x}{3}}{27 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^3}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{9} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} + \frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{9} \cdot L + \frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{6} \text{ bulunur.}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} \\ &= \frac{1}{6} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**Problem -30**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$  değerini bulunuz.

**Çözüm****1. yol**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}}_{L_1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{x^3}{x - \sin x}}_{L_2} \end{aligned}$$

Problem-28'de  $L_1 = \frac{1}{3}$  ve Problem-29'da

$L_2 = 6$  olduğunu bulmuştuk.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = L_1 \cdot L_2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2 \text{ olur.}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} \\ &= 2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

**Problem -31**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2}$  değerini bulunuz.

**Çözüm****1. yol**

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x/2} - e^{-x/2})^2 - x^2}{x^4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\sin^2 x - x^2}$$

Eşitliğin sağındaki ilk terimde  $x = 2t$  dönüşümü yapıp işlemin dağılma özelliğini uygulayalım:

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e^t - e^{-t})^2 - 4t^2}{16 \cdot t^4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{\sin^2 x - x^2}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - e^{-t} - 2t}{t^3} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - e^{-t} + 2t}{16 \cdot t} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x - x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x + x}$$

Problem-28'den  $L_1 = \frac{1}{3}$ ,

Problem-21'den  $L_2 = \frac{1}{4}$ ,

Problem-29'dan  $L_3 = -6$  olduğu görülür.

$L_4 = \frac{1}{2}$  olup  $L = -\frac{1}{4}$  elde edilir.

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{2 \sin x \cdot \cos x - 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2 \cos 2x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{-4 \sin 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{-8 \cos 2x}$$

$$= -\frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

**Problem -32**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - \cos x}{x^4}$  değerini bulunuz.

**Çözüm**

**1. yol**

$x = 2t$  dönüşümü yapalım:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - \cos x}{x^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - 2t^2 - \cos 2t}{16t^4}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - \sin^2 t}{8t^4}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t - \sin t) \cdot (t + \sin t)}{8t^4}$$

Burada; paydayı  $t^2 \cdot t^2$  diye ayırmak işe yaramaz.  $t^3 \cdot t$  diye ayıralım.

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sin t - t) \cdot (\sin t + t)}{8t^4}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t + t}{8t}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3} \cdot \left[ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{8t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{8t} \right]$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{4} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3} \text{ bulunur.}$$

Problem-29'dan  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3} = -\frac{1}{6}$  olduğu görülür.

$$L = -\frac{1}{24} \text{ olur.}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - \cos x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + \sin x}{4x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos x}{12x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{24x}$$

$$= -\frac{1}{24} \text{ bulunur.}$$

**Problem -33**

$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right)$  değerini bulunuz.

**Çözüm**

**1. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} - 1 \right)$$

$$= -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} \right)$$

Burada L'Hospital Kuralını hemen uygulamak işlemleri uzatır.

Parantez içini parçalayalım:

$$L = -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x - \sin x}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x + \sin x}{\sin x} \right)$$

$$= -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x - \sin x}{x^3} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sin x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x + \sin x}{\sin x} \right)$$

$$= -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{3x^2} \right) \cdot 1 \cdot 2$$

$$= -1 + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{6 \cdot x} \right)$$

$$= -\frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$



2. yol

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} - 1 \right) \\ &= -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} \right) \end{aligned}$$

Parantez içini 1. yoldaki gibi parçalayalım:

$$\begin{aligned} L &= -1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x - \sin x}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x + \sin x}{\sin x} \right); \\ L &= -1 + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x - \sin x}{x^3} \right)}_{L_1} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sin x} \right)}_1 \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x + \sin x}{\sin x} \right)}_2 \end{aligned}$$

Problem-29'dan  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$  olduğu görülür.

$$L = -\frac{2}{3} \text{ olur.}$$

Problem -34

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \text{ değerini bulunuz.}$$

Çözüm

1. yol

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]} \\ \Rightarrow L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1 + 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2}(x-1)}{\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]} \\ &+ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin\frac{3\pi}{2} + \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L &= -\frac{2}{\pi} \\ &+ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin\left[\frac{3\pi}{4}(x-1)\right] \cdot \cos\left[\frac{3\pi}{4}(x-1)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L = -\frac{2}{\pi} \text{ bulunur.}$$

2. yol (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \frac{3\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)}{-\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \\ &= -\frac{2}{\pi} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**Problem -35**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - \cos 2x}{x^2} \text{ değerini bulunuz.}$$

**Çözüm**

**1. yol**

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - \cos 2x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cdot \cos 2x}{x^3} \\ \Rightarrow L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x - x \cdot \cos 2x}{x^3} \\ \Rightarrow L &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}}_{L_1} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cdot \cos 2x}{x^3}}_{L_2} \end{aligned}$$

Problem-29'dan  $L_1 = -\frac{1}{6}$  olduğu görülür.

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cdot \cos 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2$$

olup  $L = \frac{11}{6}$  elde edilir.

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - \cos 2x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cdot \cos 2x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x + 2x \cdot \sin 2x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 4 \cdot \sin 2x + 4x \cdot \cos 2x}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x + 12 \cdot \cos 2x - 8x \cdot \sin 2x}{6} \\ &= \frac{11}{6} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**Problem -36**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \text{ değerini bulunuz.}$$

**Çözüm**

**1. yol**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = L \\ \Rightarrow L &= 1 + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)}_{L_1} \end{aligned}$$

$\sqrt{x} = t$  dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{t \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{2 \cdot \ln t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2 \cdot \ln t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{1-t}{2(t^2-1)} + \frac{1}{2} \cdot \lim_{t \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{\ln t} \right) \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot L_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L_1 = -\frac{1}{2} \text{ olur.}$$

$$L = 1 + L_1$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \text{ elde edilir.}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \cdot \ln x} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \cdot \ln x}\end{aligned}$$

Eşitliğin sağında  $\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= 1 + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{2} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

**Problem -37**

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_x 3 - 1}{x - 3}$  değerini bulunuz.

**Çözüm**

**1. yol**

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_x 3 - 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{\ln 3}{\ln x} - 1}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln 3 - \ln x}{(x - 3) \cdot \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln \frac{x}{3}}{(3 - x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\ln x} \\ &= \frac{1}{\ln 3} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln \frac{x}{3}}{(3 - x)}}_{L_1}\end{aligned}$$

$\frac{x}{3} = 1 + t$  dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned}L_1 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln \frac{x}{3}}{(3 - x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{-3t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \ln \left[ (1 + t)^t \right]^{-\frac{1}{3}} \\ &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{-1}{3} \Rightarrow L = \frac{-1}{\ln 27} \text{ bulunur.}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_x 3 - 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{\ln 3}{\ln x} - 1}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{-1}{x} \cdot \ln 3}{\ln^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{\ln^2 x} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

**Problem -38**

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 1) - \ln 8}{x - 3}$  değerini bulunuz.

**Çözüm****1. yol**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 1) - \ln 8}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{1}{x - 3} \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 1}{8}\right) \right]$$

$\frac{x^2 - 1}{8} = 1 + t$  dönüşümü yapalım:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 1) - \ln 8}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{1}{x - 3} \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 1}{8}\right) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\sqrt{9 + 8t} - 3} \cdot \ln(1 + t) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{t}{\sqrt{9 + 8t} - 3} \cdot \ln(1 + t)^{\frac{1}{t}} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{t(\sqrt{9 + 8t} + 3)}{8t} \cdot \ln(1 + t)^{\frac{1}{t}} \right] \\ &= \frac{3}{4} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 1) - \ln 8}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x^2 - 1} \\ &= \frac{3}{4} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**Problem -39**

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_x 3 - 1}{\ln(x^2 - 1) - \ln 8}$  değerini bulunuz.

**Çözüm****1. yol**

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_x 3 - 1}{\ln(x^2 - 1) - \ln 8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \underbrace{\frac{\log_x 3 - 1}{x - 3}}_{L_1} \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \underbrace{\frac{x - 3}{\ln(x^2 - 1) - \ln 8}}_{L_2} \end{aligned}$$

Problem-37'den  $L_1 = \frac{-1}{\ln 27}$ ,

Problem-38'den  $L_2 = \frac{4}{3}$  olduğu görülür.

$L = -\frac{4}{9 \cdot \ln 3}$  elde edilir.

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$\frac{0}{0}$  belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_x 3 - 1}{\ln(x^2 - 1) - \ln 8} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{\ln 3}{\ln x} - 1}{\ln(x^2 - 1) - \ln 8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{-1}{x} \cdot \ln 3}{\frac{2x}{x^2 - 1}} \\ &= -\frac{4}{9 \cdot \ln 3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**Problem -40**

$a \neq k \cdot \pi$  ve  $k \in \mathbb{Z}$  olmak üzere,

$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$  değerini bulunuz.

**Çözüm**

**1. yol**

$$y = \left( \frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x-a} \cdot \ln \left( \frac{\sin x}{\sin a} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{1}{x-a} \cdot \ln \left( \frac{\sin x}{\sin a} \right) \right]$$

$\frac{\sin x}{\sin a} = 1+t$  dönüşümü yapılırsa;

$x = \text{Arcsin}[(1+t) \cdot \sin a]$  olur.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} (\ln y) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\text{Arcsin}[(1+t) \cdot \sin a] - a} \cdot \ln(1+t) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{t}{\text{Arcsin}[(1+t) \cdot \sin a] - a} \cdot \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{t}{\text{Arcsin}[(1+t) \cdot \sin a] - a}}_L \cdot \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}_1 \end{aligned}$$

L ifadesinde, t yerine x türünden değerini geri koyalım:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\text{Arcsin}[(1+t) \cdot \sin a] - a} \\ \Rightarrow L &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\sin x}{\sin a} - 1}{x - a} \\ \Rightarrow L &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{(x - a) \cdot \sin a} \\ \Rightarrow L &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \left( \frac{x-a}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{x+a}{2} \right)}{2 \cdot \frac{x-a}{2} \cdot \sin a} \\ \Rightarrow L &= \cot a \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\ln y) = \cot a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} y = e^{\cot a} \text{ elde edilir.}$$

**2. yol** (L'Hospital Kuralı ile)

$$y = \left( \frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}}$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{x-a} \cdot \ln \left( \frac{\sin x}{\sin a} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(\sin x) - \ln(\sin a)}{x-a}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \ln y = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x}{1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \ln y = \cot a$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} y = e^{\cot a} \text{ elde edilir.}$$