Etkinlik – 1

a. Aynı adları yazmış olmalısınız.

b. Size sıcakkanlı gelen biri, arkadaşınıza öyle gelmeyebilir.

Farklı adları yazmış olabilirsiniz.

c. Büyük bir olasılıkla farklı adlar yazmışsınızdır.

d. Bazı öğretmenleri kiminiz genç kiminiz yaşlı sayabilirsiniz.

e. Bu sayının sıfır olduğu bellidir.

f. Her biriniz 8 farklı sayıdan birini yazmış olabilirsiniz.

⌘ Açıklamalardan da anlaşılacağı gibi, farklılıklar hangi adları yazacağınızın tam olarak belirtilmemiş olmasından kaynaklanır.

Etkinlik – 2

Kümeleri P ve R ile adlandıralım.

Ortak özellik yöntemi ile,

P = {x | x, MATEMATİK sözcüğündeki bir harftir.}

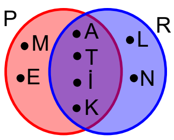
R = {x | x, ANALİTİK sözcüğündeki bir harftir.}

biçiminde yazılırlar.

Liste yöntemi ile,

$P=\{M,A,T,E,İ,K\}$; $R=\{A,N,L,İ,T,K\}$ olur.

P ve R kümeleri Venn şeması ile yandaki gibi gösterilirler.



Etkinlik – 3

a. Küme ayıracı içine yazabileceğiniz bir eleman yoktur.

$A=\{\ \}$

b. $B=\{\ \}$

c. $C=\{1,3,5,7\}$

C kümesi 4 elemanlıdır.

d. $D=\{9,11,13,15,17,...\}$

D kümesinin elemanları yazmakla bitmez.

D kümesi sonsuz elemanlıdır.

Etkinlik – 4

a. "$A\subset A$" ① önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı "$\forall x,\ (x\in A)\Rightarrow(x\in A)$" dır. ②

② önermesinin, x'in herhangi bir a değeri için yorumlaması "$(a\in A)\Rightarrow(a\in A)$" ③ olur.

"$p:\ a\in A$" denirse, yorumlama "$p\Rightarrow p$" ④ önermesine dönüşür.

② önermesinin bütün yorumlamaları "$p\Rightarrow p$" biçiminde olacağından; "$A\subset A$" önermesinin doğruluğu, "$p\Rightarrow p$" önermesinin bir totoloji olup olmadığına bağlı olacaktır.

"$p\Rightarrow p$" önermesinin bir totoloji olduğu açıktır.

O hâlde; $A\subset A$ doğrudur.

b. "$\varnothing\subset A$" ① önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı "$\forall x,\ (x\in\varnothing)\Rightarrow(x\in A)$" 'dır. ②

$x=a$ yorumlaması ile $(a\in\varnothing)\Rightarrow(a\in A)$ ③ önermesi elde edilir. "$a\in\varnothing\equiv 0$" 'dır.

"$p:\ a\in A$" denirse, ③ önermesi "$0\Rightarrow p$" önermesine dönüşür.

② önermesinin bütün yorumlamaları "$0\Rightarrow p$" biçiminde olur.

"$0\Rightarrow p$" önermesi bir totoloji olduğundan $\varnothing\subset A$ doğrudur.

Etkinlik – 5

$$(A=B)\Leftrightarrow[\forall x,(x\in A)\Leftrightarrow(x\in B)]$$

$$\Rightarrow\quad (A=B)\Leftrightarrow\{\forall x,[(x\in A)\Rightarrow(x\in B)]\wedge[(x\in B)\Rightarrow(x\in A)]$$

(İki yönlü koşullu önermenin tanımından)

$$\Rightarrow\quad (A=B)\Leftrightarrow[(A\subset B)\wedge(B\subset A)]$$

(Alt kümenin tanımından)

⌘ Alt küme tanımı ile ispat tamamlanmış oldu:

$\{\forall x,[(x\in A)\Rightarrow(x\in B)]\}=(A\subset B)$;

$\{\forall x,[(x\in B)\Rightarrow(x\in A)]\}=(B\subset A)$

Etkinlik – 6

a. $\varnothing$ Alt küme sayısı 1'dir.

b. $\varnothing$, {a}
Alt küme sayısı 2'dir.

c. $\varnothing$, {a}, {b}, {a, b}
Alt küme sayısı 4'tür.

d. $\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}
Alt küme sayısı 8'dir.

e. $\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {d}, {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}, {a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,d}, {b,c,d}, {a, b, c, d}
Alt küme sayısı 16'dır.

f. Alt kümelerin sayılarının, 2'nin kuvvetleri olduğuna dikkat ediniz.
Görünüşe göre, n elemanlı kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n olmalıdır.

Kümenin eleman sayısı	Kümenin alt kümeleri sayısı
0	$1=2^0$
1	$2=2^1$
2	$4=2^2$
3	$8=2^3$
4	$16=2^4$

Etkinlik – 7

a. $2^5=32$ **b.** $2^4=16$ **c.** $2^6-1=63$

d. Kuvvet kümesi $2^6=64$ elemanlı olup bunun alt kümelerinin sayısı 2^{64} olur.

Etkinlik – 8

a. A kümesinin a'yı içermeyen alt kümeleri, $\{b, c, d, e, f\}$ kümesinin alt kümeleridir.
Bunların sayısı da $2^5=32$'dir.

b. A kümesinin b'yi bulunduran alt kümeleri, b'nin yanına $\{a, c, d, e, f\}$ kümesinin alt kümelerinin elemanları yazılarak elde edilir.
Buna göre; A kümesinin b'yi bulunduran alt kümelerinin sayısı $2^5=32$ 'dir.

c. $2^4=16$

d. Tüm alt kümelerin sayısından a ve b'yi içermeyen alt kümelerin sayısı çıkarılırsa, geriye a veya b'yi içeren alt kümelerin sayısı kalır: $2^6-2^4=48$

e. a var, b var, c var $\rightarrow 2^3=8$;
a var, b yok, c var $\rightarrow 2^3=8$;
a yok, b var, c var $\rightarrow 2^3=8$
a veya b'yi bulunduran ve c'yi bulunduran alt kümelerin sayısı 24'tür.

f. "p: Alt kümede a vardır.
q: Alt kümede b vardır.
r: Alt kümede c vardır." olsun.
$p \vee q \vee r'$ önermesinin doğru olduğu durumların sayısı isteniyor.
$p \vee q \vee r' \equiv (p' \wedge q' \wedge r)'$ denkliği dikkate alınarak, A'nın tüm alt kümelerinin sayısından a'yı ve b'yi bulundurmayan ve c'yi bulunduran alt kümelerinin sayısı çıkarılır:
a veya b'yi bulunduran veya c'yi bulundurmayan alt kümelerin sayısı, $2^6-2^3=56$ bulunur.

Etkinlik –9

a. Koşula uyan D kümelerinin sayısı, A'nın alt kümelerinin sayısı kadardır. Bu da, $2^3=8$'dir.

b. Koşula uyan E kümeleri B'nin A'yı kapsayan alt kümeleridir.
Bunların sayısı da $\{d, e, f, g\}$ kümesinin alt kümelerinin sayısı olup $2^4=16$'dır.

c. 4 elemanlı E kümelerinin sayısı, $\{d, e, f, g\}$'nin 1 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşit olup 4'tür.

d. 5 elemanlı E kümelerinin sayısı, $\{d, e, f, g\}$'nin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısına eşittir.
$\{d, e, f, g\}$ kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin sayısını şöyle bulabiliriz:
Bu kümenin bir elemanını 4 değişik biçimde seçebiliriz. İkinci eleman için 3 seçenek kalır. O hâlde; (d,e) gibi sıralı ikilileri $4 \cdot 3=12$ değişik biçimde seçebiliriz. 2 elemanlı bir kümenin elemanları ile 2 değişik sıralı ikili yazılabilir. Örneğin; $\{d,e\}$ kümesinin sıralı ikilileri (d,e) ve (e,d) ikilileridir.
Öyleyse; 12 değişik sıralı ikili, 2 elemanlı $12:2=6$ kümeye ait olabilir.
5 elemanlı E kümelerinin sayısı 6'dır.

Etkinlik –10

a. B kümesinin, örneğin; yalnız a'nın bulunduğu alt kümelerini bulmak için, a'nın yanına $\{d,e,f\}$'nin alt kümeleri birer birer konulur. 2^3 değişik alt küme elde edilir. a, b, c'den biri 3 değişik biçimde seçilebileceğinden, istenen alt kümelerin sayısı $3 \cdot 2^3 = 24$ olur.

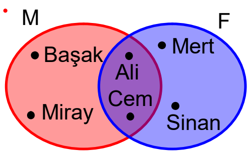
b. B kümesinin, örneğin; a ve b'yi bulunduran alt kümelerinin sayısı $2^3 = 8$ dir.
A kümesinin herhangi iki elemanı 3 değişik biçimde seçilebilir. O hâlde, istenen alt kümelerin sayısı $3 \cdot 8 = 24$ olur.

c. $2^3 = 8$

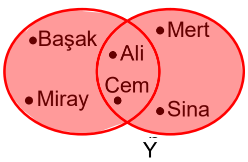
d. B kümesinin a, b, c'den hiç birinin bulunmadığı alt kümelerinin sayısı $2^3 = 8$'dir.
Buna göre; B'nin a, b, c'den en az birinin bulunduğu alt kümelerinin sayısı, $2^6 - 2^3 = 56$ olur.

Etkinlik –11

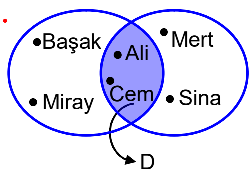
a.



b.



c.



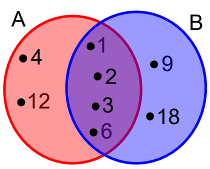
d. $Y = \{x | (x \in M) \vee (x \in F)\}$

$D = \{x | (x \in M) \wedge (x \in F)\}$

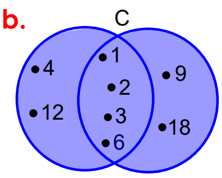
Etkinlik – 12

$A = \{1,2,3,4,6,12\}$ ve $B = \{1,2,3,6,9,18\}$ olur.

a.

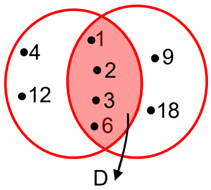


b.



$C = A \cup B$ olur.

c.



$D = A \cap B = \{1,2,3,6\}$ olur.

Etkinlik – 13

a. $A \cup A = \{x | (x \in A) \vee (x \in A)\}$ ($\cup$'nin tanımı)

$\Rightarrow A \cup A = \{x | \ x \in A\}$ ($\vee$'nin tek kuvvet öz.)

$\Rightarrow A \cup A = A$

b. $A \cap A = \{x | (x \in A) \wedge (x \in A)\}$ ($\cap$'nin tanımı)

$\Rightarrow A \cap A = \{x | \ x \in A\}$ ($\wedge$'nin tek kuvvet öz.)

$\Rightarrow A \cap A = A$

Etkinlik – 14

a. $A \cup \varnothing = \{x | (x \in A) \vee (x \in \varnothing)\}$ ($\cup$'nin tanımı)

$\Rightarrow A \cup \varnothing = \{x | \ (x \in A) \vee 0\}$ ($\varnothing$'nin tanımı)

$\Rightarrow A \cup \varnothing = \{x | \ x \in A\}$ $(p \vee 0 \equiv p)$

$\Rightarrow A \cup \varnothing = A$

b. $A \cap \varnothing = \{x | (x \in A) \wedge (x \in \varnothing)\}$

$\Rightarrow A \cap \varnothing = \{x | \ [(x \in A) \wedge (x \in \varnothing)] \vee (x \in \varnothing)\}$

($x \in \varnothing \equiv 0$ olduğundan bir önermeye $\vee$ işlemi ile bağlanabilir.)

$\Rightarrow A \cap \varnothing = \{x | \ [(x \in A) \wedge 0] \vee (x \in \varnothing)\}$ $(x \in \varnothing \equiv 0)$

$\Rightarrow A \cap \varnothing = \{x | \ 0 \vee (x \in \varnothing)\}$ $(p \wedge 0 \equiv 0)$

$\Rightarrow A \cap \varnothing = \{x | \ x \in \varnothing\}$ $(0 \vee q \equiv q)$

$\Rightarrow A \cap \varnothing = \varnothing$

Etkinlik – 15

a. $A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$ ($\cup$'nin tanımı)

$\Rightarrow A \cup B = \{x | (x \in B) \vee (x \in A)\}$ (Değişme öz.)

$\Rightarrow A \cup B = B \cup A$ ($\cup$'nin tanımı)

b. a'daki gibi ispatlayınız.

Etkinlik – 16

a. Birleşim kümesinin tanımını kullanalım:

$$A\cup(B\cup C)=\{x|(x\in A)\vee[x\in(B\cup C)]\}$$

$$\Rightarrow A\cup(B\cup C)=\{x|(x\in A)\vee[(x\in B)\vee(x\in C)]\}$$

$$\Rightarrow A\cup(B\cup C)=\{x|\ [(x\in A)\vee(x\in B)]\vee(x\in C)\}$$

($\vee$'nın birleşme öz.)

$$\Rightarrow A\cup(B\cup C)=\{x|\ (x\in A)\vee(x\in B)\}\cup C$$

$$\Rightarrow A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

b. **a**'daki gibi ispatlayınız.

Etkinlik – 17

a. $A\cup(B\cap C)=\{x|(x\in A)\vee[x\in(B\cap C)]\}$

(Birleşim kümesinin tanımı)

$$\Rightarrow A\cup(B\cap C)=\{x|(x\in A)\vee[(x\in B)\wedge(x\in C)]\}$$

(Kesişim kümesinin tanımı)

$$\Rightarrow A\cup(B\cap C)$$

$$=\{x|\ [(x\in A)\vee(x\in B)]\wedge[(x\in A)\vee(x\in C)]\}$$

($\vee$'nın $\wedge$ üzerine dağılma özelliği.)

$$\Rightarrow A\cup(B\cap C)=\{x|\ [x\in(A\cup B)]\wedge x\in(A\cup C)\}$$

(Birleşim kümesinin tanımı)

$\Rightarrow A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ ($\cap$ 'nin tanımı)

b. **a**'daki gibi ispatlayınız.
c. **a**'daki gibi ispatlayınız.
d. **a**'daki gibi ispatlayınız.

Etkinlik – 18

a. $A\cap B=\{0,1,2,3\}$ ve $A\cap C=\{1,2,3,4\}$ verilmiştir.

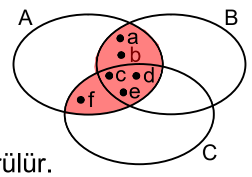
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$\Rightarrow A\cap(B\cup C)=\{0,1,2,3,4\}$ bulunur.

b. $A\cap B=\{a,b,c,d,e\}$

ve $A\cap C=\{c,d,e,f\}$

kümeleri Venn şemasında gösterilirse, C kümesinde en azından c, d, e, f elemanlarının bulunduğu görülür.

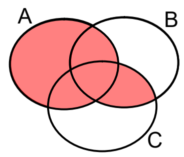


C kümesi en az 4 elemanlıdır.

c. $A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$

ve $A\cup C=\{c,d,e,f\}$ dir.

Boyalı bölgeye karşılık gelen küme $A\cup B$ ve $A\cup C$ kümelerinin kesişimidir.



$(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{c,d,e\}$ olur.

Etkinlik – 19

a. "$A\subset(A\cup B)$" ① önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı,

"$\forall x,\ (x\in A)\Rightarrow[(x\in A)\vee(x\in B)]$" dir. ②

② önermesinin $x=a$ için yorumlaması

"$(a\in A)\Rightarrow[(a\in A)\vee(a\in B)]$" olur. ③

$p:\ a\in A$ ve $q:\ a\in B$ denirse, ③ önermesi "$p\Rightarrow p\vee q$" önermesine dönüşür.

② önermesinin tüm yorumlamaları "$p\Rightarrow p\vee q$" biçiminde olacaktır.

$p\Rightarrow p\vee q\equiv p'\vee p\vee q\equiv 1$ olup totoloji olduğundan "$A\subset(A\cup B)$" önermesi doğrudur.

b. **a**'daki gibi ispatlayınız.

c. **a**'daki gibi düşünerek,

"$(A\subset B)\Leftrightarrow(A\cap B=A)$" ① önermesine önermeler mantığında karşılık gelen önermenin, "$(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow[(p\wedge q)\Leftrightarrow p]$" ② olduğunu ve bunun da totoloji olduğunu gösterebilirsiniz.

Böylece; $(A\subset B)\Leftrightarrow(A\cap B=A)$ önermesinin doğru olduğunu göstermiş olursunuz.

d. **c**'deki gibi ispatlayınız.

Etkinlik – 20

a. $(A\cup C=B\cup C)\Rightarrow(A=B)$ ① önermesinin bir gerektirme olmadığını göstereceğiz.

① önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının $[(p\vee r)\Leftrightarrow(q\vee r)]\Rightarrow(p\Leftrightarrow q)$ ② olduğunu gösteriniz.

Bu durumda problem, ② önermesinin bir totoloji olmadığını göstermeye dönüşür.

Bunu da gösterebilirsiniz.

O hâlde; $(A\cup C=B\cup C)$ olması $A=B$ olmasını gerektirmez.

Örneğin; $A=\{1,3\}$, $B=\{3,4,5\}$ ve $C=\{1,4,5\}$ iken $A\cup C=B\cup C$ olduğu hâlde $A\neq B$'dir.

b. "$(A \cup C) \subset (B \cup C)$" önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının "$(p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)$"; "$A \subset B$" 'nin karşılığının "$p \Rightarrow q$" olduğunu ve "$[(p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$" önermesinin bir gerektirme olmadığını göstereceksiniz.

Örneğin; $A = \{2,3,4\}$, $B = \{1,2,3\}$ ve $C = \{4,5\}$ iken $(A \cup C) \subset (B \cup C)$ olduğu halde, $A \not\subset B$'dir.

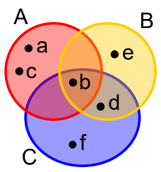
c. **a**'daki gibi yapınız.

d. **b**'deki gibi yapınız.

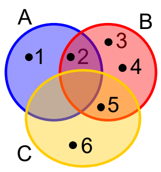
Etkinlik – 21

Üç kümeyi birlikte Venn şeması ile göstermek için önce üç kümenin kesişiminin elemanları, sonra ikişer ikişer kesişimlerinin elemanları yerleştirilmelidir.

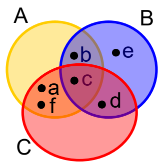
a.



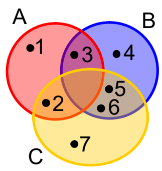
b.



c.



d.



Etkinlik – 22

a. K ve K′ kümelerini liste yöntemi ile yazabilirsiniz. Ortak özellik yöntemi ile;

$K = \{x|$ x sınıfınızdaki kız öğrencidir.$\}$,

$K' = \{x|$ x sınıfınızdaki erkek öğrencidir.$\}$,

$K \cup K' = \{x|$ x sınıfınızdaki öğrencidir.$\}$ olur.

b. K′ ve $K \cup K'$ kümelerini liste yöntemi ile yazmak çok zaman alır.

$K' = \{x|$x okulunuzda kız öğrencidir; x sizin sınıfınızda değildir.$\}$

$K \cup K' = \{x|$x okulunuzdaki kız öğrencidir.$\}$

c. **b** ile aynı biçimde yazılabilir.

d. **b** ile aynı biçimde yazılabilir.

e. Bir T kümesi yazıp soyut ve somut tüm nesneleri bu kümeye aldığınızı düşününüz. Bu T kümesinde T'nin kuvvet kümesi olamayacaktır.

O hâlde; böyle bir küme yoktur.

f. "**Tüm nesnelerin kümesi**." ya da "**Kümelerin kümesi**." ifadeleri bir küme belirtmediğine göre; bir A kümesinin dışındaki nesnelerin kümesinden söz edebilmek için, A'yı kapsayan bir kümenin belirtilmesi gerekir. bu kümeye **evrensel küme** diyeceğiz.

Evrensel küme, incelenen konu ile ilgili tüm nesneleri içerecek kadar geniş, ilgisiz nesneleri içermeyecek kadar dar seçilmelidir.

Etkinlik – 23

a. $(2x+3)(x+2)(x-3)=0$

$\Rightarrow \underbrace{(2x+3=0)}_{p(x)} \vee \underbrace{(x+2=0)}_{q(x)} \vee \underbrace{(x-3=0)}_{r(x)}$

Çift doğal sayılardan hiç biri **p(x)**, **q(x)** veya **r(x)** **açık önerme**lerinden her hangi birini doğru yapmaz.

$Ç = \varnothing$ olur.

b. $x = 3$ için

$p(3) \equiv 0$, $q(3) \equiv 0$, $r(3) \equiv 1$ olduğundan

$p(3) \vee q(3) \vee r(3) \equiv 1$ dir.

$Ç = \{3\}$ olur.

c. $Ç = \{-2,3\}$ **d.** $Ç = \left\{-\frac{3}{2}, -2, 3\right\}$ **e.** $Ç = \left\{-\frac{3}{2}, -2, 3\right\}$

Etkinlik – 24

a. "$A \subset E$" ① önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı "$\forall x,\ (x \in A) \Rightarrow (x \in E)$"'dir. ②

② önermesinin "$(a \in A) \Rightarrow (a \in E)$" ③ yorumunda $p: a \in A$, $a \in E \equiv 1$ sembolleştirmesi yapılırsa; bunun önermeler mantığındaki "$p \Rightarrow 1$" ④ karşılığı elde edilir.

"$p \Rightarrow 1$" önermesi bir totoloji olduğundan "$A \subset E$" önermesi doğrudur.

b. I. yol

" $A \cap E = A$ " önermesinin niceleme mantığındaki karşılığı $\forall x, \left[(x \in A) \wedge (x \in E)\right] \Leftrightarrow (x \in A)$ " ;
önermeler mantığındaki karşılığı " $(p \wedge 1) \Leftrightarrow p$ " veya " $p \Leftrightarrow p$ " 'dir.
" $p \Leftrightarrow p$ " bir totoloji olduğundan " $A \cap E = A$ " 'dır.

II. yol

" $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ " teoremini ispatlamıştınız.
Buna göre; $A \subset E$ olduğundan, $A \cap E = A$ olur.

III. yol

$A \cap E = \{x | (x \in A) \wedge (x \in E)\}$ ($\cap$ 'nin tanımı)
$\Rightarrow A \cap E = \{x | (x \in A) \wedge 1\}$ $(x \in E \equiv 1)$
$\Rightarrow A \cap E = \{x | \ x \in A\}$ $(p \wedge 1 \equiv p)$
$\Rightarrow A \cap E = A$

c. Siz, **b**'deki I. ve II. yolları bu teoremin ispatına uygulayınız.
III. yolu biz uygulayalım:

$A \cup E = \{x | (x \in A) \vee (x \in E)\}$ ($\cup$ 'nin tanımı)
$\Rightarrow A \cup E = \{x | \left[(x \in A) \vee (x \in E)\right] \wedge (x \in E)\}$
$\Rightarrow A \cup E = \{x | \left[(x \in A) \vee 1\right] \wedge (x \in E)\}$ $(x \in E \equiv 1)$
$\Rightarrow A \cup E = \{x | \ 1 \wedge (x \in E)\}$ $(p \vee 1 \equiv 1)$
$\Rightarrow A \cup E = \{x | \ x \in E\}$ $(1 \vee p \equiv p)$
$\Rightarrow A \cup E = E$

Etkinlik – 25

a. I. yol

$A \cup A' = \{x | (x \in A) \vee (x \in A')\}$ ($\cup$'nin tanımı)
$\Rightarrow A \cup A' = \{x | (x \in A) \vee (x \notin A)\}$ (A' 'nin tanımı)
$\Rightarrow A \cup A' = \{x | \left[(x \in A) \vee (x \notin A)\right] \wedge (x \in E)\}$
$\Rightarrow A \cup A' = \{x | \ 1 \wedge (x \in E)\}$ $(p \vee p' \equiv 1)$
$\Rightarrow A \cup A' = \{x | \ x \in E\}$ $(1 \wedge p \equiv p)$
$\Rightarrow A \cup A' = E$

II. yol

" $A \cup A' = E$ " önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının " $(p \vee p' \equiv 1)$ " olduğunu göstererek ispatlayınız.

b. **a**'daki gibi ispatlayınız.

c. $(A')' = \{x | (x \notin A)'\}$
$\Rightarrow (A')' = \left\{x \middle| \left[(x \in A)'\right]'\right\}$
$\Rightarrow (A')' = \{x | \ x \in A\}$
$\Rightarrow (A')' = A$

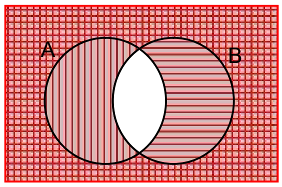
d. $\varnothing' = \{x | (x \in E) \wedge (x \notin \varnothing)\}$
$\Rightarrow \varnothing' = \{x | (x \in E) \wedge (x \in \varnothing)'\}$
$\Rightarrow \varnothing' = \{x | (x \in E) \wedge 0'\}$
$\Rightarrow \varnothing' = \{x | (x \in E) \wedge 1\}$
$\Rightarrow \varnothing' = \{x | \ x \in E\}$
$\Rightarrow \varnothing' = E$

e. "$(A')' = A$" ve "$\varnothing' = E$" teoremlerini ispatladık.
Buna göre; $E = \varnothing' \Rightarrow E' = (\varnothing')' \Rightarrow E' = \varnothing$ bulunur.

f. " $(A \subset B) \Leftrightarrow (B' \subset A')$ " ① önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının " $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \Rightarrow p')$ " ② olduğunu gösteriniz.
$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ olduğundan ② önermesi totolojidir.
O hâlde; " $(A \subset B) \Leftrightarrow (B' \subset A')$ " çift gerektirmedir.

Etkinlik – 26

$A' \rightarrow$ (yatay çizgiler)
$B' \rightarrow$ (düşey çizgiler)



a. $(A \cup B)'$ kümesine karşılık gelen bölgenin hem yatay hem düşey çizgilerle taranmış olduğuna dikkat ediniz.
Buna göre; $(A \cup B)' = A' \cap B'$ olmalıdır.

b. $(A \cap B)'$ kümesine karşılık gelen bölgenin yatay **veya** düşey çizgilerle taranmış olduğuna dikkat ediniz.
Buna göre; $(A \cap B)' = A' \cup B'$ olmalıdır.

Etkinlik – 27

a. $(A\cup B)' = \{x \mid [x\in(A\cup B)]'\}$

$\Rightarrow (A\cup B)' = \{x \mid [(x\in A)\vee(x\in B)]'\}$

$\Rightarrow (A\cup B)' = \{x \mid (x\in A)'\wedge(x\in B)'\}$

$\Rightarrow (A\cup B)' = A'\cap B'$

b. **a**'daki gibi ispatlayınız.

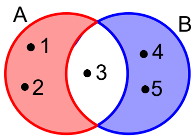
Etkinlik – 28

a. $A'\cap B' = (A\cup B)' = \{1,2,3,5,7\}' = \{4,6\}$

b. $A'\cup B' = (A\cap B)' = \{3,7\}' = \{1,2,4,5,6\}$

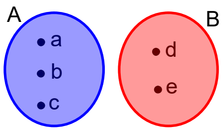
Etkinlik – 29

a. $A-B=\{1,2\}$;
$B-A=\{4,5\}$ olur.



$A\neq B$ iken $A-B\neq B-A$ olduğu bu örnekte de görülmektedir.

b. $A-B=\{a,b,c\}$;
$B-A=\{d,e\}$ olur.



$A\cap B=\varnothing$ ise $A-B=A$ ve $B-A=B$ olduğu açıktır.

c. Siz yapınız. **d.** Siz yapınız.

Etkinlik – 30

a. $A-B=\{x \mid (x\in A)\wedge(x\notin B)\}$ (Fark tanımı)

$\Rightarrow A-B=\{x \mid (x\in A)\wedge(x\in B')\}$ (Tümleme tanımı)

$\Rightarrow A-B=A\cap B'$ ($\cap$'nin tanımı)

b. $A-A=A\cap A' \Rightarrow A-A=\varnothing$

c. $A-\varnothing=A\cap\varnothing'$

$\Rightarrow A-\varnothing=A\cap E$ $(\varnothing'=E)$

$\Rightarrow A-\varnothing=A$ $(A\subset E)$

d. $\varnothing-A=\varnothing\cap A'$

$\Rightarrow \varnothing-A=\varnothing$ $(\varnothing\subset A')$

e. $E-A=E\cap A'$

$\Rightarrow E-A=A'$ $(A'\subset E)$

f. "$(A\subset B)\Leftrightarrow(A-B=\varnothing)$" ① önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının
"$(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow[(p\wedge q')\Leftrightarrow 0]$" ② olduğunu ve
② önermesinin bir totoloji olduğunu gösteriniz.

Etkinlik – 31

a. I. yol

"$(A\cup B=A\cap B)\Leftrightarrow(A=B)$" ① önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının
"$[(p\vee q)\Leftrightarrow(p\wedge q)]\Leftrightarrow(p\Leftrightarrow q)$" ② olduğunu ve
② önermesinin bir totoloji olduğunu gösteriniz.

II. yol

Önce $A=B$'nin gerekli koşul olduğunu gösterelim:

$A\cup B=A\cap B$ ise $A\subset(A\cap B)$ ① olur.

Her A ve B kümesi için $(A\cap B)\subset A$ dir. ②

① ve ②'den $A\cap B=A$ ③ olur.

Aynı şekilde; $A\cup B=A\cap B$ ise $B\subset(A\cap B)$ ve $(A\cap B)\subset B$ olduğundan $A\cap B=B$ ④ olur.

③ ve ④'ten $A=B$ bulunur.

$(A\cup B=A\cap B)\Rightarrow(A=B)$ bir gerektirmedir.

Şimdi de $A=B$'nin yeterli koşul olduğunu gösterelim:

$A=B$ ise $A\cup B=A$ ve $A\cap B=A$ olup
$A\cup B=A\cap B$ bulunur.

$(A=B)\Rightarrow(A\cup B=A\cap B)$ de gerektirmedir.

$(A\cup B=A\cap B)\Leftrightarrow(A=B)$ çift gerektirme olur.

b. $A-(B\cup C)=A\cap(B\cup C)'$

$\Rightarrow A-(B\cup C)=A\cap(B'\cap C')$

$\Rightarrow A-(B\cup C)=A\cap A\cap B'\cap C'$

$\Rightarrow A-(B\cup C)=(A\cap B')\cap(A\cap C')$

$\Rightarrow A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

c. **b**'deki gibi ispatlayınız.

d. $A-B=A\cap B'$

$\Rightarrow A-B=B'\cap(A')'$ $\quad \left[A=(A')'\right]$

$\Rightarrow A-B=B'-A'$

e. $(A\cap B)-C=A\cap B\cap C'$ $\quad (A-B=A\cap B')$

$\Rightarrow (A\cap B)-C=A\cap B\cap C'\cap C'$ (Tek kuvvet öz.)

$\Rightarrow (A\cap B)-C=A\cap B\cap C'\cap C'$ (Değiş. ve bir. öz.)

$\Rightarrow (A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$ $\quad (A\cap B'=A-B)$

f. I. yol

$A\cap(B-C)=A\cap B\cap C'$ $\quad (A-B=A\cap B')$

$\Rightarrow A\cap(B-C)=(A\cap B)-C$ $\quad (A\cap B'=A-B)$

C kümesinin $A\cap B$ kümesinde bulunan elemanları
$A\cap B\cap C$, $A\cap C$, $B\cap C$
kümelerinin de elemanlarıdır.
$A\cap B$ kümesinden C kümesini çıkarmak demek
$A\cap B\cap C$, $A\cap C$ ya da $B\cap C$ kümesini
çıkarmak demektir.

Buna göre;
$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap B\cap C)$,
$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(B\cap C)$,
$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$
eşitlikleri geçerlidir.

II. yol

$(A\cap B)-(A\cap C)$ kümesinin $A\cap(B-C)$ kümesine eşit olduğunu gösterelim:

$(A\cap B)-(A\cap C)=A\cap B\cap(A\cap C)'$

$\Rightarrow (A\cap B)-(A\cap C)=A\cap B\cap(A'\cup C')$

$\Rightarrow (A\cap B)-(A\cap C)=B\cap\left[A\cap(A'\cup C')\right]$

$\Rightarrow (A\cap B)-(A\cap C)=B\cap\left[(A\cap A')\cup(A\cap C')\right]$

$\Rightarrow (A\cap B)-(A\cap C)=B\cap\left[\varnothing\cup(A\cap C')\right]$

$\Rightarrow (A\cap B)-(A\cap C)=B\cap A\cap C'$

$\Rightarrow (A\cap B)-(A\cap C)=A\cap(B\cap C')$

$\Rightarrow (A\cap B)-(A\cap C)=A\cap(B-C)$

İşlemlerin dayandırıldığı kuralları siz gösteriniz.

Etkinlik – 32

$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

$\Rightarrow A\Delta B=(A\cap B')\cup(B\cap A')$

$\Rightarrow A\Delta B=\left[(A\cap B')\cup B\right]\cap\left[(A\cap B')\cup A'\right]$

$\Rightarrow A\Delta B$

$=\left[(A\cup B)\cap(B'\cup B)\right]\cap\left[(A\cup A')\cap(B'\cup A')\right]$

$\Rightarrow A\Delta B=\left[(A\cup B)\cap E\right]\cap\left[E\cap(A'\cup B')\right]$

$\Rightarrow A\Delta B=(A\cup B)\cap(A'\cup B')$

$\Rightarrow A\Delta B=(A\cup B)\cap(A\cap B)'$

$\Rightarrow A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

İşlemlerin dayandırıldığı kuralları siz gösteriniz.

Etkinlik – 33

$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$ ① ve

$(A\Delta B)\cap C=(A\cap C)\Delta(B\cap C)$ ②

önermelerinin doğru olduğu gösterilecektir.

② önermesini size bırakıyoruz.

① önermesinin doğruluğunu biz gösterelim:

I. yol

$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$ ① önermesinin önermeler mantığındaki karşılığının

$\left[p\wedge(q'\Leftrightarrow r)\right]\Leftrightarrow\left[(p\wedge q)'\Leftrightarrow(p\wedge r)\right]$ ②

olduğu ve bunun bir totoloji olduğu gösterilebilir.

O hâlde; $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$
eşitliği geçerlidir.

II. yol

$(A\cap B)\Delta(A\cap C)$ kümesinin $A\cap(B\Delta C)$ kümesine eşit olduğunu gösterelim :

$(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

$=\left[(A\cap B)\cup(A\cap C)\right]-\left[(A\cap B)\cap(A\cap C)\right]$

$=\left[A\cap(B\cup C)\right]\cap(A\cap B\cap C)'$

$=A\cap(B\cup C)\cap\left[A'\cup(B\cap C)'\right]$

$=(B\cup C)\cap A\cap\left[A'\cup(B\cap C)'\right]$

$=(B\cup C)\cap\left\{(A\cap A')\cup\left[A\cap(B\cap C)'\right]\right\}$

$=(B\cup C)\cap A\cap(B\cap C)'$
$=A\cap[(B\cup C)-(B\cap C)]$
$=A\cap(B\Delta C)$

İşlemlerin dayandırıldığı kuralları siz gösteriniz.

Etkinlik – 34

a. $A\cap(B\cup C)$ **b.** $B-(A\cup C)$

c. $[A-(B\cup C)]\cup[(B\cap C)-A]$

d. $(A\cap B\cap C)\cup[C-(A\cup B)]$

e. $(A-B)\cap C$ **f.** $C-(A\cup B)$

g. $[(A\cap C)-B]\cup(B-C)$ **h.** $(A\cup B)\Delta C$

Etkinlik – 35

Belirtilen kümeleri, önce küme işlemlerinden yararlanarak sadeleştirelim :

a. $(A\cap B)\cup(A-B)$
$=(A\cap B)\cup(A\cap B')$ (Neden?)
$=A\cap(B\cup B')$ (Neden?)
$=A\cap E$ (Neden?)
$=A$ (Neden?)

b. $(A\cup B)\cap B'$
$=(A\cap B')\cup(B\cap B')$ (Neden?)
$=(A\cap B')\cup\varnothing$ (Neden?)
$=A\cap B'$ (Neden?)

c. $(A\cup B)\cap(A\cup B')$
$=A\cup(B\cap B')$ (Neden?)
$=A\cup\varnothing$ (Neden?)
$=A$ (Neden?)

d. $[(A\cup B')\cap(A\cap C)]-[(A\cap C)-B]$
$=(A\cap C)-(A\cap C\cap B')$ (Neden?)
$=(A\cap C)\cap(A\cap C\cap B')'$ (Neden?)
$=(A\cap C)\cap(A'\cup C'\cup B)$ (Neden?)
$=[(A\cap C)\cap(A'\cup C')]\cup[A\cap C\cap B]$ (Neden?)
$=\left[(A\cap C)\cap(A\cap C)'\right]\cup(A\cap B\cap C)$ (Neden?)
$=\varnothing\cup(A\cap B\cap C)$ (Neden?)
$=A\cap B\cap C$

e. $(A\cap B)\cup[B\cap(C-A)]$
$=(A\cap B)\cup(A'\cap B\cap C)$ (Neden?)
$=[(A\cap B)\cup(A'\cap B)]\cap[(A\cap B)\cup C]$ (Neden?)
$=(A\cup A')\cap B\cap[(A\cap B)\cup C]$ (Neden?)
$=[B\cap(A\cap B)]\cup(B\cap C)$ (Neden?)
$=(A\cap B)\cup(B\cap C)$ (Neden?)
$=(A\cup C)\cap B$ (Neden?)

f. $(A-B)\cup(A-C)\cup(B-C')$
$=(A\cap B')\cup(A\cap C')\cup(B\cap C)$ (Neden?)
$=[A\cap(B'\cup C')]\cup(B\cap C)$ (Neden?)
$=[A\cup(B\cap C)]\cap[(B'\cup C')\cup(B\cap C)]$ (Neden?)
$=[A\cup(B\cap C)]\cap\left[(B\cap C)'\cup(B\cap C)\right]$ (Neden?)
$=A\cup(B\cap C)$ (Neden?)

g. $[A\cap(A'\cup B)]\cup[(A\cup B')\cap B]$
$=(A\cap A')\cup(A\cap B)\cup(A\cap B)\cup(B'\cap B)$
$=(A\cap B)$

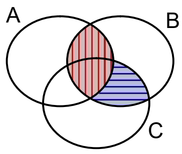
h. $[(A'\cup B)\cap(B\cup C)]\cup(B'\cap C)$
$=B\cup(A'\cap C)\cup(B'\cap C)$
$=B\cup[(A'\cup B')\cap C]$
$=(B\cup A'\cup B')\cap(B\cup C)$
$=(B\cup C)$ (Neden?)

Şimdi de Venn şemasından yararlanarak sadeleştirme yapalım :

a, b, c, d'yi size bırakıyoruz.

e. $A\cap B\rightarrow$ ||||

$B\cap(C-A)\rightarrow$ ≡

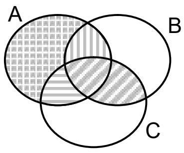


Taralı bölgelerin birleşimi $(A\cup C)\cap B$ 'dir.

f. $A-B\rightarrow$ ≡

$A-C\rightarrow$ ||||

$B-C'\rightarrow$ ////

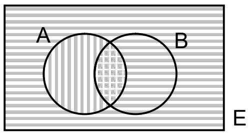


Taralı bölgelerin birleşimi $A\cup(B\cap C)$ 'dir.

g. $A \rightarrow$ ||||

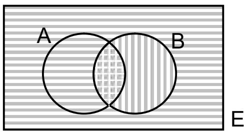
$A' \cup B \rightarrow$ ☰

$A \cap (A' \cup B) = A \cap B$ olur.



$A \cup B' \rightarrow$ ☰

$B \quad \rightarrow$ ||||



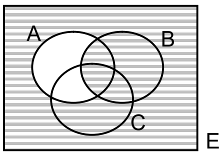
$(A \cup B') \cap B = A \cap B$ olur.

Birleştirirsek,

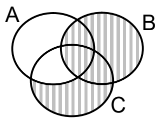
$[A \cap (A' \cup B)] \cup [(A \cup B') \cap B] = (A \cap B)$ bulunur.

h.

$A' \cup B \rightarrow$ ☰

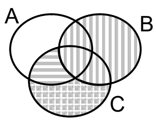


$A' \cup B$ kümesinin $B \cup C$ ile kesişimi yandaki taralı bölge olur.



Taralı bölgeye $B' \cap C$ eklenirse,

$[(A' \cup B) \cap (B \cap C)] \cup (B' \cap C)$
$= B \cup C$ elde edilir.

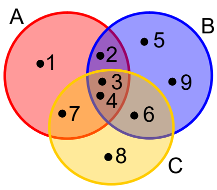


Etkinlik – 36

$(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$

$\Rightarrow A \cap B \cap C = \{3,4\}$ olur.

Buna göre, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ kümeleri şemaya yerleştirilir.



$(A \cup C) - (B \cup C) = \{1\}$ olduğundan, 1 yalnız A'nın elemanıdır.

$A \cup C$ kümesinden yararlanarak, yalnız C'nin elemanı;

$B \cup C$ kümesinden yararlanarak, yalnız B'nin elemanları yerleştirilir.

Etkinlik – 37

a. $A = \{a,b,c\}$ ve $B = \{d,e\}$ ise

$A \cup B = \{a,b,c,d,e\}$ ve $A \cap B = \varnothing$ olur.

Bu durumda;

$s(A \cup B) = 5,\ s(A) = 3,\ s(B) = 2$ ve

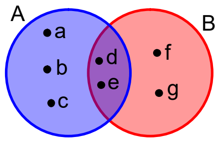
$s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ olur.

b. $A = \{a,b,c,d,e\}$ ve

$B = \{d,e,f,g\}$ ise

$A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ ve

$A \cap B = \{d,e\}$ olur.



$s(A \cup B)$ sayısını bulmak için, işe $s(A) + s(B)$ toplamı ile başlanabilir. $s(A \cap B)$ sayısı -s(A)'nın ve s(B)'nin içinde olmak üzere- iki kere sayılmış olacağından birini çıkarmak gerekir.

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ olmalıdır.

Gerçekten; verilen A ve B kümeleri için $s(A) = 5$, $s(B) = 4$, $s(A \cup B) = 7$, $s(A \cap B) = 2$ olup $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ eşitliği doğrulanır.

Etkinlik – 38

$$s(A \cup B) = \underbrace{s(A - B) + s(A \cap B)}_{s(A)} + \underbrace{s(B - A) + s(A \cap B)}_{s(B)} - s(A \cap B)$$

$\Rightarrow s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ olur.

Etkinlik – 39

A, B ve C ayrık kümeler olsaydı,

$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C)$ olurdu.

Genel durumda;

bu toplamda $s(A \cap B)$

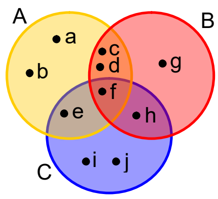
hem s(A)'nın hem s(B)'nin,

$s(A \cap C)$

hem s(A)'nın hem s(C)'nin,

$s(B \cap C)$

hem s(B)'nin hem s(C)'nin içinde olmak üzere ikişer kere sayılmış olurlar.



Birer kere çıkarmak gerekir:

$$s(A\cup B\cup C)=s(A)+s(B)+s(C)$$
$$-s(A\cap B)-s(A\cap C)-s(B\cap C)+?$$

$s(A\cap B\cap C)$ sayısı s(A), s(B), s(C)'nin içinde olmak üzere üç kere sayılmış;

$s(A\cap B)$, $s(A\cap C)$, $s(B\cap C)$'nin içinde olmak üzere üç kere çıkarılmış olup toplamda bulunmamaktadır.

Bunu eklememiz gerekir:

Buna göre;

$$s(A\cup B\cup C)=s(A)+s(B)+s(C)$$
$$-s(A\cap B)-s(A\cap C)-s(B\cap C)$$
$$+s(A\cap B\cap C)$$

bulunur.

Etkinlik – 40

$s(A\cup B\cup C)$ sayısını bulmak için

$s(A\cup B)=s(A)+s(B)-s(A\cap B)$

eşitliğinden yararlanacağız:

$$s(A\cup B\cup C)=s(A)+s(B\cup C)-s\left[A\cap(B\cup C)\right]$$

$$\Rightarrow s(A\cup B\cup C)=s(A)+s(B)+s(C)-s(B\cap C)$$
$$-s\left[(A\cap B)\cup(A\cap C)\right]$$

$$\Rightarrow s(A\cup B\cup C)=s(A)+s(B)+s(C)-s(B\cap C)$$
$$-s\left[(A\cap B)+s(A\cap C)-s(A\cap B\cap C)\right]$$

$$\Rightarrow s(A\cup B\cup C)=s(A)+s(B)+s(C)$$
$$-s(A\cap B)-s(A\cap C)-s(B\cap C)$$
$$+s(A\cap B\cap C)$$

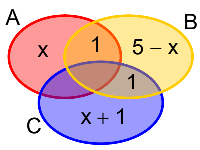
Etkinlik – 41

$A\cap C=\varnothing$ olduğundan,

$s(A\cap B)=1$ ve

$s(B\cap C)=1$

değerleri yerlerine yazılmıştır.



$s(A-B)=x$ denirse;

$s(A\cup B)=7$ olduğundan $s\left[B-(A\cup C)\right]=5-x$ ve

$s(B\cup C)=8$ olduğundan $s\left[C-(A\cup B)\right]=x+1$

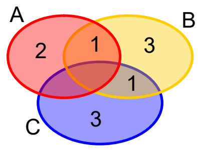
olur.

$s(A\cup C)=7$ olduğundan,

$x+1+x+1+1=7 \Rightarrow x=2$

bulunur.

$s(A\cup B\cup C)=10$ olur.



Etkinlik – 42

a. Burada; (Ad, Soyadı) ifadesindeki "(…, …)" sıralamaya özel bir anlam yüklenmiştir.

Ayıraç içine soldan sağa doğru önce ad, sonra soyadı yazılacaktır.

Küme ayıracının içinde sıra gözetilmediğinden, (İnci, Erol) ifadesi {İnci, Erol} biçiminde yazılırsa; hangisinin ad, hangisinin soyadı olduğu anlaşılmaz.

b. (2,4) ifadesi, 2 numaralı yarışmacının 4. olduğunu;

(4,2) ifadesi, 4 numaralı yarışmacının 2. olduğunu belirtir.

c. (5,7,3) ifadesi, 5 numaralı sokaktaki 7 numaralı apartmanın 5 numaralı dairesi anlamına gelir.

Ayıraç içindeki ilk yer için 3 seçenek, ikinci yer için 2 seçenek, üçüncü yer için 1 seçenek olacağından, bu sayılar $3\cdot 2\cdot 1=6$ değişik sıra ile yazılabilir.

Öyleyse; zarf hatalı sıralama sonucu 6 değişik adrese gidebilir.

Etkinlik – 43

a. $K=\{(13,A),(13,B),(13,C),(27,A),(27,B),$
$(27,C),(44,A),(44,B),(44,C)\}$

b. $K=\{(x,y)\,|\,x\in Ö,\ y\in N\}$

Etkinlik – 44

a. $A\times B=\{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,c),$
$(b,d),(b,e)\}$

$B\times A=\{(b,a),(b,b),(c,a),(c,b),(d,a),(d,b),$
$(e,a),(e,b)\}$

Örneğin; $(a,b)\neq(b,a)$ olduğundan

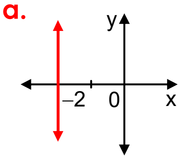
$A\times B\neq B\times A$ olur.

b. $s(A)=2,\ \ s(B)=4$ ve $s(A\times B)=8$ görülür.

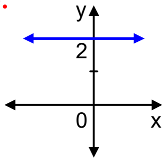
$s(A\times B)=s(A)\cdot s(B)$ olduğu doğrulanır.

Etkinlik – 45

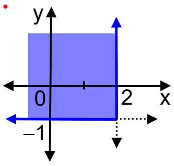
a.



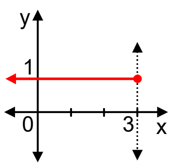
b.



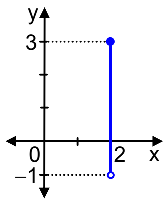
c.



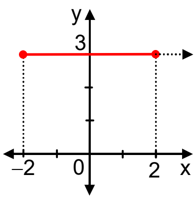
d.



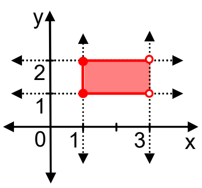
e.



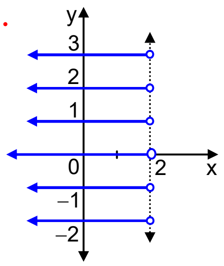
f.



g.



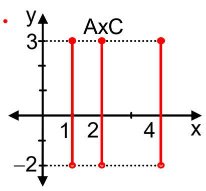
h.



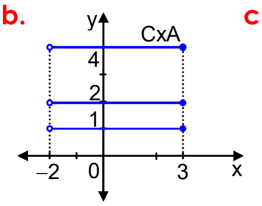
Etkinlik – 46

Grafiklere göre; $A=\{1,2,4\}$, $B=\{2,3\}$ ve $C=\{x\mid -2<x\le 3,\ x\in R\}$ kümeleridir.

a.

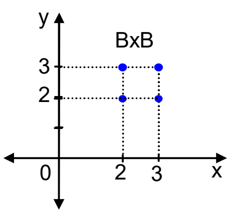


b.

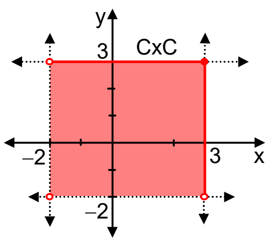


c. Siz çiziniz.

d.



e.



Etkinlik – 47

a. $A\times B=\{(-2,-1),(-2,2),(1,-1),(1,2),(3,-1),(3,2)\}$

$(A\times B)\times C=\{(-2,-1,2),(-2,-1,3),(-2,2,2),(-2,2,3),$
$(1,-1,2),(1,-1,3),(1,2,2),(1,2,3),$
$(3,-1,2),(3,-1,3),(3,2,2),(3,2,3)\}$

b. $B\times C=\{(-1,2),(-1,3),(2,2),(2,3)\}$

$A\times(B\times C)=\{(-2,-1,2),(-2,-1,3),(-2,2,2),(-2,2,3),$
$(1,-1,2),(1,-1,3),(1,2,2),(1,2,3),$
$(3,-1,2),(3,-1,3),(3,2,2),(3,2,3)\}$

$(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$ olduğuna dikkat ediniz.

Kartezyen çarpım işleminin birleşme özelliği olduğunu kanıtlayacağız.

c. $B\cup C=\{-1,2,3\}$

$A\times(B\cup C)=\{(-2,-1),(-2,2),(-2,3),(1,-1),$
$(1,2),(1,3),(3,-1),(3,2),(3,3)\}$

$A\times B=\{(-2,-1),(-2,2),(1,-1),(1,2),(3,-1),(3,2)\}$

$A\times C=\{(-2,2),(-2,3),(1,2),(1,3),(3,2),(3,3)\}$

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

olduğuna dikkat ediniz.

Kartezyen çarpım işleminin birleşim işlemi üzerine dağılma özelliği olduğunu kanıtlayacağız.

d. $B\cap C=\{2\}$ olur.

$(B\cap C)\times A,\ \ B\times A,\ \ C\times A,\ \ (B\times A)\cap(C\times A)$

kümeleri yazılırsa;

$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$ olduğu görülür.

e. $C-B=\{3\}$ olur.

$A\times(C-B),\ \ A\times C,\ \ A\times B,\ \ (A\times C)-(A\times B)$

kümeleri yazılırsa;

$A\times(C-B)=(A\times C)-(A\times B)$ olduğu görülür.

f. $A\Delta B=\{-2,-1,1,2,3\}$ olur.

$(A\Delta B)\times C$ ve $(A\times C)\Delta(B\times C)$ kümeleri yazılırsa;

$(A\Delta B)\times C=(A\times C)\Delta(B\times C)$ olduğu görülür.

Kartezyen çarpım işleminin kesişim işlemi, fark işlemi ve simetrik fark işlemi üzerine dağılma özelliği olduğunu kanıtlayacağız.

Etkinlik – 48

Yapacağımız ispatlarda, bir önermeden ardışığına geçişteki gerekçeleri belirtmeyeceğiz.
Bu gerekçeleri siz belirtmelisiniz.

a. $A\times(B\cup C)$

$=\{(x,y)|(x\in A)\wedge[(y\in B)\vee(y\in C)]$

$=\{(x,y)|[(x\in A)\wedge(y\in B)]\vee[(x\in A)\wedge(y\in C)]\}$

$=\{(x,y)|[(x,y)\in(A\times B)]\vee[(x,y)\in(A\times C)]\}$

$=(A\times B)\cup(A\times C)$

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ önermesi teoremdir.

$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$ olduğunu da siz gösteriniz.

Kartezyen çarpım işleminin birleşim işlemi üzerine sağdan ve soldan **dağılma özelliği** vardır.

b. $(A\cap B)\times C$

$=\{(x,y)|(x\in A)\wedge[(x\in B)\wedge(y\in C)]$

$=\{(x,y)|[(x\in A)\wedge(x\in B)]\wedge[(y\in C)\wedge(y\in C)]\}$

$=\{(x,y)|[(x\in A)\wedge(y\in C)]\wedge[(x\in B)\wedge(y\in C)]\}$

$=\{(x,y)|[(x,y)\in(A\times C)]\wedge[(x,y)\in(B\times C)]\}$

$=(A\times C)\cap(B\times C)$

$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$ önermesi teoremdir.

$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ olduğunu da siz gösteriniz.

Kartezyen çarpım işleminin kesişim işlemi üzerine sağdan ve soldan **dağılma özelliği** vardır.

c. $A\times(B-C)=A\times(B\cap C')$

$=\{(x,y)|(x\in A)\wedge[(y\in B)\wedge(y\in C')]$

$=\{(x,y)|[(x\in A)\wedge(x\in A)]\wedge[(y\in B)\wedge(y\in C')]\}$

$=\{(x,y)|[(x\in A)\wedge(y\in B)]\wedge[(x\in A)\wedge(y\in C')]\}$

$=\{(x,y)|[(x,y)\in(A\times B)]\wedge[(x,y)\in(A\times C')]\}$

$=\{(x,y)|[(x,y)\in(A\times B)]\wedge[(x,y)\notin(A\times C)]\}$

$=\left\{(x,y)\middle|[(x,y)\in(A\times B)]\wedge\left[(x,y)\in(A\times C)'\right]\right\}$

$=(A\times B)\cap(A\times C)'$

$=(A\times B)-(A\times C)$

$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$ önermesi teoremdir.

$(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$ olduğunu da siz gösteriniz.

d. a ve c'de ispatladığımız teoremleri kullanacağız:

$A\times(B\Delta C)=A\times[(B-C)\cup(C-B)]$

$=[A\times(B-C)]\cup[A\times(C-B)]$

$=[(A\times B)-(A\times C)]\cup[(A\times C)-(A\times B)]$

$=(A\times B)\Delta(A\times C)$

$A\times(B\Delta C)=(A\times B)\Delta(A\times C)$'dir.

$(A\Delta B)\times C=(A\times C)\Delta(B\times C)$ olduğunu da siz gösteriniz.

Etkinlik – 49

a. $(A\times C)\cup(B\times C)=(A\cup B)\times C$

$=\{1,2,3,4\}\times\{3,4,5\}$

$=\{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(4,5)\}$

b. $(A\times B)\cap(A\times C)=A\times(B\cap C)$

$=\{1,2,3\}\times\{3,4\}$

$=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$

c. $(A\times C)-(B\times C)=(A-B)\times C$

$=\{1\}\times\{3,4,5\}=\{(1,3),(1,4),(1,5)\}$

d. $(A\times B)\Delta(A\times C)=A\times(B\Delta C)$

$=\{1,2,3\}\times\{2,5\}$

$=\{(1,2),(1,5),(2,2),(2,5),(3,2),(3,5)\}$

Etkinlik – 50

a. $A\subset B\Rightarrow\forall x,\ x\in A\Rightarrow x\in B$ ve **I**

$C\subset D\Rightarrow\forall y,\ y\in C\Rightarrow y\in D$ olur. **II**

I ve **II** önermelerine göre;

$\forall(x,y),\ (x,y)\in A\times C\Rightarrow(x\in A)\wedge(y\in C)$

$\Rightarrow(x\in B)\wedge(y\in D)$

$\Rightarrow(x,y)\in B\times D$ olur.

$(A\subset B)\wedge(C\subset D)\Rightarrow(A\times C\subset B\times D)$

önermesi bir teoremdir.

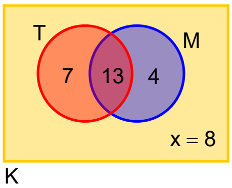
b. $(A \subset B) \Rightarrow (A \times C \subset B \times C)$ önermesi
$(A \subset B \wedge C \subset C) \Rightarrow (A \times C \subset B \times C)$ olarak yazılırsa;
önerme **a**'daki teoreme dönüşür.

c. $(A \subset B) \Rightarrow (A \times A \subset A \times B)$ önermesi
$(A \subset A \wedge A \subset B) \Rightarrow (A \times A \subset A \times B)$ olarak yazılırsa;
önerme **a**'daki teoreme dönüşür.

d. $(A \subset B) \Rightarrow (A \times B \subset B \times B)$ önermesi
$(A \subset B \wedge B \subset B) \Rightarrow (A \times B \subset B \times B)$ olarak yazılırsa;
önerme **a**'daki teoreme dönüşür.

Etkinlik – 51

$s(K) = 32,\ s(T) = 20,$
$s(M') = 15,\ s(T \cap M)' = 19$
olarak verilmiştir.



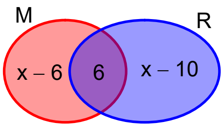
a. $s(M) = s(K) - s(M')$
$\Rightarrow s(M) = 32 - 15$
$\Rightarrow s(M) = 17$ olur.

$s(T \cap M) = s(K) - s(T \cap M)' = 32 - 19 = 13;$
$s(T - M) = s(T) - s(T \cap M) = 20 - 13 = 7;$
$s(M - T) = s(M) - s(T \cap M) = 17 - 13 = 4$ olur.

b. Bu değerler şemadaki yerlerine yazılırsa,
$s(K) = 7 + 13 + 4 + x = 32$
$\Rightarrow x = 8$ bulunur.
İki dersten de kalan öğrenci sayısı 8'dir.

Etkinlik – 52

$s(M \cup R) = 30,$
$s(M) = s(R) + 4,$
$s(M \cap R) = 6$
olarak verilmiştir.

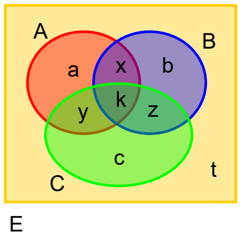


a. $s(M) = x$ denirse, $s(R) = x - 4$ ve
$s(R - M) = x - 10$ olur.

b. $s(M \cup R) = s(M) + s(R - m)$
$\Rightarrow 30 = x + x - 10$
$\Rightarrow x = 20$ bulunur.

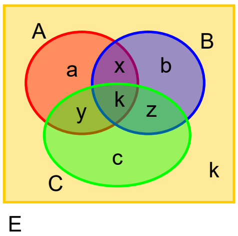
Müzik kursuna katılan öğrenci sayısı 20'dir.

Etkinlik – 53



a. $a + b + c$
b. $a + b + c + t$
c. $a + b + c + x + y + z + k$
d. $x + y + z$
e. $x + y + z + a + b + c + t$
f. $x + y + z + k$
g. k
h. $a + b + c + x + y + z + k + t$

Etkinlik – 54



a. Satılan gazetelerin toplam sayısı,
$a + b + c + 2(x + y + z) + 3k$ olur. (Neden?)

b. Toplam daire sayısı,
$a + b + c + x + y + z + 2k$ olur. (Neden?)

c. En az iki gazete alan daire sayısı,
$x + y + z + k$ olur. (Neden?)

$a + b + c + 2(x + y + z) + 3k = 70$ ve
$a + b + c + x + y + z + 2k = 40$ olduğu verilmiştir.

Bu bilgileri değerlendirerek, en az iki gazete alan daire sayısının 30 olduğu bulunur. Bunu açıklayınız.

Etkinlik – 55

a. Şema dört ayrık kümenin birleşimini göstermektedir.

	Türk öğ.	Alman öğ.
Kız öğ.	I	II
Erkek öğ	III	IV

$\mathrm{I} = \{x \mid \text{ x Türk'tür ve kızdır.}\}$

$\mathrm{II} = \{x \mid \text{ x Alman'dır ve kızdır.}\}$

$\mathrm{III} = \{x \mid \text{ x Türk'tür ve erkektir.}\}$

$\mathrm{IV} = \{x \mid \text{ x Alman'dır ve erkektir.}\}$

b. Gruptaki öğrencilerin sayısına $10 \cdot x$ denirse,

Alman öğrenci sayısı $10 \cdot x \cdot \dfrac{30}{100} = 3x$;

kız öğrenci sayısı $10 \cdot x \cdot \dfrac{40}{100} = 4x$ olur.

Türk kızlarının sayısına da y denirse, alt kümelerdeki öğrenci sayıları şemada gösterildiği gibi olur.

	Türk öğ.	Alman öğ.
Kız öğ.	y	$4x - y$
Erkek öğ	$7x - y$	$y - x$

c. Alman erkeklerinin sayısı Türk kızlarının sayısından 3 eksiktir.

Buna göre, $y - x + 3 = y \quad \Rightarrow \quad x = 3$ olur.

Gruptaki öğrenci sayısı da,

$10 \cdot x = 10 \cdot 3 = 30$ bulunur.

d. Türk erkekleri ile Alman kızlarının sayılarının toplamı 19'dur.

$x = 3$ bulunduğundan

$(7x - y) + (4x - y) = 19 \quad \Rightarrow \quad y = 7$ olur.