KÜME KAVRAMI

Küme, tanımlanmış nesnelerin oluşturduğu topluluktur.

Bu bölümde kümelerle kurulan **matematiksel yapı**yı tanıtacağız.

Küme kavramı matematiğe girmeden önce
matematik denilince
akla **sayılar** ve **şekiller** gelirdi.
Kümeler kuramının ortaya konulmasıyla
sayılar ve şekiller dışındaki nesnelerin birbirleriyle ilişkilerini düzenleyen kuralların da
en azından sayılar ve şekiller kadar geçerli matematiksel yapılar oluşturabildiği görüldü.

Bir **matematiksel yapı**,
kendi içerisindeki problemlerin
ve matematiksel modelleri kurulan gerçek yaşam problemlerinin
çözümlerinin gerçekleştirildiği bir usa vurma ortamıdır.
Kümeler kuramı da
temel tanımları, temel doğruları
ve bunlardan çıkarılan sonuçları ile
bir **matematiksel yapı**dır.
Bu kuramın temellerini 19. yüzyılda
Rus asıllı Alman matematikçisi **Georg Cantor** (1845-1918) atmıştır.
Kuramın yetkinleşmesi,
diğer matematiksel yapılarda olduğu gibi yüzyıllar almamış,
bir kaç yıl gibi kısa bir sürede gerçekleşmiştir.

Kümeler kuramı
bağımsız bir matematiksel yapı olmasının yanında
diğer yapıları da temellerinden etkiledi.
Diğer matematiksel yapılar
kümeler kuramının kavram ve ilkeleri ile yeniden ele alındı;
yeniden yapılandırıldı.
Bu yeniden yapılandırılma ile matematiğin gücü arttı;
Ufukları genişledi.

Matematiğin günümüzdeki güçlü ve görkemli varlığında **kümeler kuramı**nın payı büyüktür.
Biz
kümeler kuramına,
orta öğretimdeki matematik konularının aktarılmasında gerekli olacağı ölçüde gireceğiz.

1. Temel Kavramlar

Küme Kavramı

Küme sözcüğü grup, topluluk, sınıf veya yığın anlamlarına gelir. Matematikteki **küme** terimi de benzer anlamlara gelen kavramın adıdır.

Georg Cantor **küme** terimini *"**iyi tanımlanmış, birbirinden farklı nesnelerin topluluğu**"* olarak tanımlamıştır. Ancak; kavramı tanıdıkça, bu tanımın eksiksiz olmadığını göreceğiz.

Küme kavramı, bir önerme ile tanımlanamamıştır.

Tanımsız terim olarak alacağımız **küme** terimini örnekler ve açıklamalarla zihninizde tasarlamanızı sağlayacağız.

Örnek – 1

Aşağıda belirtilen toplulukların her biri bir küme oluşturur.

a. *Sınıfınızdaki öğrenciler.*
b. *İki basamaklı doğal sayılar.*
c. *Güneş sistemindeki gezegenler.*
d. *Evrendeki yıldızlar.*
e. *$1 \leq x < 10$ eşitsizliğini sağlayan gerçel sayılar.*
f. *a, ⊿, □, 3, 5 sembolleri.*
g. *M. K. Atatürk, İsmet İnönü, Celal Bayar.*
h. *1, 2, 3, 4, 5 sayıları.*

⌘ Buradaki "**Topluluk**" terimi, "**Nesnelerin bir yerde toplanmış biçimi**." anlamında değildir. Örneğin; "**Güneş sistemindeki gezegenler**"in herbiri birbirinden milyonlarca km uzakta, konumları değişen nesnelerdir.

Tanım – 1

*Bir kümeyi oluşturan nesnelere bu kümenin **eleman**ları (**öge**leri) denir.*

Kümeler, genellikle A, B, C, ... gibi büyük harflerle; kümenin elemanları da, genellikle a, b, c, ... gibi küçük harflerle adlandırılırlar.

Bir a nesnesi bir A kümesinin elemanı ise bu $a \in A$ biçiminde, değilse bu da $a \notin A$ biçiminde gösterilir.

Bu ifadeler sırasıyla "**a eleman A**" ve "**a eleman değil A**" biçiminde okunur.

Kümenin Belirtilmesi

Etkinlik – 1

Sınıfınızdan iki arkadaşınızla, aşağıda özelikleri belirtilen elemanların adlarını, aranızda fikir alışverişi yapmadan ayrı ayrı yazınız.

Yazdıklarınızı karşılaştırarak, hangi maddelere karşılık farklı adlar yazdığınızı görünüz. Farklılıkların nedenlerini belirtiniz.

a. *Sınıfınızdaki gözlüklü öğrenciler.*
b. *Sınıfınızdaki en sıcakkanlı üç öğrenci.*
c. *Sınıfınızdaki öğrencilerden dördü.*
d. *Okulunuzdaki yaşlı öğretmenler.*
e. *1'den küçük bir doğal sayı.*
f. *8'den küçük bir doğal sayı.*

⌘ Elemanları tek tek belirtilen her topluluk bir küme oluşturur. Ancak; bir küme elemanlarının ortak özellikleri ile belirtilmişse, bu özellikler ayırt edici biçimde açıklanmış olmalıdır. Öyle ki; herkes o açıklamaya dayanarak aynı kümeyi yazabilmelidir.

⌘ Hangi nesnelerin kümenin içinde olacağının böyle kesinlikle belirtilmesine **kümenin iyi tanımlanması** denir.

Örneğin;

"***Bursa, İzmir, Muğla***"

topluluğu bir küme belirttiği hâlde,

"***Türkiye'deki illerden üçü***."

ifadesi belirli bir topluluğu tanımlamaz. Bu ifade bir küme belirtmez. Çünkü bu ifadeye dayanılarak çok sayıda değişik kümeler yazılabilir.

Kümelerin Gösterilmesi

Kümeler **Ortak özellik yöntemi**, **Liste yöntemi** ve **Şema yöntemi** olmak üzere üç değişik yöntemle gösterilir.

"**Kümelerin gösterilmesi**" derken, bunların kâğıt, ekran, tahta, ... üzerinde gösterilmesinden söz ettiğimiz açıktır.

Ortak Özellik Yöntemi

Bir kümenin bütün elemanlarının taşıdığı, bu kümenin elemanı olmayan nesnelerin taşımadığı bir özellik varsa; bu küme, elemanlarının o özelliğinden yararlanılarak yazılabilir.

Bir A kümesinin elemanları bir p özelliğini taşıyorsa bu küme,

$A = \{x \mid x,$ p özelliğini taşır.$\}$ veya

$A = \{x : x,$ p özelliğini taşır.$\}$ biçiminde gösterilir.

"I" ve ":" sembolleri "**öyle ki**" deyimi yerine kullanılır. A kümesi, "**$x \in A$, öyle ki; x, p özelliğini taşır.**" okunur.

"**{ }**" ayıracına "**küme ayıracı**" denir.

Örnek – 2

İki basamaklı doğal sayıların kümesi A ise, bu küme ortak özellik yöntemi ile

$A = \{x \mid$ x doğal sayıdır ve x iki basamaklıdır.$\}$

biçiminde gösterilir.

Örneğin; 23 sayısı burada belirtilen özelliği taşır.
5 sayısı belirtilen özelliği taşımaz.

$23 \in A$ ve $5 \notin A$ olur.

Liste Yöntemi

Kümenin elemanları küme ayıracının içine tek tek yazılır; elemanların arasına virgül konulur.

Elemanlar istenilen sıra ile yazılabilir.

Bir kümede her eleman yalnız bir kere yazılır.

Örnek – 3

"KAZAK" sözcüğündeki harflerin kümesi H ise,

bu küme liste yöntemi ile,

$H = \{K, A, Z\}$ biçiminde gösterilir.

Daha önce; bir kümenin elemanlarının küçük harflerle gösterildiğini söylemiştik. Ancak; burada elemanların temsilcilerini değil, doğrudan doğruya kendilerini kullandık.

Örnek – 4

Haftanın P harfi ile başlayan günlerinin kümesi liste yöntemi ile, $A = \{$Pazartesi, Perşembe, Pazar$\}$ biçiminde yazılır.

► Bir kümenin elemanlarının sayısı bunların tek tek yazılmasına olanak vermiyorsa, küme zorunlu olarak ortak özelik yöntemi ile gösterilir.

Bununla birlikte, bazı kümelerde kümelerin elemanlarının ortak özelikleri liste yöntemi ile de sezdirilebilir.

Örnek – 5

a. $N = \{x \mid$ x bir doğal sayıdır.$\}$

kümesi liste yöntemi ile

$N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ biçiminde yazılabilir.

b. $Ç = \{x \mid$ x çift tam sayıdır.$\}$ kümesi

$Ç = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$ biçiminde yazılabilir.

c. $A = \{x \mid 9 < x < 100;$ x doğal sayı.$\}$ kümesi

$A = \{10, 11, 12, ..., 99\}$ biçiminde yazılabilir.

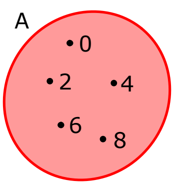
Ayıraçlar içindeki yan yana üç noktalar, yazılmış elemanlarla belirtilen özelliğin, yazılmamış elemanlarda da sürdürüleceğini gösterir.

Şema Yöntemi

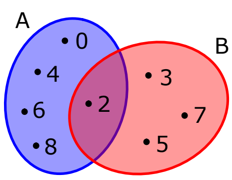
Ortak özelik yöntemi ya da liste yöntemi ile yazılmış kümeleri şemalarla da göstermek, bu kümeler arasındaki ilişkileri kavramada kolaylık sağlar. Bu amaçla kullanılan şemalar, kapalı eğrilerle sınırlandırılmış düzlemsel bölgeler biçiminde seçilirler. Kümenin elemanları bu kapalı bölgeye serpiştirilmiş noktalarla temsil edilirler. Bu şemalar İngiliz mantıkçısı John Venn (1834-1923) tarafından önerildiğinden **Venn Şeması** diye adlandırılırlar.

Örnek – 6

a. $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ kümesi Venn şeması ile yandaki gibi gösterilir.



b. $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ve $B = \{2, 3, 5, 7\}$ kümeleri Venn şeması ile yandaki gibi gösterilir.



Etkinlik – 2

"MATEMATİK" sözcüğündeki harflerin kümesini ve "ANALİTİK" sözcüğündeki harflerin kümesini bildiğiniz yöntemlerle gösteriniz.

►

Sayı kümelerini gelecek bölümlerde ayrıntılı olarak inceleyeceğiz. Bu bölümde bu kümelerden de örnekler vereceğimiz için sembolik adlarını şimdiden verelim:

$N \to$ **Doğal sayılar kümesi;**

$N^+ \to$ **Sayma sayıları kümesi;**

$Z \to$ **Tam sayılar kümesi;**

$Z^- \to$ **Negatif tam sayılar kümesi;**

$Z^+ \to$ **Pozitif tam sayılar kümesi;**

$Q \to$ **Rasyonel sayılar kümesi;**

$Q^- \to$ **Negatif rasyonel sayılar kümesi;**

$Q^+ \to$ **Pozitif rasyonel sayılar kümesi;**

$R \to$ **Gerçek sayılar kümesi;**

$R^- \to$ **Negatif gerçek sayılar kümesi;**

$R^+ \to$ **Pozitif gerçek sayılar kümesi;**

Eleman Sayılarına Göre Kümeler

Etkinlik – 3

Aşağıda ortak özelik yöntemi ile verilmiş kümeleri liste yöntemi ile gösteriniz.

$A = \{x \mid 90 \le x \le 96,\ x \text{ asal sayı}\}$

$B = \{x \mid x \in R,\ x^2 < 0\}$

$C = \{x \mid x < 9 \text{ ve x tek doğal sayıdır.}\}$

$D = \{x \mid x \ge 9 \text{ ve x tek doğal sayıdır.}\}$

Boş Küme

Tanım – 2

*Elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir.*

Boş küme, "$\{\ \}$" ve "$\varnothing$" sembolleri ile gösterilir.

Örneğin;

$A = \{x \mid x,\ \textit{4 metre boyunda insandır.}\}$

kümesi liste yöntemi ile yazılırsa küme parantezinin içine yazılabilecek bir eleman bulunamaz.

$\mathbf{A = \{\ \}}$ ya da $\mathbf{A = \varnothing}$ olur.

Sonlu Kümeler, Sonsuz Kümeler

Bir A kümesinin eleman sayısı $s(A)$ sembolü ile gösterilir.

Örneğin; $A = \{x \mid x < 10,\ x \in N\}$ kümesinin eleman sayısı, $s(A) = 10$'dur. Küme liste yöntemi ile yazılırsa, bu görülür: $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Bir kümenin eleman sayısı hesaplama yoluyla da bulunabilir.

Örneğin; $B = \{x \mid x, \text{ dört basamaklı çift sayıdır.}\}$

kümesi liste yöntemi ile,

$B = \{1000, 1002, 1004, ..., 9998\}$ olarak yazılabilir.

Bu kümenin eleman sayısının

$s(B) = \dfrac{9998 - 998}{2} = 4500$ olduğunu bulabilirsiniz.

Ancak; örneğin, $C = \{x \mid x \ge 10,\ x \in N\}$ kümesinin elemanlarını saymayı tamamlayamazsınız.

⌘ Eleman sayıları bir doğal sayı ile belirtilebilen kümelere **sonlu küme**ler denir; Sonlu olmayan kümelere **sonsuz küme**ler adı verilir.

Örnek – 7

a. $A = \{x \mid 2 \le x \le 9;\ x \in N\}$ kümesi **sonlu küme**dir.

b. $B = \{x \mid 3 \le x \le 7;\ x \in R\}$, sonsuz kümedir.

⌘ B kümesi "$[3,7]$" biçiminde de gösterilir. Örneğin; 7 kümeye dahil olmasaydı, o zaman küme "$[3,7)$" ya da "$[3,7[$" biçiminde gösterilecekti.

c. $C = \{x \mid x, \text{ yeryüzünde bir canlıdır.}\}$ kümesinin elemanlarını saymak olanaksız olsa da bu küme sonlu kümedir.

d. $D = \{x \mid x \text{ asal sayıdır.}\}$ kümesi sonsuz kümedir.

► **Doğal sayı** ve **sayma** kavramlarını sezgisel olarak öğrenmiştiniz. Şimdi de **sonlu küme**, **sonsuz küme** kavramlarını yine sezgisel olarak kavratmaya çalıştık. Bu kavramlar matematiğin tanımlanmış kavramlarıdır. Ancak, tanımlarda henüz tanımadığımız kavramlar da kullanılmıştır. Bu yüzden, şimdilik, bu kavramları sezgisel düzeyde kavramakla yetineceğiz.

Eşit Kümeler

Tanım – 3

*Aynı elemanlardan oluşan kümelere **eşit kümeler** denir.*

A kümesi B kümesine eşit ise bu, $A = B$ biçiminde; değilse bu da, $A \neq B$ biçiminde gösterilir.

Örnek – 8

$A = \{x \mid x^2 < 7,\ x \in N\}$ ve $B = \{x \mid 2x < 5,\ x \in N\}$

kümeleri liste yöntemi ile yazılırsa bunların aynı elemanlardan oluştuğu görülür.

$A = \{0,1,2\}$ ve $B = \{0,1,2\}$ olup $A = B$'dir.

Alt Küme

Tanım – 4

*Bir A kümesinin her elemanı bir B kümesinin de elemanı ise, A kümesine B kümesinin bir **alt kümesi** denir.*

*Bu durumda B kümesi A kümesini **kapsar**.*

Bir A kümesi bir B kümesinin alt kümesi ise bu $A \subset B$ veya $B \supset A$ biçiminde gösterilir. İlki "**A alt küme B**", ikincisi "**B kapsar A**" diye okunur.

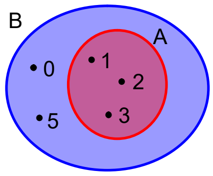
A kümesinin B kümesinde olmayan en az bir elemanı varsa, bu durum da $A \not\subset B$ veya $B \not\supset A$ biçiminde gösterilir.

Örnek – 9

a. *"Sınıfınızdaki gözlüklü kız öğrencilerin kümesi", "Sınıfınızdaki öğrencilerin kümesi"*nin bir **alt küme**sidir.

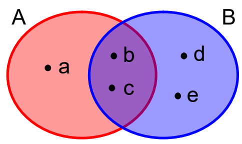
b. $A = \{1,2,3\}$ ve $B = \{0,1,2,3,5\}$ ise $A \subset B$ dir.

A ve B kümeleri Venn şeması ile yandaki gibi gösterilirler.



c. $A = \{a,b,c\}$ ve $B = \{b,c,d,e\}$ ise $A \not\subset B$ ve $B \not\subset A$'dır.

A ve B kümeleri Venn şeması ile yandaki gibi gösterilirler.



Teorem – 1

*Her **küme** kendisinin **alt küme**sidir.*

Teorem – 1'in sembollerle ifadesi, $A \subset A$ olur.

⌘ Bazı kaynaklarda "**eşitlik**" ve "**alt küme olma**" durumları birbirinden ayırılır. $A \subset B$ iken $A = B$ olabileceği $A \subseteq B$ ile gösterilir. Biz, "$\subset$" sembolünü "$\subseteq$" anlamında kullanacağız.

Teorem – 2

***Boş küme** her kümenin **alt küme**sidir.*

Teorem – 2'nin sembollerle ifadesi, $\varnothing \subset A$ olur.

Etkinlik – 4

Aşağıdaki teoremleri,
niceleme mantığında sembolleştirerek,
ispatlayınız.

a. $A \subset A$ **b.** $\varnothing \subset A$

Teorem – 3

A ve B birer küme olmak üzere;

$(A = B) \Leftrightarrow [(A \subset B) \wedge (B \subset A)]$

Etkinlik – 5

A ve B birer küme olmak üzere "$A = B$" önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı
$\forall x,\ (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$ 'dir.

Buna göre;

$(A = B) \Leftrightarrow [(A \subset B) \wedge (B \subset A)]$ teoremini

$(A = B) \Leftrightarrow [\forall x (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)]$

önermesinden yararlanarak ispatlayınız.

Bir Kümenin Alt Kümelerinin Sayısı

Etkinlik – 6

Aşağıdaki kümelerin alt kümelerini yazınız ve sayınız.

a. $A = \varnothing$ **b.** $B = \{a\}$ **c.** $C = \{a,b\}$
d. $D = \{a,b,c\}$ **e.** $E = \{a,b,c,d\}$

Bulduğunuz sonuçları kullanarak yandaki tabloyu doldurunuz. Tablodan yararlanarak n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısını tahmin ediniz.

Kümenin eleman sayısı	Kümenin alt kümelerinin sayısı
0	
1	
2	
3	
4	

Teorem – 4

n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n 'dir.

Etkinlik-6'da, **Teorem-4**'ü sezdiğinizi düşünüyoruz.

► **Teorem-4**'ü, "**Çarpma yoluyla sayma**" yöntemi ile ispatlayabiliriz:

n elemanlı kümenin her alt kümesini yazarken, her eleman için; "o elemanı almak ya da almamak" biçiminde 2 seçeneğimiz olur.

n eleman için, $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$ değişik seçim yaparak 2^n değişik alt küme yazabiliriz.

Öz Alt Kümeler

Tanım – 5

Bir kümenin, kendisinden farklı alt kümelerine bu kümenin ***öz alt kümeleri*** *denir.*

n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n olduğuna göre, öz alt kümelerinin sayısı da $2^n - 1$ olur.

Kuvvet Kümesi

Tanım – 6

Bir A kümesinin alt kümelerinin kümesine, A kümesinin ***kuvvet kümesi*** *denir.*

A kümesinin kuvvet kümesi P(A) ile gösterilir.

Örneğin, $A = \{a,b,c\}$ ise

$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

olur.

Etkinlik – 7

$A = \{a,b,c,d,e,f\}$ kümesinin,

a. a elemanını bulunduran **alt küme**lerinin sayısını bulunuz.

b. a elemanını bulunduran ve b elemanını bulundurmayan **alt küme**lerinin sayısını bulunuz.

c. **öz alt küme**lerinin sayısını bulunuz.

d. **kuvvet kümesi**nin **alt küme**lerinin sayısını bulunuz.

Etkinlik – 8

$A = \{a,b,c,d,e,f\}$ kümesinin **alt küme**lerinin kaçında

a. a bulunmaz?
b. b bulunur?
c. a ve b bulunur?
d. a veya b bulunur?
e. a veya b bulunur ve c bulunur.
f. a veya b bulunur veya c bulunmaz.

Etkinlik – 9

$A=\{a,b,c\}$ ve $B=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ olduğuna göre, $D\subset A\subset E\subset B$ koşulunu sağlayan

a. kaç değişik D kümesi vardır?
b. kaç değişik E kümesi vardır?
c. 4 elemanlı kaç değişik E kümesi vardır?
d. 5 elemanlı kaç değişik E kümesi vardır?

Etkinlik – 10

$A=\{a,b,c\}$ ve $B=\{a,b,c,d,e,f\}$ kümeleri veriliyor. B kümesinin **alt küme**lerinin kaçında A kümesinin,

a. yalnız bir elemanı bulunur?
b. yalnız iki elemanı bulunur?
c. üç elemanı da bulunur?
d. en az bir elemanı bulunur?

Alıştırmalar ve Problemler – 1

1. Aşağıdaki ifadelerden hangileri bir küme belirtir?
Belirtilen kümeleri gösteriniz.

a. "*Türkiye'nin büyük kentleri.*"
b. "*Ailenizdeki erkekler.*"
c. "*İki basamaklı üç doğal sayı.*"
d. "*Boş kümenin alt kümeleri.*"
e. "*Tüm kümelerin kümesi.*"
f. "*15.05.2006 tarihinde doğan çocuklar.*"

2. Aşağıdaki kümelerin eleman sayılarını belirtiniz.

a. $\varnothing$ **b.** $\{0\}$ **c.** $\{\varnothing\}$
d. $\{a,b,ab\}$ **e.** $\{a,2a,a^2\}$ **f.** $\{m,n,\{m\}\}$
g. $\{a,\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ **h.** $\{a,b,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

3. Aşağıdaki ifadelerde "?" işaretlerinin yerine uygun semboller koyarak doğru önermeler elde ediniz.

a. $\{a,c\}\,?\,\{a,\{b\},c\}$ **b.** $\varnothing\ ?\ \{\varnothing,A,B\}$
c. $\{2,\{3\}\}\,?\,\{1,2,3,4\}$ **d.** $\{a,b,c\}\,?\,\{b,c,d,e\}$
e. $\{a,\{a,b\},b,c\}\,?\,\{a,b,\{a,b\}\}$
f. $\{a,\{a,b\}\}\,?\,\{a,b,\{b,a\}\}$

4. Aşağıdaki önermelerin doğru olması için "Δ" ve "$\square$" sembollerinin yerine hangi elemanlar konulmalıdır?

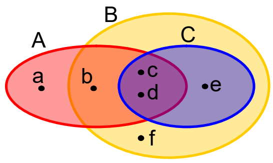
a. $\{a,\Delta,b\}=\{\square,k,a\}$ **b.** $\{1,3,\Delta,9\}=\{3,5,\square,9\}$
c. $\{\Delta,3,5\}=\{\{3\},5,\square\}$
d. $\{2,4,6,\Delta\}=\{2,\square,4,6\}$
e. $\{2,5,\Delta\}\subset\{1,2,3,4,5,6\}$
f. $\{a,b,\Delta\}\subset\{b,c,d,\square\}$

5. $A=\{\varnothing,a,\{a\}\}$ kümesinin tüm **alt küme**lerini yazınız.

6. $A=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{c\}\}$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

a. $a\in A$ **b.** $\{a,b\}\subset A$ **c.** $\varnothing\in A$
d. $\varnothing\subset A$ **e.** $\{a\}\subset A$ **f.** $\{\{c\}\}\subset A$
g. $\{a,b,c\}\subset A$ **h.** $\{\varnothing,\{a\}\}\subset A$

7. Yandaki Venn şeması ile verilen A, B, C kümelerini liste yöntemi ile yazınız.



8. Aşağıda verilen kümeleri birlikte Venn şemaları ile gösteriniz.

a. $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,3,5\}$, $C=\{1,2,5\}$
b. $A=\{1,2,4\}$, $B=\{2,3,4,5\}$, $C=\{4,5,6\}$
c. $A=\{a,b,c\}$, $B=\{b,c,d\}$, $C=\{a,d\}$
d. $A=\{3,5,6\}$, $B=\{1,2,5\}$, $C=\{2,4,5\}$

9. Aşağıdaki teoremleri ispatlayınız.

a. $A\subset\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing$
b. $(A\subset B)\wedge(B\subset C)\Rightarrow(A\subset C)$

10. $A=\{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin

a. $\{a,b\}$ kümesini kapsayan
b. $\{a,b\}$ kümesini kapsamayan
c. $\{a,c,e\}$ kümesini kapsayan
d. a, c, e elemanlarını bulundurmayan

alt kümelerinin sayısını bulunuz.

11. $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesinin alt kümelerinin kaçında,

a. 2 bulunur?
b. 5 bulunmaz?
c. 2 ve 3 bulunur?
d. 3 veya 5 bulunur?
e. 2 ya da 4 bulunur?
f. 3 bulunmaz veya 5 bulunmaz?
g. 5 bulunur ve 7 bulunmaz?
h. 2 bulunur veya 3 ile 5 bulunur?
i. 4 bulunur ya da 6 bulunur?
k. 4 bulunmaz ya da 6 bulunur?

12. $\{a,b,c\}=\{2,4,5\}$,
$\{c,d,e\}=\{1,3,5\}$,
$\{a,c,e\}=\{3,4,5\}$ olduğuna göre;
a, b, c, d, e değerlerini bulunuz.

13. Aşağıda öz alt kümelerinin sayıları verilen kümelerin eleman sayılarını bulunuz.

a. 7 **b.** 31 **c.** 63 **d.** 255

14. $A=\{1,2\}$ ve $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ olduğuna göre $A\subset K\subset B$ koşulunu sağlayan kaç tane K kümesi vardır?

15. $A=\{1,3,5,6\}$, $B=\{2,3,4,5\}$ ve $C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümeleri veriliyor.

a. $A\subset K\subset C$ ve $B\subset K\subset C$ koşullarını sağlayan kaç K kümesi vardır?
b. $R\subset A$ ve $R\subset B$ koşullarını sağlayan kaç R kümesi vardır?

16. Bir A kümesinin alt kümelerinin sayısı bir B kümesinin alt kümelerinin sayısının 3 katından 80 fazladır.
A kümesinin eleman sayısı B kümesinin eleman sayısından 3 fazla olduğuna göre;
A kümesi kaç elemanlıdır?

17. $A=\{a,b,c\}$ ve $B=\{a,b,c,d,e,f\}$ kümeleri veriliyor.
B kümesinin alt kümelerinin kaçında

a. A kümesinin yalnız iki elemanı bulunur?
b. A kümesinin en çok iki elemanı bulunur?
c. A kümesinin en az iki elemanı bulunur?
d. A kümesinin en az bir elemanı bulunur?

18. $A=\{1,3,5,6,7\}$, $B=\{2,3,5,7\}$ ve $C=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ kümeleri veriliyor.

Bir K kümesi $A\subset K\subset C$ ve $B\subset K\subset C$ koşullarını sağlamaktadır.

a. 7 elemanlı kaç K kümesi vardır?
b. Bir elemanı 4 olan kaç K kümesi vardır?
c. Kaç K kümesinde en az 4 çift sayı bulunur?
d. Elemanlarından ikisi 6 ve 9 olan, 10 elemanlı kaç K kümesi vardır?
e. A kümesinin 3 elemanlı alt kümeleri kaç tanedir?
f. C kümesinin 3 elemanlı alt kümeleri kaç tanedir?
g. C kümesinin 5 elemanlı alt kümeleri kaç tanedir?
h. C kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinden kaç tanesi A'nın alt kümesi değildir?

19. A ve B kümelerinin eleman sayılarının toplamı 7'dir.
Buna göre; A ve B kümelerinin alt kümelerinin sayılarının toplamı,

a. en az kaçtır?
b. en çok kaçtır?

20. $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ evrensel kümedir.
Öğretmen öğrencilerinden,
$s(A)+s(B)=7$ ve $A\subset K\subset B$ koşullarına uygun K kümeleri yazmalarını istemiştir.
Öğretmen kaç değişik K kümesi ile karşılaşabilir?

2 – Kümelerde İşlemler

Bu kısımda **kesişim, birleşim, tümleme** ve **fark** işlemlerini tanıtacağız.

Birleşim ve Kesişim İşlemleri

Etkinlik – 11

Bir okul, matematik ve fizik dallarında yarışmalara katılacaktır. Matematik takımı Ali, Cem, Başak ve Miray'dan; fizik takımı da yine Ali ve Cem ile Mert ve Sinan'dan oluşturulmuştur.

M, matematik dalındaki yarışmacıların kümesi;
F, fizik dalındaki yarışmacıların kümesi;
Y, yarışmacıların kümesi;
D, iki dalda da yarışacak olan yarışmacıların kümesi olduğuna göre;

a. M ve F kümelerini birlikte Venn şeması ile gösteriniz.

b. Y kümesini şema üzerinde tarayarak belirtiniz. Liste yöntemi ile yazınız.

c. D kümesini, ayrıca çizeceğiniz şema üzerinde tarayarak belirtiniz. Liste yöntemi ile yazınız.

d. Yarışmacıların M ve F kümelerinden en az birinin ya da ikisinin de elemanları olmaları özeliklerine dayanarak, Y ve D kümelerini ortak özellik yöntemi ile yazınız.

Etkinlik – 12

$A=\{x|x,\ 12'\text{nin bölenidir.}\}$ ve

$B=\{x|x,\ 18'\text{in bölenidir.}\}$ olduğuna göre;

a. A ve B kümelerini birlikte Venn şeması ile gösteriniz.

b. $C=\{x|x,\ 12'\text{nin veya } 18'\text{in bölenidir.}\}$ kümesini şema üzerinde tarayarak belirtiniz.

c. $D=\{x|x,\ 12'\text{nin ve } 18'\text{in bölenidir.}\}$ kümesini şema üzerinde tarayarak belirtiniz. Liste yöntemi ile yazınız.

Tanım – 7

*İki kümenin tüm elemanlarının kümesine bu iki kümenin **birleşim kümesi**; birleşim kümesini veren işleme de **birleşim işlemi** denir.*

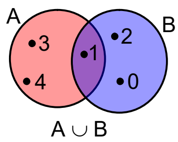
Birleşim işlemi "∪" sembolü ile; A ile B kümelerinin birleşim kümesi de $A\cup B$ ile gösterilir.

$A\cup B$ kümesinin elemanları ya A'nın ya B'nin ya da hem A'nın hem B'nin elemanlarıdır.

Buna göre, $A\cup B$ kümesi ortak özellik yöntemi ile $A\cup B=\{x|x\in A \text{ veya } x\in B\}$ biçiminde yazılır.

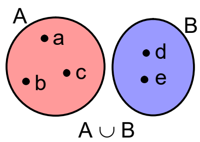
Örnek – 10

a. $A=\{1,3,4\}$ ve $B=\{0,1,2\}$ ise $A\cup B=\{0,1,2,3,4\}$ olur.

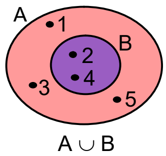


b. $\{a,b,c\}\cup\{a,b,c\}=\{a,b,c\}$ olur.

c. $A=\{a,b,c\}$ ve $B=\{d,e\}$ ise $A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$ olur.



d. $A=\{1,2,3,4,5\}$ ve $B=\{2,4\}$ ise $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$ olur.



Tanım – 8

*İki kümenin ortak elemanlarının kümesine bu iki kümenin **kesişim kümesi**; kesişim kümesini veren işleme de **kesişim işlemi** denir.*

Kesişim işlemi "∩" sembolü ile; A ile B kümelerinin kesişim kümesi de $A\cap B$ ile gösterilir.

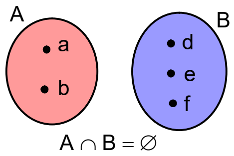
$A\cap B$ kümesinin elemanları hem A'nın hem B'nin elemanlarıdır.

Buna göre; $A\cap B$ kümesi ortak özelik yöntemi ile $A\cap B=\{x|x\in A \text{ ve } x\in B\}$ biçiminde yazılır.

Tanım – 9

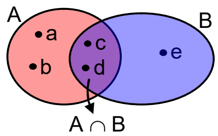
*Kesişim kümesi boş küme olan iki kümeye **ayrık kümeler** denir.*

Örneğin, $A=\{a,b\}$ ve $B=\{d,e,f\}$ ise A ile B **ayrık kümeler**dir.



Örnek – 11

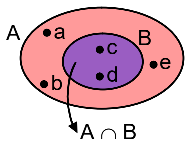
a. $A=\{a,b,c,d\}$ ve $B=\{c,d,e\}$ ise $A\cap B=\{c,d\}$ olur.



b. $\{1,2,3\}\cap\{1,2,3\}=\{1,2,3\}$ olur.

c. $A=\{1,2,3\}$ ve $B=\{7,8\}$ ise $A\cap B=\varnothing$ olur. A ile B ayrık kümelerdir.

d. $A=\{a,b,c,d,e\}$ ve $B=\{c,d\}$ ise $A\cap B=B=\{c,d\}$ olur.



Birleşim ve Kesişim İşlemlerinin Özellikleri

Tek Kuvvet Özelliği

Teorem – 5

a. $A\cup A=A$ (***Birleşimin tek kuvvet özelliği***)

b. $A\cap A=A$ (***Kesişimin tek kuvvet özelliği***)

Etkinlik – 13

$A\cup B=\{x|x\in A \text{ veya } x\in B\}$ ve $A\cap B=\{x|x\in A \text{ ve } x\in B\}$ tanımları ile önerme işlemlerinden yararlanarak **Teorem–5**'i ispatlayınız.

Teorem – 6

a. $A\cup\varnothing=A$

b. $A\cap\varnothing=\varnothing$

Etkinlik – 14

Teorem–6'yı ispatlayınız.

Değişme Özelliği

Teorem – 7

a. $A\cup B=B\cup A$ (***Birleşimin değişme özeliği***)

b. $A\cap B=B\cap A$ (***Kesişimin değişme özeliği***)

Etkinlik – 15

Önerme işlemleri ile , **Teorem–7**'yi ispatlayınız.

Birleşme Özelliği

Teorem – 8

a. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

(***Birleşimin birleşme özelliği***)

b. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

(***Kesişimin birleşme özelliği***)

Birleşme özelliğine göre, parantezler kaldırılabilir:

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$;

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$ yazılabilir.

Etkinlik – 16

Teorem–8'i ispatlayınız.

Dağılma Özeliği

Teorem – 9

a. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(***Birleşimin kesişim üzerine soldan dağılma öz.***)

b. $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

(***Birleşimin kesişim üzerine sağdan dağılma öz.***)

c. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(***Kesişimin birleşim üzerine soldan dağılma öz.***)

d. $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

(***Kesişimin birleşim üzerine sağdan dağılma öz.***)

Etkinlik – 17

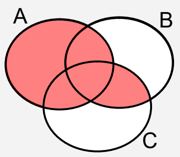
Teorem–9'u ispatlayınız.

Etkinlik – 18

a. $A \cap B = \{0,1,2,3\}$ ve $A \cap C = \{1,2,3,4\}$ olduğuna göre; $A \cap (B \cup C)$ kümesini yazınız.

b. $A \cap B = \{a,b,c,d,e\}$ ve $A \cap C = \{c,d,e,f\}$ olduğuna göre; $B \cap C$ kümesi en az kaç elemanlıdır?

c. $A \cup B = \{a,b,c,d,e\}$
$A \cup C = \{c,d,e,f\}$
olduğuna göre, şemadaki taralı bölgeye karşılık gelen kümeyi liste yöntemi ile yazınız.



Teorem – 10

a. $A \subset (A \cup B)$

b. $(A \cap B) \subset A$

c. $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$

d. $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cup B = B)$

Etkinlik – 19

"$A \subset B$" önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı "$\forall x, \ [x \in A \Rightarrow (x \in B)]$" önermesi;

"$A = B$" önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı "$\forall x, \ [x \in A \Leftrightarrow (x \in B)]$" önermesidir.

Bu bilgileri kullanarak **Teorem–10**'u ispatlayınız.

Etkinlik – 20

a. "$A \cup C = B \cup C$" önermesinin "$A = B$" önermesini gerektirmediğini gösteriniz. Örnek veriniz.

b. "$(A \cup C) \subset (B \cup C)$" önermesinin "$A \subset B$" önermesini gerektirmediğini gösteriniz. Örnek veriniz.

c. "$A \cap C = B \cap C$" önermesinin "$A = B$" önermesini gerektirmediğini gösteriniz. Örnek veriniz.

d. "$(A \cap C) \subset (B \cap C)$" önermesinin "$A \subset B$" önermesini gerektirmediğini gösteriniz. Örnek veriniz.

Etkinlik – 21

Aşağıdaki kümeleri Venn şeması ile gösteriniz.

a. $A = \{a,b,c\}$, $B = \{b,d,e\}$, $C = \{b,d,f\}$

b. $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3,4,5\}$, $C = \{5,6\}$

c. $A = \{a,b,c,f\}$, $B = \{b,c,d,e\}$, $C = \{a,c,d,f\}$

d. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, $C = \{2,5,6,7\}$

Evrensel Küme ve Tümleme İşlemi

Etkinlik – 22

Sınıfınızdaki kız öğrencilerin kümesi K olsun.

a. Sınıfınızda K'nın elemanı olmayan öğrencilerin K' kümesini ve $K \cup K'$ kümesini yazınız.

b. Okulunuzda K nın elemanı olmayan kız öğrencilerin K' kümesini ve $K \cup K'$ kümesini yazınız.

c. Okulunuzda K nın elemanı olmayan öğrencilerin K' kümesini ve $K \cup K'$ kümesini yazınız.

d. Türkiye'de K'nın elemanı olmayan lise öğrencilerinin K' kümesini ve $K \cup K'$ kümesini yazınız.

e. K'nın elemanı olmayan tüm nesnelerin kümesini yazabilir misiniz?

f. K'nın elemanı olmayan nesnelerin kümesini yazabilmek için, K'yı kapsayan bir kümenin verilmesi gerekli midir? Tartışınız.

Etkinlik – 23

$(2x+3)(x+2)(x-3) = 0$ denkleminin,

a. çift doğal sayılar kümesindeki çözüm kümesini yazınız.

b. doğal sayılar kümesindeki çözüm kümesini yazınız.

c. tam sayılar kümesindeki çözüm kümesini yazınız.

d. rasyonel sayılar kümesindeki çözüm kümesini yazınız.

e. gerçel sayılar kümesindeki çözüm kümesini yazınız.

Tanım – 10

*Belli bir konu ile ilgili tüm elemanları kapsayacak biçimde seçilen kümeye **evrensel küme** denir.*

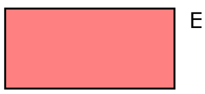
Evrensel küme **E** ile gösterilir. Bir **evrensel küme** istenildiği kadar geniş seçilebilir. Değişik konularda seçilebilecek **evrensel küme**ler farklı olabileceği gibi, aynı konuda da değişik kişilerin seçeceği **evrensel küme**ler farklı olabilir. Hatta aynı kişi aynı konuda daha dar ya da daha geniş **evrensel küme**lerle çalışabilir.

Örneğin; **iki basamaklı asal sayılar**la ilgili bir uygulamada **evrensel küme**

"**İki basamaklı tek doğal sayılar**.",
"**İki basamaklı doğal sayılar**.",
"**Tek doğal sayılar**.",
"**Doğal sayılar**.",
"**Tam sayılar**.",
...

kümelerinden herhangi biri olarak seçilebilir. Ancak bir uygulamada bir **evrensel küme** seçildikten sonra, artık bu kümenin elemanları dışındaki elemanlardan söz edilemez. Bu küme bu uygulama için **evren** sayılır. İlgilenilecek her nesne bu kümenin içerisinde aranmalıdır.

Herhangi bir kümeden ayırt edilmesi için, evrensel küme genellikle dikdörtgen biçiminde bir Venn şeması ile gösterilir.



Teorem – 11

***E** evrensel küme ve **A** herhangi bir küme olmak üzere;*

a. $A \subset E$
b. $A \cap E = A$
c. $A \cup E = E$

önermeleri birer teoremdir.

Etkinlik – 24

Önerme işlemlerinden yararlanarak **Teorem–11**'i ispatlayınız.

($x \in E$ önermesinin daima doğru olduğuna dikkat ediniz.)

Tanım – 11

***E** evrensel kümesi ile bir **A** kümesi verilmiş olsun.*

***E**'de bulunan ve **A**'da bulunmayan elemanların kümesine **A'nın tümleyeni**; A kümesinin tümleyenini bulma işlemine de **tümleme** denir.*

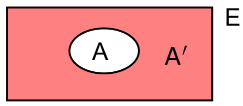
A kümesinin tümleyeni $\mathbf{A'}$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre,
$A' = \{x | x \in E \text{ ve } x \notin A\}$ olur.

$\forall x,\ x \in E \equiv 1$ ve $1 \wedge (x \notin A) \equiv x \notin A$ olduğundan

$A' = \{x | x \notin A\}$ yazılabilir.

E, A ve A' kümeleri Venn şeması ile yandaki gibi gösterilirler.



Örnek – 12

$E = \{x |\ x \text{ tam sayıdır.}\}$ ve $A = \{x |\ x \text{ çift sayıdır.}\}$ ise, $A' = \{x |\ x \text{ tek sayıdır.}\}$ olur.

Örnek – 13

$E = \{0,1,2,3,4,5\}$ ve $A = \{2,3,5\}$ ise
$A' = \{0,1,4\}$ olur.

Örnek – 14

$E = \{x |$ x sınıfınızdaki bir öğrencidir.$\}$ ve
$A = \{x |$ x sınıfınızdaki gözlüklü bir öğrencidir.$\}$ ise
$A' = \{x |$ x sınıfınızdaki gözlüksüz bir öğrencidir.$\}$ olur.

Teorem – 12

E evrensel küme ve A ile B herhangi bir küme olmak üzere;

a. $A \cup A' = E$ **b.** $A \cap A' = \varnothing$ **c.** $(A')' = A$
d. $\varnothing' = E$ **e.** $E' = \varnothing$ **f.** $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$

önermeleri birer teoremdir.

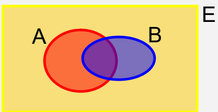
Etkinlik – 25

Teorem –12'yi ispatlayınız. (Niceleme Mantığı ile)

Birleşim ve Kesişim Kümelerinin Tümleyenleri
De Morgan Kuralları

Etkinlik – 26

Şemada A' ve B' kümelerine karşılık gelen bölgeleri farklı renklere boyayınız.



a. A', B' ve $(A\cup B)'$ kümeleri arasındaki bağıntıyı bulunuz.

b. A', B' ve $(A\cap B)'$ kümeleri arasındaki bağıntıyı bulunuz.

Teorem – 13

A ve B herhangi iki küme olmak üzere,

a. $(A\cup B)' = A'\cap B'$ **b.** $(A\cap B)' = A'\cup B'$

önermeleri birer teoremdir.

Etkinlik – 27

Teorem–13'ü ispatlayınız.

Etkinlik – 28

$E=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A\cap B=\{3,7\}$ ve

$A\cup B=\{1,2,3,5,7\}$ olduğuna göre;

a. $A'\cap B'$ kümesini yazınız.

b. $A'\cup B'$ kümesini yazınız.

Fark ve Simetrik Fark İşlemleri

Tanım – 12

*A ve B herhangi iki küme olmak üzere, A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların kümesine **A kümesinin B kümesinden farkı** denir.*

A kümesinin B kümesinden farkı, $A-B$ veya $A\setminus B$ biçiminde gösterilir; **A fark B** diye okunur.

Tanım –12'ye göre,

$A-B=\{x \mid x\in A \text{ ve } x\notin B\}$ olur.

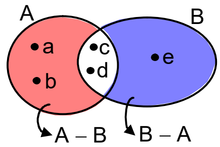
Örnek – 15

$A=\{a,b,c,d\}$ ve

$B=\{c,d,e\}$ ise

$A-B=\{a,b\}$ ve

$B-A=\{e\}$ olur.



Etkinlik – 29

a. $A=\{1,2,3\}$ ve $B=\{3,4,5\}$ kümeleri için $A-B$ ve $B-A$ kümelerini yazınız. $A\neq B$ ise $A-B\neq B-A$ diyebilir misiniz?

b. $A=\{a,b,c\}$ ve $B=\{d,e\}$ kümeleri için $A-B$ ve $B-A$ kümelerini yazınız.

c. $A=\{a,b,c,d\}$ ve $B=\varnothing$ kümeleri için $A-B$ ve $B-A$ kümelerini yazınız.

d. $A=\{2,4\}$ ve $B=\{1,2,3,4,5\}$ kümeleri için $A-B$ ve $B-A$ kümelerini yazınız.

Teorem – 14

E evrensel küme ve A ile B herhangi iki küme olmak üzere;

a. $A-B=A\cap B'$ **b.** $A-A=\varnothing$

c. $A-\varnothing=A$ **d.** $\varnothing-A=\varnothing$

e. $E-A=A'$ **f.** $(A\subset B)\Leftrightarrow(A-B=\varnothing)$

önermeleri birer teoremdir.

Etkinlik – 30

Niceleme mantığı veya küme işlemlerinden yararlanarak **Teorem–14**'ü ispatlayınız.

Etkinlik – 31

Aşağıdaki teoremleri ispatlayınız.

a. $A\cup B=A\cap B \Leftrightarrow A=B$

b. $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

c. $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

d. $(A-B)=(B'-A')$

e. $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

f. $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

Tanım – 13

A ve B birer küme olmak üzere;
*$A-B$ kümesi ile $B-A$ kümesinin birleşimine A ile B'nin **simetrik fark**ı denir.*

A ve B kümelerinin simetrik farkı **$A\Delta B$** ile gösterilir;

"**A simetrik fark B**" diye okunur.

Tanım –13'ün sembolik ifadesi

$\mathbf{A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)}$ eşitliğidir.

Örnek – 16

$A=\{1,2,3,6\}$ ve $B=\{1,3,5\}$ ise

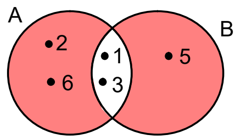
$A-B=\{2,6\}$ ve

$B-A=\{5\}$ olur.

$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

$\Rightarrow\ A\Delta B=\{2,6\}\cup\{5\}$

$\Rightarrow\ A\Delta B=\{2,5,6\}$ olur.



A Δ B

Etkinlik – 32

A ve B birer küme olmak üzere;

$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

olduğunu küme işlemlerinden yararlanarak gösteriniz.

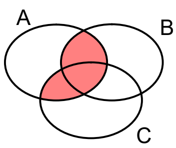
Etkinlik – 33

Kümelerde **kesişim** işleminin **simetrik fark** işlemi üzerine sağdan ve soldan **dağılma özelliği** olduğunu gösteriniz.

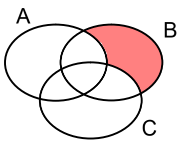
Etkinlik – 34

Aşağıda verilen Venn şemalarında boyalı bölgelere karşılık gelen kümeleri A, B, C türünden en sade biçimde ifade ediniz.

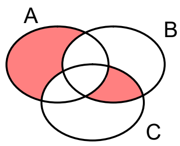
a.



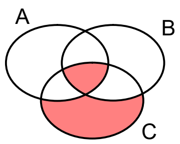
b.



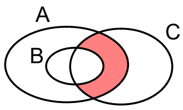
c.



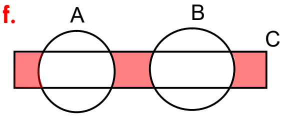
d.



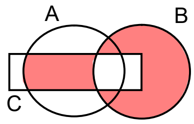
e.



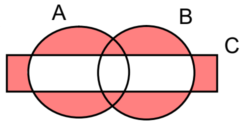
f.



g.



h.



Etkinlik – 35

Aşağıda belirtilen kümeleri hem küme işlemlerinden hem de Venn şemasından yararlanarak, en sade biçimde yazınız.

a. $(A\cap B)\cup(A-B)$

b. $(A\cup B)\cap B'$

c. $(A\cup B)\cap(A\cup B')$

d. $[(A\cup B')\cap(A\cap C)]-[(A\cap C)-B]$

e. $(A\cap B)\cup[B\cap(C-A)]$

f. $(A-B)\cup(A-C)\cup(B-C')$

g. $[A\cap(A'\cup B)]\cup[(A\cup B')\cap B]$

h. $[(A'\cup B)\cap(B\cup C)]\cup(B'\cap C)$

Etkinlik – 36

$A\cap B=\{2,3,4\}$, $A\cap C=\{3,4,7\}$,

$B\cap C=\{3,4,6\}$, $A\cup C=\{1,2,3,4,6,7,8\}$

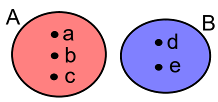
ve $B\cup C=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ olduğuna göre;

A, B, C kümelerini birlikte Venn şeması ile gösteriniz.

Birleşim Kümesinin Eleman Sayısı

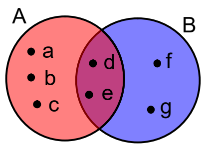
Etkinlik – 37

a. $A=\{a,b,c\}$ ve $B=\{d,e\}$ ayrık kümeleri için $A\cup B$ kümesini yazınız.



$A \cap B = \varnothing$ ise
$s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ olduğunu gösteriniz.

b. $A = \{a, b, c, d, e\}$
$B = \{d, e, f, g\}$
kümeleri için
$A \cup B$ ve
$A \cap B$ kümelerini
yazınız.



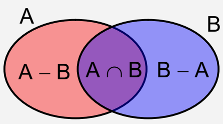
$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$
olduğunu gösteriniz.

Teorem – 15

A ve B herhangi iki küme olmak üzere;
$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$
önermesi bir teoremdir.

Etkinlik – 38

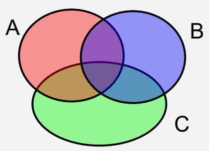
$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ olup
$A - B$, $A \cap B$ ve $B - A$
kümelerinin ayrık
olması nedeniyle



$s(A \cup B) = s(A - B) + s(A \cap B) + s(B - A)$
olacağını düşünerek **Teorem –15**'i ispatlayınız.

Etkinlik – 39

Yandaki Venn şemasından yararlanarak $s(A \cup B \cup C)$ sayısını veren bağıntıyı bulunuz.



Teorem – 16

A, B, C herhangi üç küme olmak üzere,

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(B \cap C) - s(A \cap C) + s(A \cap B \cap C)\text{'dir.}$$

Etkinlik – 40

Teorem–16'yı ispatlayınız.

Etkinlik – 41

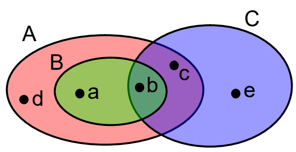
A, B, C kümeleri için
$s(A \cup B) = 7$, $s(B \cup C) = 8$,
$s(A \cap B) = 1$, $s(B \cap C) = 1$ ve $A \cap C = \varnothing$'dir.
Venn şemasından yararlanarak $s(A \cup B \cup C)$ sayısını bulunuz.

Alıştırmalar ve Problemler – 2

1. Evrensel küme $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4,5\}$ ve $C = \{3,5,6\}$ olduğuna göre; aşağıdaki kümeleri liste yöntemi ile yazınız.

a. $A \cap B$ **b.** $A \cup C$ **c.** $B - C$
d. $A \Delta B$ **e.** $A' \cap B'$ **f.** $B' \cup C'$
g. $A' \Delta C'$ **h.** $(A \cup B) \cap C$ **i.** $A \cup (B \cap C)$
j. $A - (B \cap C)$ **k.** $(A \cup B) - C$ **l.** $(A - B) - C$
m. $B - (A - C)$ **n.** $B' - C'$
o. $B' - (A \cup C)$
p. $(A \cup B) - (B \cap C)$
r. $(A - B) \cup (B - C)$
s. $(B \Delta C)' \cap (A' - C)$
t. $(A - C') \cup (B' - C)$
u. $(A' \Delta B') \cup (B - C')$

2. A, B, C kümeleri Venn şeması ile verilmiştir.
Buna göre, aşağıdaki kümeleri liste yöntemi ile yazınız.



a. $A \cap C$ **b.** $B \cup C$ **c.** $A - C$
d. $B \Delta C$ **e.** $A \cap (B \cup C)$ **f.** $(A \cap C) \cup B$
g. $C - (A \cap B)$ **h.** $(B \cup C) - A'$
i. $A - (B \cup C)'$ **j.** $(A - B) - C$
k. $B - (A \Delta C)$ **l.** $(A - C) \cup (A \cap B)$
m. $(A - B) \cup (C - B)$ **n.** $B' \cap (A - C')$
o. $A - (B - C)$ **p.** $(A \Delta B) - (A \Delta C)$

3. Aşağıdaki kümeleri birlikte Venn şeması ile gösteriniz.

a. $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{c,d,e,f\}$, $C=\{d,e,f,g\}$

b. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4,5\}$, $C=\{5,6\}$

c. $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,d\}$, $C=\{c,d,e\}$

d. $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{2,5,6\}$, $C=\{3,4,5,6\}$

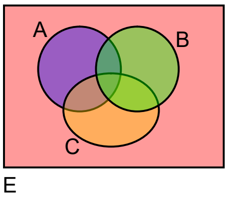
e. $A=\{a,b\}$, $B=\{c,d,e\}$, $C=\{f\}$

f. $A=\{2,3,5,7\}$, $B=\{2,3,4\}$, $C=\{6,8\}$

g. $A\cup B=\{1,2,3,4\}$, $A\cup C=\{1,2,4,5,6\}$
$A\cap B=\{2\}$, $B\cap C=\{\ \}$

h. $A\cap B=\{a,d\}$, $A\cap C=\{d\}$, $B\cap C=\{c,d\}$
$A\cup C=\{a,c,d,e,f\}$, $B\cup C=\{a,b,c,d,e\}$

4. A, B, C kümeleri şemadaki gibi verilmiştir. Aşağıdaki kümelerin her birine karşılık gelen bölgeleri, aynı biçimde çizeceğiniz şemalar üzerinde renklendiriniz.



a. $(A\cup B)\cap C$ **b.** $(A\cup B)\cap(A\cup C)$

c. $(A\cap B)\cup(B\cap C)$ **d.** $(B\cup C)-A$

e. $(A\cup C)-(B-C)$ **f.** $[A\cap(B\cup C)]\cup(B\cap C)$

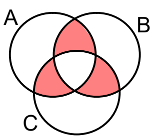
g. $(A\Delta B)-C$ **h.** $(A\cup C)\Delta B$

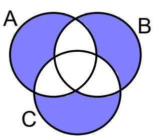
i. $(A\cap B)'-C'$ **j.** $(B\cup C)'\cup A$

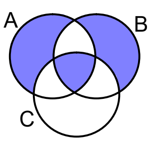
k. $[(A\cap B)-C]\cup(C-B)$

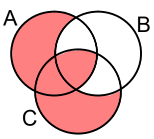
l. $[A-(B\cup C)]\cup[(B\cap C)-A]$

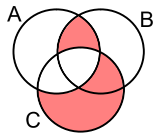
5. Aşağıdaki şemalarda boyanarak belirtilen kümeleri sembollerle gösteriniz.

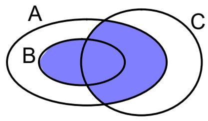
a.


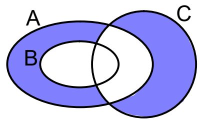
b.


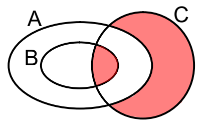
c.


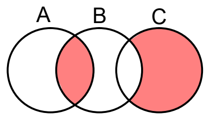
d.


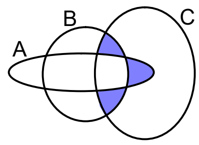
e.


f.


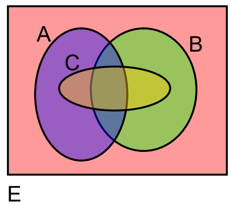
g.


h.


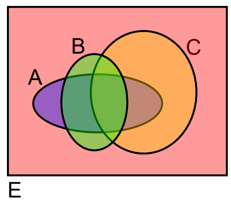
i.


j.


6. A, B, C kümeleri şemadaki gibi verilmiştir.
4. alıştırmada verilen kümelere karşılık gelen bölgeleri aynı biçimde çizeceğiniz şemalar üzerinde renklendiriniz.



7. A, B, C kümeleri şemadaki gibi verilmiştir.
4. alıştırmada verilen kümelere karşılık gelen bölgeleri aynı biçimde çizeceğiniz şemalar üzerinde renklendiriniz.



8. Aşağıda verilenlere göre, istenenleri bulunuz.

a. $A=\{a,b,c\}$ ve $B-A=\{d,e\}$ ise $A\cup B=?$

b. $A=\{1,2,3\}$ ve $A'\cap B=\{4\}$ ise $A\cup B=?$

c. $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$, $A\cap B=\{1,3\}$ ve
$A-B=\{2\}$ ise $B-A=?$

d. $A=\{a,b,c\}$, $A'=\{d,e,f\}$ ve $B=\{a,c,e\}$
ise $B'=?$

9. **a.** $A\cup B=\{a,b,c\}$ ve $A\cup C=\{b,c,d\}$ ise
$A\cup(B\cap C)$ kümesini yazınız.

b. $A\cap B=\{1,2,3,4\}$ ve $A\cap C=\{2,4,5,6\}$ ise
$A\cap(B\cup C)$ kümesini yazınız.

10. $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$ ve $B\cup C=\{3,4,5,6\}$ ise $A-(B\cup C)$ kümesini yazınız.

11. $A-B=\{a,b,d\}$ ve $B-C=\{c,e\}$ ise $(A\cup B)-(B\cap C)$ kümesini yazınız.

12. $A-B=\{a,b,c\}$ ve $A-C=\{b,c,d\}$ olduğuna göre;

a. $A-(B\cup C)$ kümesini yazınız.

b. $A-(B\cap C)$ kümesini yazınız.

c. $(A\cap B)\Delta(A\cap C)$ kümesini yazınız.

13. Aşağıdaki kümeleri en sade biçimde yazınız. (E evrensel kümedir.)

a. $(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)$

b. $(A\cap B')\cup(A\cap E)$

c. $(A\cup\varnothing)\cup(A'\cap E)$

d. $(A\cup E)\cap(A\cup B)\cap(B\cup\varnothing)$

e. $A\cap(A\cup B)$

f. $(A\cap B)\cup B$

14. Aşağıdaki kümeleri hem Venn şemasından hem de küme işlemlerinden yararlanarak en sade biçimde yazınız.

a. $(A\cap B')\cup(A\cap B)$

b. $(A\cup B')\cap(A\cup B')\cap(A'\cup B)$

c. $(A\cap B)\cap(B\cup C)$

d. $A-(B-A)$

e. $A-(A-B)$

f. $(A-B)\cap(A-B')$

g. $(A-B)\cup(A'\cup B)$

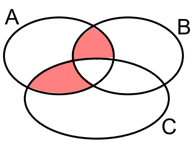
h. $[A\cup(B-A)]\cap B'$

i. $(A'\cup B)\cap(A\cup B)\cap A'$

j. $\left[A\cap(A\cup B)'\right]\cup(A\cap B)$

k. $[A'\cap(A\cup B)]\cup\left[A\cap(A\cup B)'\right]$

15. $A\cap B=\{1,2,3,4\}$
$A\cap C=\{2,3,4,5,6\}$
olduğuna göre, şemadaki taralı bölgeye karşılık gelen kümeyi yazınız.



16. $A\cup B=\{1,2,3,4\}$ ve $A\cup C=\{3,4,5,6,7\}$ olduğuna göre;

a. en dar C kümesini yazınız.

b. en geniş A kümesini yazınız.

17. $A\cup B=\{1,2,3,4,5,7,9\}$ ve $A\cup B'=\{1,3,5,6,7,8,9\}$ olduğuna göre A′ kümesini yazınız.

18. $A\cap B=\{1,2\}$, $A'-B=\{3,4,5\}$, $(A-B)'=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B'=\{3,4,5,7,8\}$ olduğuna göre; $A\cup B$ kümesini yazınız.

19. A ve B kümeleri için;

a. $A\cap B\neq\varnothing$, $s(A)=7$ ve $s(B)=9$ ise $s(A\cup B)$ en çok kaç olabilir?

b. $B\not\subset A$, $s(A)=12$ ve $s(B)=8$ olduğuna göre, $s(A\cup B)$ en az kaç olabilir?

c. $s(A)+s(B)=16$ ve $s(A-B)+s(B-A)=10$ olduğuna göre, $s(A\cup B)$ kaçtır?

d. $A\not\subset B$, $B\not\subset A$, $s(A\cup B)=13$ ve $s(A\cap B)=5$ ise; s(A) en çok kaçtır?

e. $s(A)=5$, $s(A\cap B)=3$ ve $s(A\cup B)=9$ ise $s(A'\cap B)$ kaçtır?

f. $s(A-B)=8$, $s(B-A)=3$ ve $s(A)=3\cdot s(A\cap B)$ ise $s(A\cup B)$ kaçtır?

g. $s(A\cap B)=3$, $s(A\cup B)=16$ ve $s(A)=3\cdot s(B-A)$ ise s(B) kaçtır?

h. $A\cap B\neq\varnothing$, $s(A)=8$ ve $s(A\cup B)-s(A\cap B)=12$ ise; s(B) en az kaçtır?

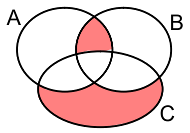
20. A, B ve C kümeleri için;

a. $s(A)=7$, $s(B)=9$, $s(C)=6$, $s(A\cap B)=3$, $s(A\cap C)=2$ ve $s(B\cap C)=0$ ise; $s(A\cup B\cup C)$ kaçtır?

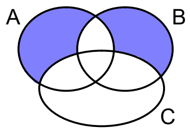
b. $s(A)=5$, $s(B)=6$, $s(C)=8$, $s(A\cap B)=s(A\cap C)=3$, $s(B\cap C)=4$ ve $s(A\cap B'\cap C')=2$ ise $s(A\cup B\cup C)$ kaçtır?

21. $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{3,4,5,6\}$ ve $C=\{5,6,7\}$ olduğuna göre;

a. Şemadaki boyalı bölgelerin birleşimine karşılık gelen kümeyi yazınız.



b. Şemadaki boyalı bölgelerin birleşimine karşılık gelen kümeyi yazınız.



22. $A=\{2,3\}$ ve $B=\{1,3,5\}$ olduğuna göre;

a. $A\cup C=B\cup C$ koşulunu sağlayan 3 elemanlı C kümesini yazınız.

b. $A\cap C=B\cap C$ koşulunu sağlayan 3 elemanlı bir C kümesi yazınız.

c. $(A\cup C)\subset(B\cup C)$ koşulunu sağlayan 3 elemanlı bir C kümesi yazınız.

d. $(A\cap C)\subset(B\cap C)$ koşulunu sağlayan 3 elemanlı bir C kümesi yazınız.

23. A ve B kümeleri için;
$s(A'\cup B')=30$, $s(A'\cap B')=10$ ve
$3\cdot s(A-B)=4\cdot s(A\cap B)=2\cdot s(B-A)$
olduğuna göre, s(A) kaçtır?

24. $A=\{x|\ x<400 \text{ ve } x=4k;\ k\in Z^{+}\}$,
$B=\{x|\ x\leq 600 \text{ ve } x=6k;\ k\in Z^{+}\}$
kümeleri veriliyor.

a. $s(A\cap B)$ kaçtır?

b. $s(A-B)$ kaçtır?

c. $s(B-A)$ kaçtır?

d. $s(A\cup B)$ kaçtır?

25. A ve B kümeleri için; $A'\cup B=\{3,4,5,6,7\}$ ve $A\cup B'=\{1,2,3,5,6,7\}$ olduğuna göre;

a. $B-A$ kümesini yazınız.

b. $A\Delta B$ kümesini yazınız.

26. E evrensel küme; A, B ve C birer küme olduğuna göre;
aşağıdaki teoremleri ispatlayınız.

a. $A\cap(B-A)=\varnothing$

b. $A\cup(B-A)=A\cup B$

c. $(A-B)\cap(A\cap B)=\varnothing$

d. $(A\Delta B)\cap A=A-B$

e. $A\subset B\Rightarrow(A\cup C)\subset(B\cup C)$

f. $A\subset B\Rightarrow(A\cap C)\subset(B\cap C)$

g. $(A\subset B)\Rightarrow A\subset(B\cup C)$

h. $A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\subset B'$

i. $A\cup B=C\Rightarrow(A\subset C)\wedge(B\subset C)$

j. $A\cap B=C\Rightarrow(C\subset A)\wedge(C\subset B)$

k. $(C\subset A)\wedge(C\subset B)\Leftrightarrow C\subset(A\cap B)$

l. $(C\subset A)\wedge(C\subset B)\Rightarrow C\subset(A\cup B)$

m. $A\subset B\Rightarrow A\cup(B-A)=B$

n. $(A\subset C)\wedge(B\subset C)\Rightarrow(A\cup B)\subset C$

o. $(A\subset C)\wedge(B\subset C)\Rightarrow(A\cap B)\subset C$

p. $(A\subset B)\wedge(C\subset D)\Rightarrow(A\cap C)\subset(B\cap D)$

q. $(A\subset B)\wedge(C\subset D)\Rightarrow(A\cup C)\subset(B\cup D)$

3 – Kümelerin Çarpımı

Sıralı İkili; Sıralı n'li

Etkinlik – 42

a. Bir listede kişilerin adları ve soyadları (Adı, Soyadı) sırasıyla yazılmış olsun.

Bu durumda, (İnci, Erol) ve (Erol, İnci) ifadelerini açıklayınız.

(İnci, Erol) ifadesi, aynı anlama gelmek üzere küme ayıracı ile {İnci, Erol} biçiminde yazılabilir mi? Yazılırsa, anlam nasıl değişir?

b. Bir koşuya katılan yarışmacıların sırt numaraları 1, 2, 3, 4, 5 olsun.

Koşunun sonuçları
(Yarışmacının numarası, Sıralamadaki yeri)
ifadeleri ile verilmiş ise;

$(2,4)$ ve $(4,2)$ ifadelerini açıklayınız.

c. Bir zarfın üzerindeki "*Levent, 5. sokak, 7/3*" adresinin "*Levent, (5, 7, 3)*" biçiminde yazıldığını düşününüz.

Adresteki sayılar değişik sıralamalarla yazılırsa, zarf kaç değişik adrese gidebilir?

Tanım – 14

*a ve b gibi iki elemanın belirli bir sırada dizilmesiyle oluşturulan yeni (a, b) nesnesine **sıralı ikili** –ya da kısaca **ikili**– denir.*

(a, b) ikilisinde **a**'ya **birinci bileşen**, **b**'ye **ikinci bileşen** denir. **Bileşen** yerine **koordinat** terimi de kullanılır.

Bu tanıma dayanılarak **sıralı üçlü, sıralı dörtlü, ..., sıralı n'li** ($n \in N^+$) tanımları yapılabilir:

Şöyle ki; a, b, c elemanları verilmiş olsun. **(a, b)** sıralı ikilisi ile **c**'nin oluşturduğu sıralı ikiliye **sıralı üçlü** denir. **(a, b)** ile **c**'den elde edilen bu yeni nesne **(a, b, c)** biçiminde gösterilir:

$((\mathbf{a},\mathbf{b}),\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$

Aynı yolla, bir **sıralı dörtlü**

$((\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}),\mathbf{d}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})$ olarak;

bir **sıralı n'li** de ($n \in N^+$)

$\left((\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-1}),\mathbf{a}_n\right) = \left(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{a}_n\right)$ olarak

tanımlanabilir.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi; iki sıralı n'linin eşit olabilmesi için karşılıklı bileşenlerinin eşit olması gerekir.

$(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n) = (b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n)$ ise

$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3,\ldots,\ a_n = b_n$ olmalıdır.

Örnek – 17

$(a,b) = (2x+1,\ 2y+3) = (x+4,\ 5y)$

olduğuna göre; (a,b) ikilisini bulalım:

$$\left.\begin{aligned} 2x+1 &= x+4 \\ 2y+3 &= 5y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{olur.}$$

$(a,b) = (2\cdot 3+1,\ 5\cdot 1) = (7,5)$ bulunur.

Kümelerin Çarpımı

Etkinlik – 43

Bir sınıfta numaraları $Ö = \{13,27,44\}$ kümesinden olan öğrencilerin matematik notlarının $N = \{A,B,C\}$ kümesinden olduğu bilinmektedir.

a. $(x,y) = $ (Öğrencinin numarası, Öğrencinin notu) olduğuna göre, (x,y) ikililerinin K kümesini liste yöntemi ile yazınız.

b. K kümesini oluşturan (x,y) ikililerinde $x \in Ö$ ve $y \in N$ olduğunu belirterek, K kümesini ortak özellik yöntemi ile yazınız.

Tanım – 15

*A ve B kümeleri verildiğinde, birinci bileşeni A kümesinden ve ikinci bileşeni B kümesinden alınarak oluşturulmuş tüm ikililerin kümesine, A ve B kümelerinin **kartezyen çarpımı** veya kısaca **çarpımı** denir.*
*Çarpım kümesini veren işleme de **kartezyen çarpma işlemi** veya **çarpma işlemi** adı verilir.*

A ve B kümelerinin çarpımı **AxB** biçiminde gösterilir; "**A kartezyen çarpım B**" veya "**A çarpı B**" diye okunur.

Tanıma göre,

$A \times B = \{(x,y) | (x \in A) \text{ ve } (y \in B)\}$ ve

$B \times A = \{(x,y) | (x \in B) \text{ ve } (y \in A)\}$ olur.

Tanımdaki **kartezyen** sözcüğü, Fransız matematikçisi **Rene Descartes**'ın (1596-1650) adından gelir.

Örnek – 18

$A = \{a,b,c\}$ ve $B = \{3,5\}$ ise

$A \times B = \{(a,3),(a,5),(b,3),(b,5),(c,3),(c,5)\};$

$B \times A = \{(3,a),(3,b),(3,c),(5,a),(5,b),(5,c)\};$

$A \times A = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),$
$(c,a),(c,b),(c,c)\}$ olur.

Etkinlik – 44

$A = \{a,b\}$ ve $B = \{b,c,d,e\}$ kümeleri verilmiş olsun.

a. $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini yazınız. $A \times B \neq B \times A$ olduğunu görünüz.

b. $s(A)$, $s(B)$, $s(A \times B)$ sayıları arasındaki bağıntıyı bulunuz.

Boş kümeden farklı A ve B kümeleri için,

$A \neq B$ ise $A \times B \neq B \times A$ olur.

$A \times B$ kümesinde, A'nın her bir elemanı için B'nin elemanlarının sayısı kadar eleman bulunacağından, $s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$ olur.

Tanım – 16

$A_1, A_2, ..., A_n$ kümeleri verildiğinde; birinci bileşeni A_1 kümesinden, ikinci bileşeni A_2 kümesinden, …, n'yinci bileşeni A_n kümesinden alınarak oluşturulmuş tüm sıralı n'lilerin kümesine $A_1, A_2, ..., A_n$ kümelerinin ***kartezyen çarpımı*** *denir.*

Tanım – 16'nın sembollerle ifadesi

$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$
$= \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2,\ ...,\ x_n \in A_n\}$ olur.

Bu tanıma göre,

$A \times B \times C = \{(x,y,z) | x \in A \text{ ve } y \in B \text{ ve } z \in C\}$ olur.

$A_1 = A_2 = ... = A_n$ olması durumunda

$A \times A \times ... \times A$ kümesi A^n biçiminde yazılabilir.

Özel olarak, $A \times A$ kümesi A^2 ve $A \times A \times A$ kümesi A^3 ile gösterilir.

► $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ kümesinin elemanları yazılırken, A_1 kümesinin her bir elemanının yanına ikinci bileşen olarak A_2 kümesinin $s(A_2)$ değişik elemanı, onun yanına A_3 kümesinin $s(A_3)$ değişik elemanı, …, onun yanına A_n kümesinin $s(A_n)$ değişik elemanı yazılabileceğinden,

$s(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) = s(A_1) \cdot s(A_2) \cdot ... \cdot s(A_n)$ olur.

Özel olarak,

$s(A \times B \times C) = s(A) \cdot s(B) \cdot s(C)$'dir.

Kartezyen Çarpım Kümesinin Şema ve Grafikle Gösterilmesi

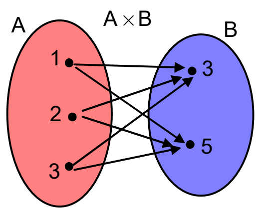
Venn Şemasıyla Gösterme

A ve B kümeleri –ortak elemanları olsa bile- ayrık Venn şemalarıyla gösterilirler. $A \times B$ kümesinin elemanı olan ikililer, birinci bileşenden ikinci bileşene yönlendirilmiş oklarla belirtilirler.

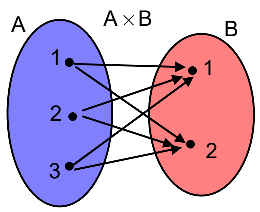
$A \times B$'nin bu gösteriliş biçimi pek kullanışlı değildir.

Örnek – 19

a. $A = \{1,2,3\}$ ve $B = \{3,5\}$ ise, $A \times B$ kümesi Venn şeması ile, yandaki gibi gösterilir.



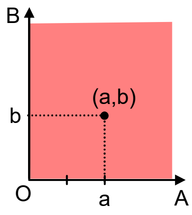
b. $A = \{1,2,3\}$ ve $B = \{1,2\}$ ise, $A \times B$ kümesi yandaki gibi gösterilir.



$B \subset A$ olması şemayı etkilemez.

Kartezyen Koordinat Şemasıyla Gösterme

A kümesinin elemanları –genellikle– yatay olarak çizilen bir [OA ışını üzerinde; B kümesinin elemanları da buna dik olarak çizilen bir [OB ışını üzerinde rastgele alınan noktalarla gösterilirler.



Bu noktalardan ışınlara çizilen paralel doğruların kesim noktaları, $A \times B$ kümesinin elemanlarına karşılık gelen noktalar olurlar. Bu noktaların kümesine **AxB kümesinin grafiği** denir. Grafiği oluşturan noktalar bir **Venn şeması** ile çevrelenebilir.

Bu gösterimde $A \times B$'nin elemanları çeyrek düzlemin noktalarına –bir ölçüde– rastgele eşlendikleri için, grafik Venn şeması niteliğindedir.

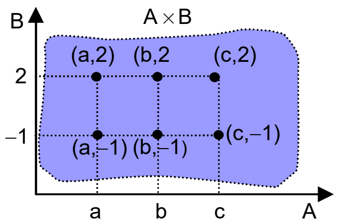
Kartezyen koordinat şeması –genellikle– bileşenlerinden en az biri sayı olmayan ikililerin kümelerinin gösterilmesinde kullanılır.

Örnek – 20

$A = \{a,b,c\}$ ve

$B = \{-1,2\}$ ise

$A \times B$ kümesinin grafiği yandaki gibi olur.



Analitik Düzlemde Gösterme

A ve B kümeleri birer sayı kümesi iken,
AxB kümesi **Kartezyen Koordinat Sistemi**nde gösterilebilir.

Kartezyen Koordinat Sistemini sezgisel sayılabilecek yollarla öğrenmiştiniz.

Bu bilgilerinizi matematiksel temellerine oturtmaya çalışalım;

R, Gerçel Sayılar Kümesinin elemanlarının bir doğrunun noktaları ile,
RxR kümesinin elemanlarının da bir düzlemin noktaları ile bire bir nasıl eşlendiğini açıklayalım:

Sayı Doğrusu

Aksiyom –1

Cetvel Aksiyomu

Bir doğru üzerinde alınan her bir noktaya bir tek gerçek sayı ve karşıt olarak her gerçel sayıya bu doğru üzerinde bir tek nokta karşılık gelir.

Aksiyom – 1'de belirtilen türdeki eşlemelere **bire bir** ve **örten** eşlemeler denir.

Koordinat kavramı bu **aksiyom** üzerine kurulur.

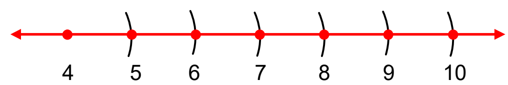
Tanım – 17

Noktaları ile gerçel sayılar arasında bire bir ve örten eşleme kurulmuş bir doğruya ***koordinat sistemi*** *veya* ***sayı doğrusu*** *denir.*
Bu eşlemede bir noktaya karşılık gelen gerçel sayıya o noktanın ***koordinat****ı adı verilir.*

Bir P noktası, **x koordinatı** ile birlikte **P(x)** biçiminde gösterilir.

Sezgimize dayanarak; **gerçel sayılar** ile bir doğrunun noktaları arasında **Cetvel Aksiyomu** ile kurulan eşlemenin, bir cetvelin kenarındaki sayıların düzeni içinde olması gerektiğini düşünürüz. Eşlemede sayılar büyüklük sırasına dizilmeli ve ardışık tam sayılar –belli bir ölçüde açılmış pergelle, pergelin açıklığı bozulmadan elde edilecek– eşit aralıklı noktalara eşlenmelidir.

Şekli inceleyiniz.

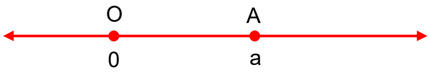


Rastgele yapılacak bir eşlemede koordinat kavramının bir işe yaramayacağı açıktır.

Aksiyom –2

Sistem Seçme Aksiyomu

Bir doğru üzerinde ***O*** *ve* ***A*** *gibi iki nokta verildiğinde,* ***O****'nun* ***koordinatı sıfır*** *ve* ***A****'nınki pozitif bir* ***gerçel sayı*** *olacak biçimde bir ve yalnız bir* ***koordinat sistemi*** *seçilebilir.*



Şekilde **A noktasının koordinatı** olan “**a**” sayısı istenildiği gibi seçilebilir. Ancak doğru üzerindeki belirli **O** ve **A** noktaları için, örneğin; **O(0)** ve **A(1)** olarak seçilecek **koordinat sistemi** yalnız bir tanedir.

Tanım – 18

*Bir **koordinat sistemi**nde, verilen iki noktanın koordinatlarının farkının mutlak değerine bu iki nokta arasındaki **uzaklık** denir.*

A ve B noktaları arasındaki uzaklık **IABI** biçiminde gösterilir. **A(a)** ve **B(b)** ise $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$ dır. **IABI** ifadesi aynı zamanda, **[AB] doğru parçasının uzunluğu** anlamına gelir.

Örneğin; $A(-2)$ ve $B(3)$ ise

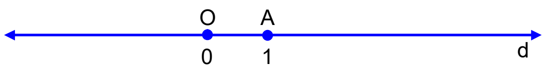
$|AB| = |3-(-2)| = 5$ birim olur.

► Yukarıdaki **aksiyom**lara ve **tanım**lara göre, tüm farklı **gerçel sayı birlileri** bir doğru üzerinde farklı birer **nokta**ya karşılık gelir.

$A(3)$, $B(-14)$, $C(127)$, … gibi.

Diğer taraftan, bir doğru üzerindeki nokta kümelerinin en çok bir **boyut**u –uzunluk boyutu– olabilir. Bunlar dikkate alınarak; tüm gerçel sayı birlilerinin kümesine **bir boyutlu uzay** denir.

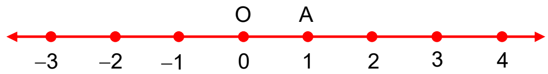
Şekildeki **d doğrusu bir boyutlu uzaydır**.
Doğru, bir **noktalar kümesi**dir.
Doğrunun noktalarından ikisi seçilip birer sayı ile eşleştirilirse, bu bir boyutlu uzaya bir **koordinat sistemi** eklenmiş olur. Örneğin; **O** ve **A** noktaları seçilip **O(0)** ve **A(1)** eşlemeleri yapılırsa, d doğrusu bir koordinat sistemi ile donatılmış olur.



Artık; bu doğrunun her bir noktasına hangi gerçek sayının karşılık getirileceği bellidir. O noktasına **koordinat sistemi**nin **başlangıç noktası** (ya da **orijini**) denir.

$|OA|$ uzunluğu bu sistemdeki **birim uzunluk**tur.

O(0) ve **A(1)** noktaları ile belirtilmiş olan koordinat sistemini **tam sayılar**la donatmak için, pergel IOAI kadar açılır; A’dan başlayarak A’nın sağına doğru ve O’dan başlayarak O’nun soluna doğru, pergelin her adımına karşılık gelen noktalar işaretlenir; Tam sayılar bu noktalara büyüklük sırasına göre dizilirler:



Ardışık iki tam sayıya karşılık gelen noktaların belirttiği her doğru parçası, gerekli sayıda eş parçalara bölünerek istenilen her **rasyonel sayı** da karşılık geldiği noktaya eşlenir.

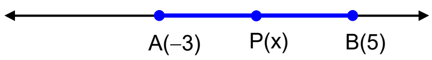
Koordinat sisteminde **irrasyonel sayıları**n eşleneceği noktalar, bunların tanımlarına dayanılarak uygun yöntemlerle bulunur. Bir **doğrunun noktaları** ile **gerçel sayılar** arasında böyle bir **eşleme**nin kurulması, **bir boyutlu geometrik şekiller**le **gerçel sayı kümeleri** arasında da **eşleme**lerin kurulabilmesini olanaklı kılar.

Örnek – 21

Uçları $A(-3)$ ve $B(5)$ olan $[AB]$ doğru parçasına karşılık gelen gerçek sayılar kümesini bulalım:

$[AB]$ doğru parçası, A ve B noktaları ile bunların arasındaki noktaların kümesidir.

$A(-3)$ ve $B(5)$ noktaları arasındaki bütün $P(x)$ noktalarının x koordinatları $-3 < x < 5$ koşuluna uyar.



Buna göre, $[AB]$ geometrik ifadesi ile

$\{x \mid -3 \le x \le 5\}$ kümesi aynı bir geometrik şekle karşılık gelirler.

Öyleyse;

$[AB] = \{x \mid -3 \le x \le 5,\ x \in R\}$ eşitliği yazılabilir.

$[AB]$ kümesi, “$[-3,5]$” biçiminde de gösterilir.

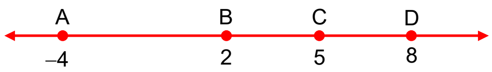
Örnek – 22

Bir koordinat sisteminde $A(-4)$, $B(2)$, $C(5)$ ve $D(8)$ noktaları verilmiş olsun.

a. $[AC]\cup[BD]$ **b.** $[AC]\cap[BD]$ **c.** $[AD]\cap[BC]$

d. $[AC]-[BD]$ **e.** $[AC]-[CD]$ **f.** $[AD]-[BC]$

kümelerini bulalım:



a. $[AC]\cup[BD]=[AD]=[-4,8]$ Açıklayınız.

b. $[AC]\cap[BD]=[BC]=[2,5]$ Açıklayınız.

c. $[AD]\cap[BC]=[BC]=[2,5]$ Açıklayınız.

d. $[AC]-[BD]=[AB]=[-4,2]$ Açıklayınız.

e. $[AC]-[CD]=[AC)=[-4,5)$ Açıklayınız.

f. $[AD]-[BC]=[AB)\cup(CD]=[-4,2)\cup(5,8]$

Açıklayınız.

Noktaların Sıralı n'lilerle Eşleştirilmesi

17. yüzyılda Fransız matematikçileri Rene Descartes ile Pierre de Fermat, bir doğrunun noktaları ile gerçek sayılar arasındaki eşlemelerden yararlanarak, bir **düzlemin noktaları** ile (x,y) **gerçel sayı ikilileri** arasında **bire bir** ve **örten eşlemeler** yapılabileceğini gösterdiler. Aynı yaklaşımla, **üç boyutlu uzayın noktaları** ile (x,y,z) **gerçel sayı üçlüleri** arasında da **bire bir** ve **örten eşlemeler** yapılabildi. Bu eşlemeler iki veya üç boyutlu **geometrik şekiller**le, **gerçel sayı ikilileri**nin veya **gerçel sayı üçlüleri**nin **kümeleri** arasında **eşleme**ler yapılabilmesini; bu da **geometri problemleri**nin **cebir problemleri**ne dönüştürülmesini ya da tersini mümkün kıldı. Bu sayede **cebir** veya **geometri problemleri**nden birinin çözümünde diğerinin **çözüm yöntemleri**nin kullanılabilmesi sağlandı.

Şekillerle sayı kümeleri arasında yapılan bu eşlemelerin sonucu olarak matematiğin **Analitik Geometri** dalı ortaya çıktı. **Analitik Geometri** konuları ayrıca ele alınacaktır. Biz; kartezyen çarpım kümesini geometrik olarak gösterme sorunu ile yakın ilgisi nedeniyle, konuya burada girmenin yararlı olacağını düşündük.

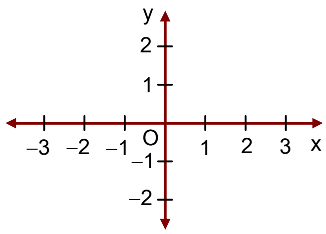
Analitik Düzlem

Bir E düzleminde birbiriyle başlangıç noktalarında dik kesişen iki sayı doğrusu alalım. Bunlardan birine **x ekseni**, diğerine **y ekseni** diyelim. Bu birbirine dik eksenlerin oluşturduğu sistemi, **(E) düzleminin noktaları** ile **gerçel sayı ikilileri**ni eşlemede kullanacağız.

Evrensel küme düzlem olduğunda bu düzlem, üzerinde çalışılan sayfanın düzlemi olarak seçilir. Genellikle, x ekseni sayfanın alt kenarına paralel çizilir. Bu yüzden x eksenine **yatay eksen**, y eksenine **düşey eksen** de denir.

Koordinatlar yatay eksende soldan sağa, düşey eksende aşağıdan yukarıya doğru artar.

Şekli inceleyiniz.



Kartezyen koordinat sistemi

Başlangıç noktalarında birbirine dik olan sayı doğrularının oluşturduğu bu sistem, bu sayfa düzleminin bir **koordinat sistemi**dir.

Gerçel sayı ikilileri ile düzlemin noktalarının eşlendiği başka koordinat sistemleri de tanımlanmıştır. Burada tanımladığımız koordinat sistemine, **Rene Descartes**'in anısına **kartezyen koordinat sistemi**; bu sistemde, düzlemin noktalarına eşlenen (x,y) gerçel sayı ikililerinin x ve y bileşenlerine de **kartezyen koordinatlar** denir. Özel olarak; birinci bileşen **apsis**, ikinci bileşen **ordinat** diye adlandırılır.

Tanım – 19

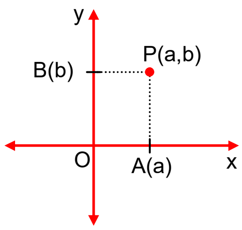
*Üzerinde bir koordinat sistemi seçilmiş olan düzleme **analitik düzlem** denir.*

Teorem – 17

R gerçel sayılar kümesi olmak üzere; bir analitik düzlemin ***noktaları*** *ile* $R \times R = \{(x,y) | x \in R,\ y \in R\}$ *kartezyen çarpımının* (x,y) ***ikilileri*** *arasında* ***bire bir*** *ve* ***örten*** *bir* ***eşleme*** *kurulabilir. Yani düzlemin her bir noktasına bir tek* (x,y) *ikilisi ve karşıt olarak, her bir* (x,y) *ikilisine düzlemin bir tek noktası karşılık getirilebilir.*

İspat

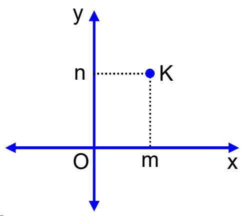
Bir (a,b) ikilisine analitik düzlemde karşılık gelen nokta, x ekseni üzerindeki A(a) noktasından x eksenine; y ekseni üzerindeki B(b) noktasından y eksenine çizilen dikmelerin kesim noktasıdır.



Bu dikmelerin birer tane olacağını ve yalnız bir noktada kesişeceklerini geometri bilgilerinizden hatırlayınız.

Dikmelerin kesim noktası (a,b) ikilisine eşlenecek olan P noktasıdır.

Analitik düzlemin bir K noktasına karşılık gelen ikili de; K noktasından x eksenine çizilen dikmenin (m) ayağı ile y eksenine çizilen dikmenin (n) ayağının oluşturduğu (m,n) ikilisidir.



m ve n sayıları birer tanedir. (Cetvel Aksiyomu) (m,n) ikilisi de bir tane olur.

Analitik düzlemin bir **P** noktası ile bir **(x,y)** ikilisi arasındaki **eşleme**, **P(x,y)** biçiminde gösterilir.

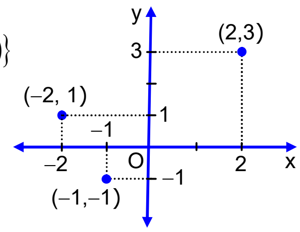
Buradaki eşlemeler P(a,b) ve K(m,n) eşlemeleridir.

Bir (x,y) ikilisine koordinat sisteminde karşılık gelen P noktasına, $\{(x,y)\}$ kümesinin **grafiği** denir.

Grafik, verilen kümeye karşılık gelen şekildir.

Örnek – 23

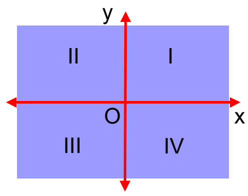
Analitik düzlemde $A = \{(-2,1),(-1,-1),(2,3)\}$ kümesinin grafiği, yandaki koordinat sisteminde belirtilen üç nokta olur.



►

Koordinat eksenleri analitik düzlemi dört bölgeye (**dördül**e) ayırır.

Koordinat eksenlerinin bu dört bölge ile ortak noktaları yoktur.



Bu bölgelerin ve eksenlerin eşlendiği kümeler şöyledir:

$\text{I. bölge} = \{(x,y) | x > 0,\ y > 0,\ (x,y) \in R \times R\}$

$\text{II. bölge} = \{(x,y) | x < 0,\ y > 0,\ (x,y) \in R \times R\}$

$\text{III. bölge} = \{(x,y) | x < 0,\ y < 0,\ (x,y) \in R \times R\}$

$\text{IV. bölge} = \{(x,y) | x > 0,\ y < 0,\ (x,y) \in R \times R\}$

$Ox = \{(x,y) | x \in R,\ y = 0\}$

$Oy = \{(x,y) | x = 0,\ y \in R\}$

► $Ox = \{(x,y) | x \in R,\ y = 0\}$ kümesine dikkat ediniz. Buradaki (x,y) ikililerinin y bileşeni için, $y = 0$ koşulu getirilmiş; x bileşeninin ise evrensel kümedeki her değeri alabileceği belirtilmiştir.

Bu durumda, $y = 0$ denklemi Ox kümesini belirtmek üzere kullanılabilir.

x eksenine **y = 0 doğrusu** da denir.

Aynı açıklamalar $Oy = \{(x,y) | x = 0,\ y \in R\}$ kümesi için de geçerlidir. y ekseni kısaca $x = 0$ denklemi ile belirtilir; **x = 0 doğrusu** diye adlandırılır.

Genelleştirelim:

$\{(x,y) | x \in R,\ y = a,\ a \in R\}$ kümesi,

analitik düzlemdeki **y = a doğrusu**na;

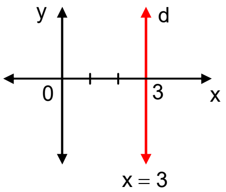
$\{(x,y) | x = a,\ y \in R,\ a \in R\}$ kümesi de,

analitik düzlemdeki **x = 0 doğrusu**na karşılık gelir.

Örnek – 24

$d=\{(x,y)\mid x=3,\ y\in R\}$ kümesi $x=3$ doğrusunu gösterir. Analitik düzlemde apsisi 3 olan tüm noktalar $(3,0)$ noktasından x eksenine çizilen dik doğru üzerinde bulunurlar.

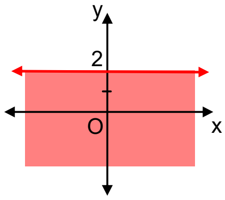
Yandaki şekilde d kümesinin grafiği verilmiştir.



Örnek – 25

$K=\{(x,y)\mid x\in R,\ y\le 2\}$ kümesi kısaca "$y\le 2$" eşitsizliği ile belirtilebilir.
Analitik düzlemde $y=2$ doğrusunun üzerindeki ve altındaki bütün noktaların koordinatları bu koşula uyar.

Yanda K kümesinin grafiği verilmiştir.



Etkinlik – 45

Aşağıda verilen kümelerin grafiklerini çiziniz.

a. $A=\{(x,y)\mid x=-2,\ y\in R\}$

b. $B=\{(x,y)\mid x\in R,\ y=2\}$

c. $C=\{(x,y)\mid x\le 2,\ y\ge -1,\ (x,y)\in R\times R\}$

d. $D=\{(x,y)\mid x\le 3,\ y=1,\ x\in R\}$

e. $E=\{(x,y)\mid x=2,\ -1<y\le 3,\ y\in R\}$

f. $F=\{(x,y)\mid\ |x|\le 2,\ y=3,\ x\in R\}$

g. $G=\{(x,y)\mid 1\le x<3,\ 1\le y\le 2,\ (x,y)\in R\times R\}$

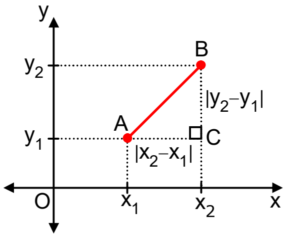
h. $H=\{(x,y)\mid x<2,\ x\in R,\ y\in Z\}$

Analitik Düzlemde İki Nokta Arasındaki Uzaklığın Bulunması

Analitik düzlemin herhangi iki noktası $A(x_1,y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$ olsun. $|AB|$ uzunluğunu bulacağız.

Şekli inceleyiniz.

A ve B'den eksenlere çizilen paralel doğrularla belirtilen ABC dik üçgeninde,



$|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$

$\Rightarrow |AB|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

$\Rightarrow |AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ bulunur.

Örneğin; $A(-2,1)$ ve $B(4,-2)$ ise

$|AB|=\sqrt{[4-(-2)]^2+(-2-1)^2}$

$\Rightarrow |AB|=3\sqrt{5}$ birim olur.

Doğrunun Denklemi

Teorem – 18

Analitik düzlemde, değişen P(x,y) noktalarının koordinatları arasında; a ve b gerçel sayılarından en az biri sıfırdan farklı olmak üzere,

$$\mathbf{ax+by+c=0}$$

bağıntısı varsa bu noktalar aynı bir ***d doğrusu*** *üzerinde bulunurlar.*
Karşıt olarak; aynı bir ***d doğrusu*** *üzerinde bulunan noktaların koordinatları arasında*

$$\mathbf{ax+by+c=0}$$

bağıntısı vardır.

$ax+by+c=0$ bağıntısına **doğrunun denklemi** denir. Doğru ile denklemi, $\mathbf{d:ax+by+c=0}$ biçiminde gösterilir.

$ax+by+c=0$ denklemi

$a=0$ ise, $y=-\frac{c}{b}$ doğrusunu;

$b=0$ ise, $x=-\frac{c}{a}$ doğrusunu;

$c=0$ ise, orijinden geçen bir doğruyu gösterir.

$ax+by+c=0$ denkleminde $b \neq 0$ ise denklem,

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ ya da $y=mx+n$ biçiminde yazılabilir.

Teorem – 18,

$d=\{(x,y) \mid ax+by+c=0,\ (x,y)\in R\times R\}$

kümesinin elemanları ile, analitik düzlemin belirli bir **d doğrusu**nun noktaları arasında **bire bir** ve **örten** bir **eşleme** yapılabileceğini belirtir.

Bu teoremin ispatını analitik geometri derslerimizde yapacağız.

► **Kartezyen koordinat sistemi** konusundaki bilgilerimizi böylece tazeleyip geliştirdikten sonra, şimdi de; gerçel sayı kümelerinin **kartezyen çarpım**larının **grafik**lerinin **çizimi**ne örnekler verelim:

Örnek – 26

a. $x-2y=0$ **b.** $2x+3y+6=0$ **c.** $y=3x-1$

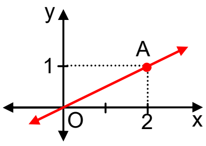
Yukarıdaki denklemler koordinat sisteminde birer doğruya karşılık gelirler.

Bu doğruların grafiklerini çizelim:

Bir doğruyu çizmek için, iki noktasını belirtmek yeterlidir.

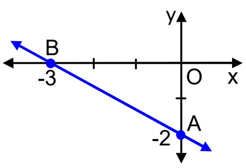
a. $x=0$ için $y=0$ ve $x=2$ için $y=1$ olur.

Grafik, $O(0,0)$ ve $A(2,1)$ noktalarından geçen doğrudur.



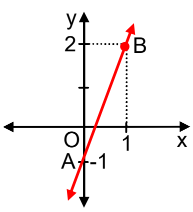
b. $x=0$ için $y=-2$ ve $y=0$ için $x=-3$ olur.

Grafik, $A(0,-2)$ ve $B(-3,0)$ noktalarından geçen doğrudur.



c.

Grafik $A(0,-1)$ ve $B(1,2)$ noktalarından geçen doğrudur.

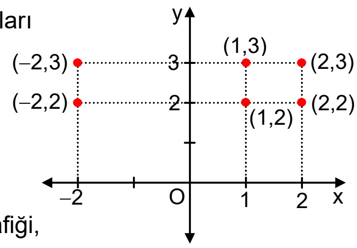


Örnek – 27

$A=\{-2,1,2\}$ ve $B=\{2,3\}$ olduğuna göre,

$A\times B$ kümesinin grafiğini çizelim:

A kümesinin elemanları x ekseni üzerinde, B kümesinin elemanları y ekseni üzerinde gösterilmiştir.



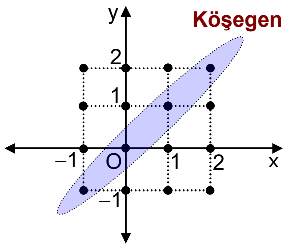
$A\times B$ kümesinin grafiği, şekilde belirtilen 6 noktadır.

Örnek – 28

$A=\{-1,0,1,2\}$ olduğuna göre,

$A\times A$ kümesinin grafiğini çizelim:

A kümesinin elemanları hem x ekseni hem y ekseni üzerinde gösterilmiştir. Koordinatları $[-1,2]$ aralığındaki tam sayılar olan bütün noktalar grafiğe aittir.



$A\times A$ kümesinin alt kümesi olan $\Delta=\{(x,x) \mid x\in A\}$ kümesine $A\times A$ kümesinin **köşegeni** denir.

$A=\{-1,0,1,2\}$ kümesi için **AxA'nın köşegeni**,

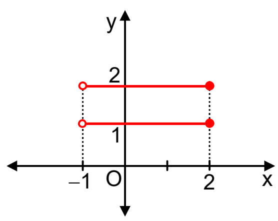
$\Delta=\{(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,2)\}$ kümesidir.

Örnek – 29

$A=\{x \mid -1<x\leq 2,\ x\in R\}$ ve $B=\{1,2\}$

olduğuna göre, $A\times B$ kümesinin grafiğini çizelim:

Grafik; apsisi $(-1,2]$ aralığında ve ordinatı 1 olan noktalarla, apsisi $(-1,2]$ aralığında ve ordinatı 2 olan noktalardan oluşur.



$(-1,1)$ ve $(-1,2)$ noktaları $A\times B$ kümesine ait olmadığından, içi boş çemberciklerle; $(2,1)$ ve $(2,2)$ noktaları kümeye ait olduğundan içi dolu çemberciklerle gösterilmiştir.

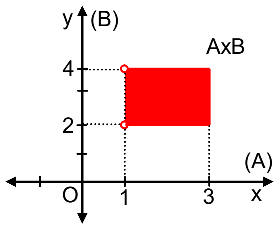
Örnek – 30

$A=\{x|\ 1<x\le 3,\ x\in R\}$ ve

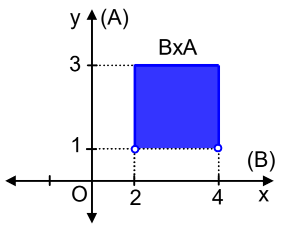
$B=\{x|\ 2\le x\le 4,\ x\in R\}$ olduğuna göre,

$A\times B$ ve $B\times A$ kümelerinin grafiklerini çizelim:

$A\times B$ kümesinin grafiği yandaki koordinat sistemindeki taralı bölgedir. $x,y\in R$ olmak üzere $1<x\le 3$ ve $2\le y\le 4$ koşuluna uyan her nokta grafiğe aittir.

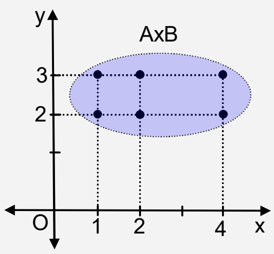


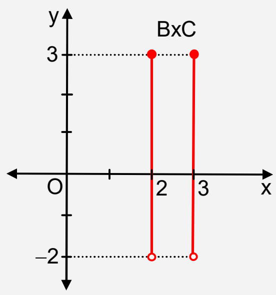
$B\times A$ kümesinin grafiği, yandaki koordinat sistemindeki taralı bölgedir. İnceleyiniz.



Etkinlik – 46

$A\times B$ ve $B\times C$ kümelerinin grafikleri yanda verilmiştir.





a. $A\times C$ kümesinin grafiğini çiziniz.

b. $C\times A$ kümesinin grafiğini çiziniz.

c. $C\times B$ kümesinin grafiğini çiziniz.

d. $B\times B$ kümesinin grafiğini çiziniz.

e. $C\times C$ kümesinin grafiğini çiziniz.

Kümelerde Çarpma İşleminin Özellikleri

Etkinlik – 47

$A=\{-2,1,3\},\ B=\{-1,2\},\ C=\{2,3\}$ olduğuna göre;

a. $A\times B$ ve $(A\times B)\times C$ kümelerini yazınız.

b. $B\times C$ ve $A\times(B\times C)$ kümelerini yazınız. $(A\times B)\times C$ ve $A\times(B\times C)$ kümeleri arasındaki bağıntıyı bulunuz.

c. $A\times(B\cup C)$, $A\times B$ ve $A\times C$ kümelerini yazarak aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

d. $(B\cap C)\times A$, $B\times A$ ve $C\times A$ kümelerini yazarak aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

e. $A\times(C-B)$, $A\times C$ ve $A\times B$ kümelerini yazarak aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

f. $(A\Delta B)\times C$, $A\times C$ ve $B\times C$ kümelerini yazarak aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

Teorem – 19

a. *$A\times\varnothing=\varnothing=\varnothing\times A$ eşitliği geçerlidir.*

b. *Kümelerde çarpma işleminin **değişme** özeliği yoktur.*

c. *Kümelerde çarpma işleminin **birleşme** özeliği vardır.*

İspat

$A\times\varnothing=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in\varnothing\}$'dir. $A\times\varnothing$ kümesini oluşturacak (x,y) ikililerinin y bileşenleri bulunmadığından böyle (x,y) ikilileri de yoktur.

O halde, $A\times\varnothing=\varnothing$ dır.

Bunu matematiksel bir dille söyleyelim :

a. $A\times\varnothing=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in\varnothing\}$

$\Rightarrow A\times\varnothing=\{(x,y)|(x\in A\wedge y\in\varnothing)\vee(x,y)\in\varnothing\}$

$((x,y)\in\varnothing\equiv 0$ ve $p\vee 0\equiv p$ olduğundan$)$

$\Rightarrow A\times\varnothing=\{(x,y)|\ [(x\in A)\wedge 0]\vee(x,y)\in\varnothing\}$

$\Rightarrow A\times\varnothing=\{(x,y)|0\vee(x,y)\in\varnothing\}$

$\Rightarrow A\times\varnothing=\{(x,y)|(x,y)\in\varnothing\}$

$\Rightarrow A\times\varnothing=\varnothing$ bulunur.

$\varnothing\times A=\varnothing$ olduğu da aynı yolla gösterilir.

b. $(\forall A,B;\ A \neq B \Rightarrow A\times B = B\times A)$ önermesinin doğru olmadığını göstereceğiz.

"$\forall(x,y);\ p(x,y)$" türünden bir önermenin yanlış olduğunu göstermek için, $p(x,y)$ önermesinin yanlış olduğu bir örnek vermek yeterlidir:

$A=\{a,b\}$ ve $B=\{b,c\}$ için,
$A\times B=\{(a,b),(a,c),(b,b),(b,c)\}$ ve
$B\times A=\{(b,a),(b,b),(c,a),(c,b)\}$ olup
$A\times B\neq B\times A$ dır.

c. $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$ olduğunu göstereceğiz:

$$\begin{aligned}(A\times B)\times C &= \{((x,y),z) \mid (x,y)\in(A\times B)\wedge(z\in C)\}\\ &= \{(x,y,z) \mid (x\in A)\wedge(y\in B)\wedge(z\in C)\}\\ &= \{(x,y,z) \mid (x\in A)\wedge[(y\in B)\wedge(z\in C)]\}\\ &= \{(x,(y,z)) \mid (x\in A)\wedge(y,z)\in(B\times C)\}\\ &= A\times(B\times C)\end{aligned}$$

Teorem – 20

*Kümelerde **çarpma işleminin***

a. ***birleşim işlemi*** *üzerine,*

b. ***kesişim işlemi*** *üzerine,*

c. ***fark işlemi*** *üzerine,*

d. ***simetrik fark işlemi*** *üzerine*

*sağdan ve soldan **dağılma özeliği** vardır.*

Teorem – 20'yi sembollerle ifade edelim:

a. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ ve
$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$;

b. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ ve
$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$;

c. $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$ ve
$(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$;

d. $A\times(B\Delta C)=(A\times B)\Delta(A\times C)$ ve
$(A\Delta B)\times C=(A\times C)\Delta(B\times C)$

önermeleri birer **teorem**dir.

Etkinlik – 48

Teorem – 20'yi önerme işlemlerinden yararlanarak ispatlayınız.

Etkinlik – 49

$A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, $C=\{3,4,5\}$ olduğuna göre; aşağıdaki kümeleri en kısa yoldan yazınız.

a. $(A\times C)\cup(B\times C)$

b. $(A\times B)\cap(A\times C)$

c. $(A\times C)-(B\times C)$

d. $(A\times B)\Delta(A\times C)$

Teorem – 21

A, B, C, D birer küme olmak üzere;

a. $(A\subset B$ ve $C\subset D)\Rightarrow(A\times C\subset B\times D)$,

b. $(A\subset B)\Rightarrow(A\times C\subset B\times C)$,

c. $(A\subset B)\Rightarrow(A\times A\subset A\times B)$,

d. $(A\subset B)\Rightarrow(A\times B\subset B\times B)$

önermeleri birer teoremdir.

Etkinlik – 50

Teorem – 21'i **alt küme** ve **kartezyen çarpım kümesi** tanımlarından yararlanarak ispatlayınız.

Alıştırmalar ve Problemler – 3

1. 30 kişilik bir sınıfta öğrenciler 1'den 30'a kadar; öğrencilerin aldıkları dersler 1'den 8'e kadar; öğrencilerin bu derslerden ilk sınavlarda aldıkları notlar 1'den 100'e kadar doğal sayılarla numaralanmıştır. **Öğrenci**ler, **ders**ler ve öğrencilerin aldıkları **not**lar **sıralı üçlü**lerle gösterilmiştir. Ancak; sıralı üçlülerdeki bileşenlerden hangisinin hangi çokluğa karşılık geldiği belirtilmemiştir.

Buna göre; aşağıda verilen sıralı üçlülerin hangi anlamlara gelebileceğini açıklayınız.

a. (23, 4, 87) **b.** (44, 16, 5)
c. (12, 7, 3) **d.** (5, 36, 4)
e. (4, 5, 6) **f.** (14, 14, 4)
g. (24, 6, 18) **h.** (48, 36, 9)

2. Aşağıda belirtilen ikili ve üçlüleri bulunuz.

a. $(2x-3,\ x+5)=(x+4,\ x+y+3)$

b. $(3x-4,\ 2y+5)=(x-y,\ y+3)$

c. $(2x-z,\ z+3,\ y+z)=(z-x,\ 2z-3,\ 3y-z)$

d. $(x-y,\ y-2,\ 2x-5)=(2x-5z,\ x-y,\ x+1)$

3. Ali, Can ve Mert'in her birinin doğum yeri Bolu, Bursa ve İzmir'den biridir.

(x, y) = (Kişinin adı, Doğum yeri)
olduğuna göre, tüm olası ikililerin kümesini yazınız.

4. $A\times B=\{(1,3), (3,5), (3,4), (2,4), (1,5), (3,3), (1,4), (2,3), (2,5)\}$
olduğuna göre, $A-B$ kümesini yazınız.

5. $A\times B\times C=\{(1,5,1),(1,2,3),(2,2,1),(2,2,3),(1,2,1),(2,5,1),(1,5,3),(2,5,3)\}$
olduğuna göre,

a. $(A\times B)\cup(B\times C)$ kümesini yazınız.

b. $B\times C\times A$ kümesini yazınız.

6. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,4\}$, $C=\{3,5\}$ olduğuna göre;

a. $A\times B$, $B\times C$ ve $C\times A$ kümelerini yazınız.

b. $(A\cup B)\times C$ ve $B\times(A\cap C)$ kümelerini yazınız.

c. $(A\times B)\cup(A\times C)$ kümesini yazınız.

d. $(B\times A)\cap(B\times C)$ kümesini yazınız.

e. $(C\times A)-(C\times B)$ kümesini yazınız.

f. $(B\times A)\Delta(B\times C)$ kümesini yazınız.

7. $s(A\times B)=24$ olduğuna göre,

a. $s(A\cup B)$ en az kaçtır?

b. $s(A\cup B)$ en çok kaçtır?

c. $s(A\cap B)$ en çok kaçtır?

d. $s(A\cap B)$ en az kaçtır?

8. $A=\{-2,1,2\}$, $B=\{x \mid 1\le x\le 3,\ x\in R\}$ ve
$C=\{x \mid -1<x\le 2,\ x\in R\}$ olduğuna göre;

a. $A\times B$, $B\times C$ ve $C\times A$ kümelerinin grafiklerini çiziniz.

b. $(A\cup B)\times C$ kümesinin grafiğini çiziniz.
Bu kümeye karşılık gelen alan kaç br^2'dir?

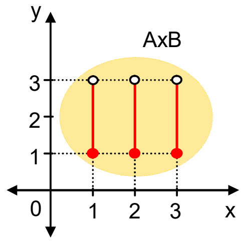
c. $(A\times B)\cap(A\times C)$ kümesinin grafiğini çiziniz.

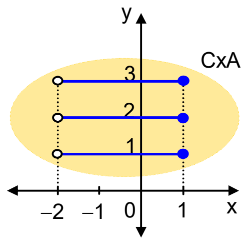
d. $(C\times A)-(C\times B)$ kümesinin grafiğini çiziniz.

e. $A\times A$, $B\times B$, $C\times C$ kümelerinin grafiklerini çiziniz.

f. $A\times A$, $B\times B$, $C\times C$ kümelerinin köşegenlerinin grafiklerini çiziniz.

9. $A\times B$ ve $C\times A$ kümelerinin grafikleri aşağıda verilmiştir.





$B\times C$ kümesinin grafiğini çiziniz.

10. $A=\{x \mid -2\le x<3,\ x\in R\}$ ve
$B=\{x \mid -1<x\le 4,\ x\in R\}$ olduğuna göre;

a. $(A\times B)\cap(B\times A)$ kümesinin grafiğinin belirttiği alan kaç birimkaredir?

b. $(A\times B)\cup(B\times A)$ kümesinin grafiğinin belirttiği alan kaç birimkaredir?

11. $(A\times B)\cap(B\times A)\subset(A\times A)$
teoremini ispatlayınız.

12. $(A\times A)\subset(A\times B)\cup(B\times A)$
önermesinin geçerli olmadığını gösteriniz.

13. a. $(A=B\cap C)\Rightarrow(A\times A)=(B\times B)\cap(C\times C)$
teoremini ispatlayınız.

b. "$A=B\cup C$" önermesi
$(A\times A)=(B\times B)\cup(C\times C)$ önermesini gerektirir mi?

14. $(A\cup B)\times(A\cup B)$ kümesini $A\times A$, $A\times B$, $B\times A$ ve $B\times B$ kümeleri ile ifade ediniz.

15. $A\ne\varnothing$ olmak üzere; $A\times B=A\times C$ ise $B=C$ olduğunu ispatlayınız.

16. $(A\times B)'$ kümesini $A\times B'$, $A'\times B$ ve $A'\times B'$ kümeleri ile ifade ediniz.

4 – Kümelerle Problem Çözümü

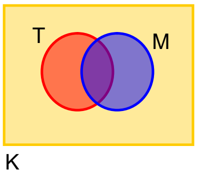
Bu kısımda; küme kavramının ilgili problemlere nasıl uygulandığını, aşağıdaki etkinlikleri yaparak öğreneceksiniz.

Etkinlik – 51

32 kişilik sınıfta Türkçe'den geçenlerin sayısı 20, matematikten kalanların sayısı 15, bu derslerin en çok birinden geçenlerin sayısı 19'dur.

İki dersten de kalan öğrenci sayısı bulunacaktır.

Yandaki Venn Şemasında K, sınıftaki tüm öğrencilerin kümesini; T, Türkçe'den geçenlerin kümesini; M, matematikten geçenlerin kümesini göstermektedir.



a. $s(M)$, $s(T\cap M)$, $s(M-T)$, $s(T-M)$ sayılarını sırasıyla bularak ait oldukları alt kümelere karşılık gelen bölgelerin içine yazınız.

b. İki dersten de kalan öğrenci sayısını bulunuz.

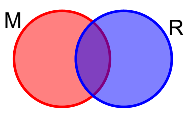
Etkinlik – 52

30 kişilik bir sınıfta öğrencilerden her biri müzik ve resim kurslarından en az birine katılmaktadır.

Müzik kursuna katılanların sayısı resim kursuna katılanların sayısından 4 fazla olup her iki kursa da katılan öğrenci sayısı 6'dır.

Müzik kursuna katılan öğrenci sayısı bulunacaktır.

Yandaki Venn şemasında M, müzik kursuna; R, resim kursuna katılanların kümesidir.

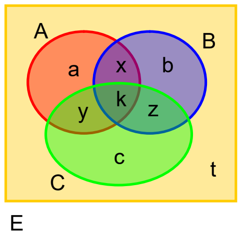


a. $s(M)=x$ diyerek, $s(R)$'yi ve $s(R-M)$'yi x türünden yazınız.

b. $s(M)$, $s(R-M)$ ve $s(M\cup R)$ arasındaki bağıntıyı kullanarak x sayısını bulunuz.

Etkinlik – 53

Bir sınıftaki öğrencilerin kümesi ile bu sınıfta A, B ve C derslerinden kalan öğrencilerin kümeleri yandaki Venn şemasında gösterilmiştir.



Ayrık alt kümelere karşılık gelen bölgelerdeki harfler bu alt kümelerin eleman sayılarını göstermektedir.

a. Yalnız bir dersten kalan öğrencilerin sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

b. En çok bir dersten kalan öğrencilerin sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

c. En az bir dersten kalan öğrencilerin sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

d. Yalnız iki dersten kalan öğrencilerin sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

e. En çok iki dersten kalan öğrencilerin sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

f. En az iki dersten kalan öğrencilerin sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

g. Üç dersten de kalan öğrencilerin sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

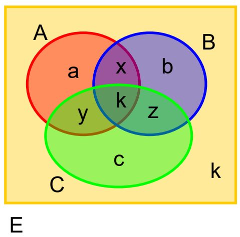
h. En çok üç dersten kalan öğrencilerin sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

Etkinlik – 54

40 daireli bir apartmanda A, B, C gazetelerinden toplam 70 tane satılmaktadır. Gazete almayan dairelerin sayısı ile üç gazete alan dairelerin sayısı eşittir.

En az iki gazete alan dairelerin sayısı bulunacaktır.

Yandaki Venn şemasında E dairelerin kümesini; A, B, C bu gazeteleri alan dairelerin kümelerini; a, b, c, x, y, z, k ayrık alt kümelerin eleman sayılarını göstermektedir.



a. Satılan gazetelerin toplam sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

b. Dairelerin sayısını veren harfli ifadeyi yazınız.

c. En az iki gazete alan dairelerin sayısını bulunuz.

Etkinlik – 55

Türk ve Alman öğrencilerden oluşan bir grubun %30'u Alman, %40'ı kızdır. Alman erkeklerinin sayısı Türk kızlarının sayısından 3 eksik, Türk erkekleri ile Alman kızlarının toplam sayısı 19'dur.

a. Gruptaki öğrencilerin kümesi yandaki şema ile gösterilirse; **I, II, III, IV** numaralı alt kümeler hangi öğrencilerden oluşur?

	Türk	Alman
Kız öğ.	I.	II.
Erkek öğ.	III.	IV.

b. Gruptaki öğrencilerin sayısını 10x ile, Türk kızlarının sayısını y ile göstererek; **I, II, III, IV** numaralı alt kümelerin sayılarını veren harfli ifadeleri bunlara karşılık gelen bölgelere yazınız.

c. Gruptaki öğrencilerin sayısını bulunuz.

d. Gruptaki Türk kızlarının sayısını bulunuz.

Alıştırmalar ve Problemler – 4

1. Hasta ziyaretine giden 12 kişilik bir grupta herkesin elinde çiçek vardır.
Bunlardan 9'unda gül, 7'sinde karanfil bulunduğuna göre kaçında hem gül hem de karanfil bulunur?

2. Bir gazete dağıtıcısı A ve B gazetelerinden 32 tanesini 23 kişiye satmıştır.
Okurlardan kaçı yalnız bir gazete almıştır?

3. Bir grupta İngilizce bilen 7 kişi, Almancı bilen 12 kişi, bu iki dili de bilen 6 kişi bulunduğuna göre, bu grup en az kaç kişidir?

4. Bir sınıfta İngilizce bilen öğrenci sayısı Almanca bilen öğrenci sayısından 7 fazladır.
İngilizce bilmeyen öğrenci sayısı 12 olduğuna göre, Almanca bilmeyen öğrenci sayısı kaçtır?

5. 30 kişilik sınıfta, resim kursuna gidenlerin kümesi R, müzik kursuna gidenlerin kümesi M olmak üzere;
$s(R) = 13$, $s(M) = 16$ ve $s(R \cap M) = 8$ ise bu kurslardan hiçbirine gitmeyen öğrenci sayısı kaçtır?

6. Bir sınıftaki 32 kişiden 18'inin bisikleti, 17'sinin bilgisayarı vardır. Bunlardan;

a. en az kaçının,

b. en çok kaçının hem bisikleti, hem de bilgisayarı olabilir?

7. Bir sınıftaki öğrencilerden 17'si Matematik veya Türkçe derslerinden kalmıştır. Matematikten kalan öğrenci sayısı, Türkçeden kalan öğrenci sayısından 3 fazladır.
Öğrencilerin 4'ü hem Türkçe hem de Matematikten kaldığına göre, yalnız Matematikten kalan öğrenci sayısı kaçtır?

8. Bir sınıfın bütün öğrencileri A, B, C derslerinin en az birinden kalmıştır.
A ve B derslerinden kalan öğrenci sayısı 15, A ve C derslerinden kalan öğrenci sayısı 12, B ve C derslerinden kalan öğrenci sayısı 11 ve her üç dersten de kalan öğrenci sayısı 5 olduğuna göre, bu üç dersin yalnız ikisinden kalan öğrenci sayısı kaçtır?

9. A veya B dilini bilenlerin oluşturduğu bir grupta yalnız A dilini bilenlerin sayısı 6, yalnız B dilini bilenlerin sayısı 8'dir.
Grubun üyelerinin sayısı, hem A hem B dillerini bilenlerin sayısının 3 katı olduğuna göre, bu grupta kaç kişi vardır?

10. A, B, C dillerinden en az birini bilenlerin oluşturduğu bir grupta, A dilini bilenlerin her biri B dilini de bilmekte; C dilini bilmemektedir. A dilini bilenlerin sayısı 8, B dilini bilenlerin sayısı 13, C dilini bilenlerin sayısı 11, B ve C dillerinden ikisini de bilenlerin sayısı 4'tür. Buna göre, grup kaç kişidir?

11. 30 kişilik bir grupta İngilizce bilenlerin sayısı, Almanca bilenlerin sayısının 3 katıdır.
Bu grupta her iki dili bilenler 4 kişi, bu dilleri bilmeyenler 6 kişi bulunduğuna göre, yalnız İngilizce bilenler kaç kişidir?

12. A ve B dillerinden en az birini bilenlerin oluşturduğu kızlı erkekli bir grupta, gözlük kullananlar vardır.

A = {A dilini bilenler};

B = {B dilini bilenler};

K = {Gruptaki kızlar};

E = {Gruptaki erkekler};

G = {Gözlük kullananlar} olduğuna göre,

{A dilini bilmeyen B dilini bilen gözlüksüz erkekler} kümesini A, B, K, E, G kümeleri ile ifade ediniz.

13. Kız veya erkek Türkler ile kız veya erkek Almanlardan oluşan bir grubun üyelerinden bir kısmı mavi gözlüdür.

K = {Gruptaki kızlar};

E = {Gruptaki erkekler};

T = {Gruptaki Türkler};

A = {Gruptaki Almanlar};

M = {Gruptaki mavi gözlüler} olduğuna göre,

{Gruptaki mavi gözlü olmayan Alman erkekler} kümesini K, E, T, A, M kümeleri ile ifade ediniz.

14. 32 kişilik bir sınıfta öğrencilerin 10'u matematikten, 6'sı fizikten kalmıştır. Bu derslerin ikisinden de geçen öğrenci sayısı, ikisinden de kalan öğrenci sayısının 5 katıdır.

Yalnız matematikten kalan öğrenci sayısı kaçtır?

15. Bir sınıftaki öğrencilerin %60'ı Matematik dersinden, %80'i Türkçe dersinden başarılı olmuştur. Her iki dersten başarılı olanların sayısı, bu iki dersten de başarısız olanların sayısından 12 fazladır.

a. İki dersten de başarılı olanların sayısı en çok kaç olabilir?

b. İki dersten de başarılı olanların sayısı en az kaçtır?

16. Bir sınıftaki öğrencilerin %40'ı kız, %30'u gözlüklüdür. Gözlüksüz kızların sayısı, gözlüklü erkeklerin sayısından 3 fazla olduğuna göre,

a. Sınıftaki öğrenci sayısı kaçtır?

b. Verilen bilgilerle sınıftaki gözlüklü erkek öğrencilerin sayısı bulunabilir mi?

17. 40 daireli bir apartmanda her daire A ve B gazetelerinden en çok ikisini almaktadır. A gazetesini alan daire sayısı, B gazetesini alan daire sayısından 6 fazladır.

İki gazete alanların sayısı 6, hiç gazete almayanların sayısı 12 olduğuna göre, A gazetesini alan daire sayısı kaçtır?

18. Almanca ve Fransızca dillerinden en az birini bilenlerin oluşturduğu 15 kişilik bir grupta; Almanca bilenlerin sayısı, Fransızca bilenlerin sayısının 2 katından 2 eksik olup iki dili de bilenlerin sayısının 3 katıdır.

Bu grupta yalnız Fransızca bilenlerin sayısı kaçtır?

19. Bir sınıftaki 32 öğrenciden 18'inin bisikleti, 17'sinin bilgisayarı vardır.

Bunlardan ikisine de sahip olanların sayısı, hiçbirine sahip olmayanların sayısının 2 katı olduğuna göre, ikisine de sahip olanların sayısı kaçtır?

20. Bir sınıftaki 28 öğrencide kurşun kalem ve tükenmez kalemden en az biri bulunmaktadır. Kurşun kalemi bulunanların sayısı, tükenmez kalemi bulunanların sayısından 4 fazla olup hem kurşun hem tükenmez kalemi bulunanların sayısı, yalnız tükenmez kalemi bulunanların sayısına eşittir.

Yalnız kurşun kalemi bulunanlar kaç kişidir?

21. Almanca ve İngilizce dillerinden en az birini bilenlerin oluşturduğu bir grubun 3/4'ü Almanca, 2/3'ü İngilizce bilmektedir.

Yalnız Almanca bilenlerin sayısı 16 olduğuna göre, yalnız İngilizce bilenlerin sayısı kaçtır?

22. 12 Türk ve 8 Almandan oluşan bir grupta 9 kadın vardır.

Türk kadınların sayısı, Alman erkeklerin sayısından kaç fazladır?

23. Bir köydeki evlerin %45'inde televizyon, %50'sinde telefon bulunmaktadır. Hem televizyonu hem telefonu olan ev sayısı 16'dır. Telefonu olan ev sayısı, televizyonu olan ev sayısından 4 fazladır.

a. Köyde kaç ev vardır?

b. Kaç evde televizyon da, telefon da yoktur?

24. 40 kişilik bir sınıfta;

A dersinden kalan öğrenci sayısı 20,
B dersinden kalan öğrenci sayısı 23,
C dersinden kalan öğrenci sayısı 27,
A ve B derslerinden kalan öğrenci sayısı 12,
A ve C derslerinden kalan öğrenci sayısı 13,
B ve C derslerinden kalan öğrenci sayısı 15'tir.

Bu derslerin üçünden de geçen öğrenci sayısı 2 olduğuna göre, üçünden de kalan öğrenci sayısı kaçtır?

25. Piyano, gitar ve kemandan en az birini çalabilenlerin oluşturduğu bir toplulukta,

piyano ve gitar çalabilen 7 kişi,
gitar ve keman çalabilen 6 kişi,
piyano ve keman çalabilen 5 kişi,
piyano veya gitar çalabilen 21 kişi,
gitar veya keman çalabilen 19 kişi,
piyano veya keman çalabilen 18 kişi bulunmaktadır.

Bunların üçünü de çalabilen 4 kişi bulunduğuna göre, toplulukta kaç kişi vardır?

26. Bir sınıftaki öğrencilerin $\%75$'i müzik kursuna, $\%60$'ı resim kursuna, $\%40$'ı hem müzik hem resim kursuna gitmektedir.

2 öğrenci bu kursların hiçbirine gitmediğine göre, yalnız müzik kursuna giden öğrenci sayısı kaçtır?

27. Bir sınıfta A dersinden kalan öğrencilerin hepsi B veya C dersinden de kalmıştır. Hem B hem C dersinden kalan öğrenci yoktur.

Öğrencilerin 8'i yalnız B dersinden, 7'si yalnız C dersinden, $\%50$'si B dersinden kalmış; $\%20$'si bu üç dersten geçmiştir.

B dersinden kalan öğrenci sayısı, C dersinden kalan öğrenci sayısından 6 fazla olduğuna göre; A dersinden kalan öğrenci sayısı kaçtır?

28. Bir yazarlar grubunda roman yazmayanların sayısı 16, şiir yazmayanların sayısı 14, deneme yazmayanların sayısı 16'dır.

Bu türlerden yalnız birini yazanların sayısı 11, en az ikisini yazanların sayısı 13 olduğuna göre; bu türlerden yazmayanların sayısı en az kaçtır?

29. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 1 ve 2 bulunur veya 2 ve 3 bulunur?

30. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 1 ve 2 bulunur veya 3 ve 4 bulunur?

31. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 1 ve 2 bulunur veya 2 ve 3 bulunmaz?

32. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 1 veya 2 bulunur, 2 veya 3 bulunmaz?

33. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 1 veya 2 bulunur ya da 2 veya 3 bulunur?

34. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 1 ve 2 bulunur ya da 2 ve 3 bulunur?

35. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 1 veya 2 bulunuyorsa 2 veya 3 bulunmaz?

36. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde 1 ve 2 bulunuyorsa 3 veya 4 bulunmaz?