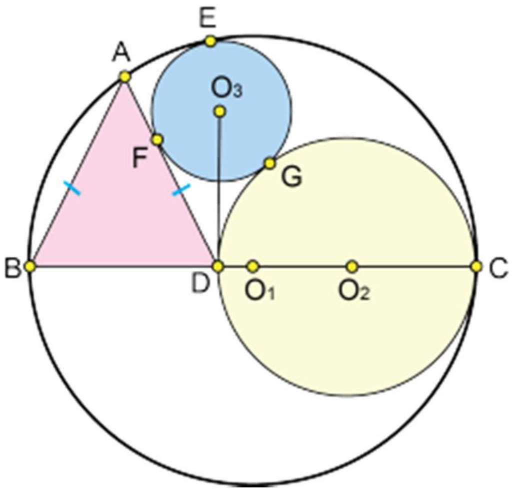
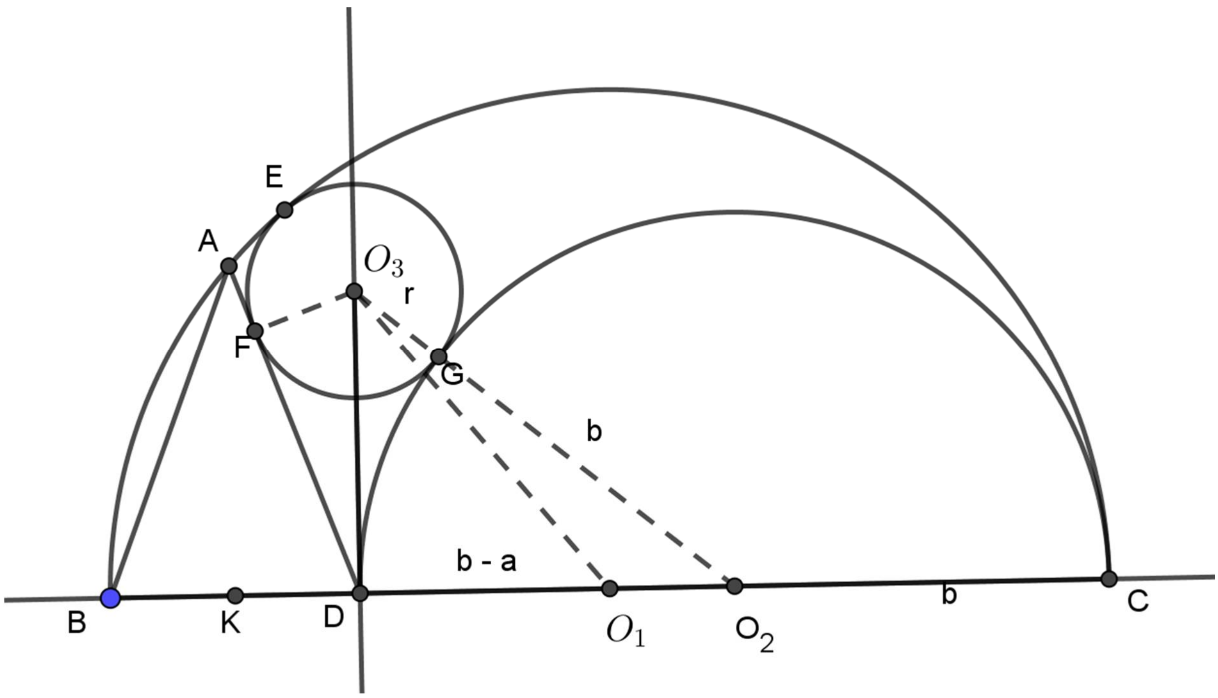



Şekilde BC çaplı $O_1$ merkezli çember,
DC çaplı $O_2$ merkezli çember,
$O_3$ merkezli çember verilmiştir.
E,F,G teğet noktaları
ABD ikizkenar üçgen AB=AD

$O_3D \perp BC$

# Çözüm:




$O_1$ merkezli çemberin yarıçapı a+b, $O_2$ merkezli çemberin yarıçapı b ve $O_3$ merkezli çemberin yarıçap r olsun. Verilen şekli D noktası koordinat sisteminin merkezine ve BC doğrusu Ox ekseni üzerinde olacak şekilde yerleştirilirse D(0, 0), $O_1$(b – a, 0), $O_2$(b, 0), B(- 2a, 0), C(2b, 0) ve K( - a, 0) olur. $O_3$(p, q) olsun. Yapacağımız işlemlerde p sayısını bulmaya çalışacağız.
Önce [BC] çaplı çemberin denklemini yazalım $(x-(b-a))^2+y^2=(a+b)^2$ olur.
A noktasının ordinatı için bu denklemde x = - a yazılırsa

$$(-b)^2+y^2=a^2+2ab+b^2 \quad den \;\; y=\sqrt{a^2+2ab}\; olup\; A(-a,\sqrt{a^2+2ab})$$

Noktasıdır. Buna göre AD dorğrusunun denklemi

$y=-\dfrac{\sqrt{a^2+2ab}}{a}\; dan \left\{\sqrt{a^2+2ab}\right\} x+ay=0$ şeklindedir.

$O_3$ noktasının bu doğruya uzaklığı r sayısını verir yani $r=\dfrac{\left|\left(\sqrt{a^2+2ab}\right)p+aq\right|}{\sqrt{2a^2+2ab}}$ (I) olarak hesaplanır.

Birbirine teğet çemberlerin merkezleri arasındaki özelliklere göre

$O_1$ v $O_3$ merkezli çemberler için $(a+b-r)^2=(p-)b-a))^2+q^2$ $(II)$

$O_2$ ve $O_3$ merkezli çemberler için $(b+r)^2=(p-b)^2+q^2$ $(III)$

II ve III den $q^2$ yok edilirse r nin p türünden değeri $r=\dfrac{2ab-ap}{2b+a}$ (IV) olarak hesaplanır

1. $\left|\sqrt{a^2+2ab}\ p+aq\right|=\sqrt{a^2+2ab}\ p+aq$ olması durumu;

I ve IV ün eşitliğinden $\dfrac{\sqrt{a^2+2ab}p+aq}{\sqrt{2a^2+2ab}}=\dfrac{2ab-ap}{2b+a}$ eşitliğinde

$$q=\frac{2ab\sqrt{2a^2+2ab}-\left(a\sqrt{2a^2+2ab}+(2b+a)\sqrt{a^2+2ab}\right)p}{a(2b+a)}$$

Olarak hesaplanır.

Burada $2ab\sqrt{2a^2+2ab}=\alpha\ \ ve\ a\sqrt{2a^2+2ab}+(2b+a)\sqrt{a^2+2ab}=\beta$ diyelim

$q=\dfrac{\alpha-\beta p}{a(2b+a)}$ olur. III de r ve q nun bu değerler III de yerine yazılırsa,

$$q^2=(b+r)^2-(p-b)^2=(r+p)(2b+r-p)=\left(\frac{2ab-ap}{2b+a}+p\right)\left(2b-p+\frac{2ab-ap}{2b+a}\right)$$

$$\left(\frac{\alpha-\beta p}{a(2b+a)}\right)^2=\left(\frac{2ab+2bp}{2b+a}\right)\left(\frac{4b(a+b)-2(a+b)p}{2b+a}\right)$$

$$\frac{\alpha^2-2\alpha\beta p+\beta^2p^2}{a^2(2b+a)^2}=\frac{8ab^2(a+b)-4ab(a+b)p+8b^2(a+b)p-4b(a+b)p^2}{(2b+a)^2}$$

$$=\frac{8ab^2(a+b)-4b(a+b)(a-2b)p-4b(a+b)p^2}{(2b+a)^2}$$

Burada $4b(a+b)(a-2b)=t\ ve\ 4b(a+b)=z$ dersek

Yukarıda $\alpha=2ab\sqrt{2a^2+2ab}\quad den\quad \alpha^2=8a^3b^2(a+b)$ dir.

$$\frac{8a^3b^2(a+b)-2\alpha\beta p+\beta^2p^2}{a^2}=\frac{8ab^2(a+b)-tp-zp^2}{1}\ den$$

$$8a^3b^2(a+b)-2\alpha\beta p+\beta^2p^2=8a^3b^2(a+b-a^2tp-a^2zp^2$$

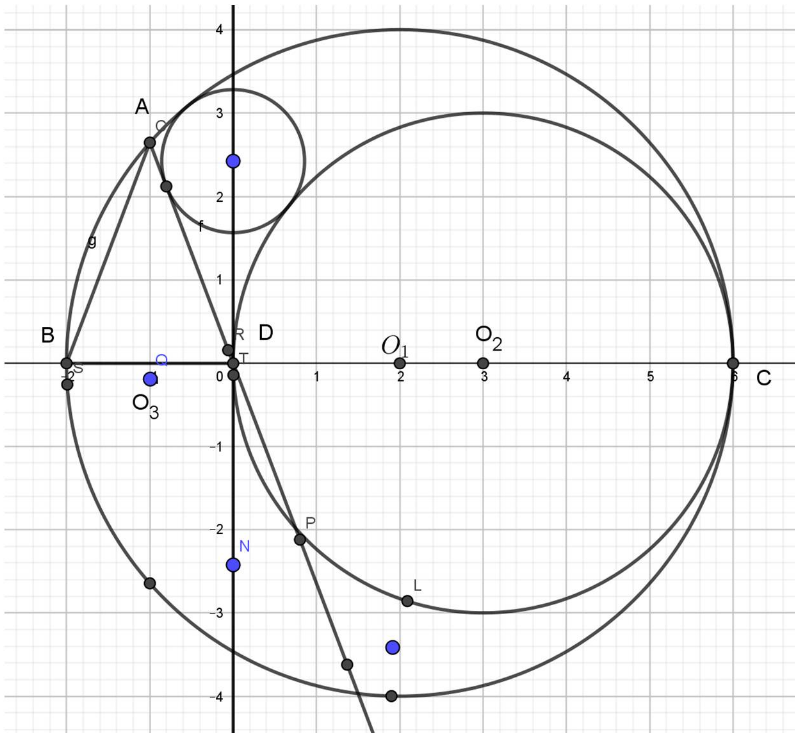
$$(a^2t-2\alpha\beta)p=(-a^2z-\beta^2)p^2\ denklemin\,den\ \ p=0\ veya\ \ p=\frac{a^2t-2\alpha\beta}{-a^2z-\beta^2}$$

Olarak bulunur. Burada p = 0 için $O_3$ ün apsisi ile D noktasının apsisi eşit ve 0 dır. Yani D ve $O_3$ noktaları y ekseni üzerinde olup x eksenine dik olduğundan $O_3D$ doğrusu [BC] na diktir.

$p=\dfrac{a^2t-2\alpha\beta}{-a^2z-\beta^2}$ için $q=\dfrac{\alpha\beta^2-a^2\alpha z-a^2\beta t}{a(2b+a)\left(-\beta^2-a^2z\right)}$ olur. $a=1\ ve\ b=3$ olsun.

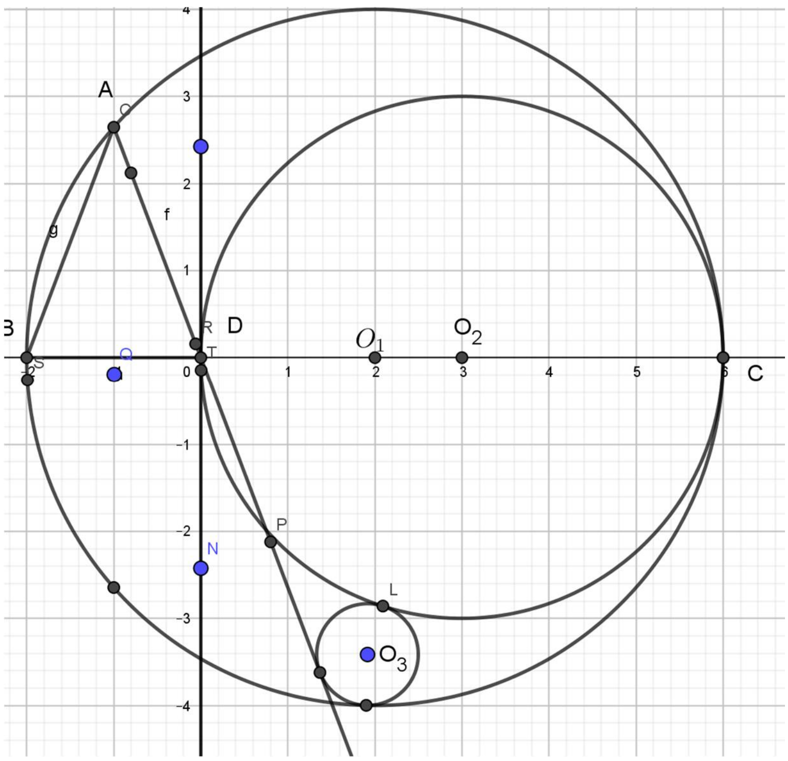
$\alpha=12\sqrt{2},\ \beta=2\sqrt{2}+7\sqrt{7},\ t=-240\ \ ve\ \ z=48$ olur.

$p = 0$ için $q=\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$ $ve$ $r=\dfrac{6}{7}$ olup şekil aşağıdadır.




$p=\dfrac{a^2t-2\alpha\beta}{-a^2z-\beta^2}$ için $q=\dfrac{a^2t\beta+a^2z\alpha-\alpha\beta^2}{a(2b+a)\left(a^2z+\beta^2\right)}$ olur. Yukarıdaki değerler yerine yazılırsa için

$q=\dfrac{-84\sqrt{2}-48\sqrt{7}}{57+4\sqrt{14}}$ olup gra $p=\dfrac{48+24\sqrt{14}}{57+4\sqrt{14}}$ fik aşağıdadır.



Bu çember AD ye ve diğer çemberlere teğet olmasına rağmen merkezini D ile birleştiren doğru x eksenine dik değildir.

2. $\left|\sqrt{a^2+2ab}\ p+aq\right|=-\sqrt{a^2+2ab}\ p-aq$ olması durumu;

I ve IV ün eşitliğinden $\dfrac{-\sqrt{a^2+2ab}\ p-aq}{\sqrt{2a^2+2ab}}=\dfrac{2ab-ap}{2b+a}$ eşitliğinde

$$q=\frac{-2ab\sqrt{2a^2+2ab}+\left(a\sqrt{2a^2+2ab}-(2b+a)\sqrt{a^2+2ab}\right)p}{a(2b+a)}$$

Olarak hesaplanır.

Burada $-2ab\sqrt{2a^2+2ab}=\alpha\ \ ve\ a\sqrt{2a^2+2ab}-(2b+a)\sqrt{a^2+2ab}=\beta$ diyelim

$q=\dfrac{\alpha+\beta p}{a(2b+a)}$ olur. III de r ve q nun bu değerler III de yerine yazılırsa,

$$q^2=(b+r)^2-(p-b)^2=(r+p)(2b+r-p)=\left(\frac{2ab-ap}{2b+a}+p\right)\left(2b-p+\frac{2ab-ap}{2b+a}\right)$$

$$\left(\frac{\alpha+\beta p}{a(2b+a)}\right)^2=\left(\frac{2ab+2bp}{2b+a}\right)\left(\frac{4b(a+b)-2(a+b)p}{2b+a}\right)$$

$$\frac{\alpha^2+2\alpha\beta p+\beta^2p^2}{a^2(2b+a)^2}=\frac{8ab^2(a+b)-4ab(a+b)p+8b^2(a+b)p-4b(a+b)p^2}{(2b+a)^2}$$

$$=\frac{8ab^2(a+b)-4b(a+b)(a-2b)p-4b(a+b)p^2}{(2b+a)^2}$$

Burada $4b(a+b)(a-2b)=t\ ve\ 4b(a+b)=z$ dersek

Yukarıda $\alpha=-2ab\sqrt{2a^2+2ab}\quad den\quad a^2=8a^3b^2(a+b)$ dir.

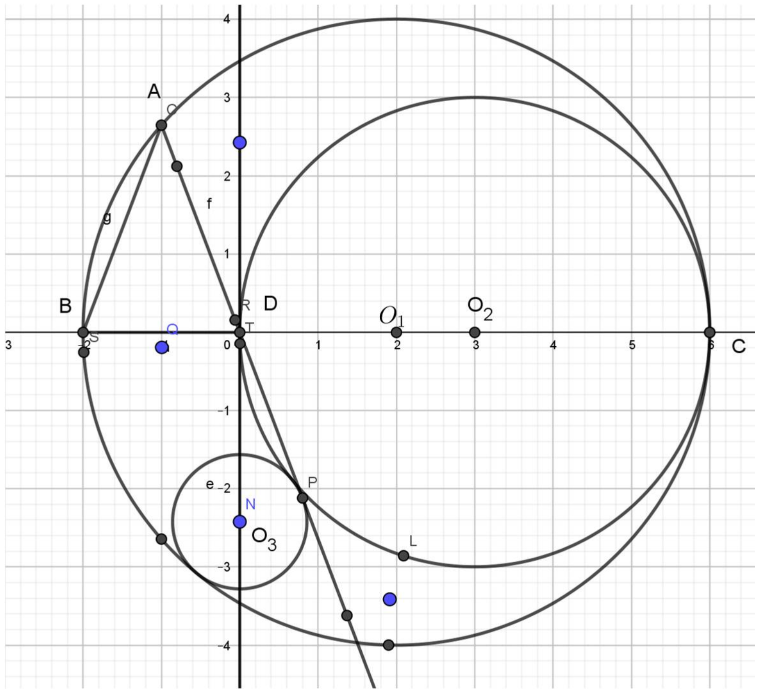
$$\frac{8a^3b^2(a+b)+2\alpha\beta p+\beta^2p^2}{a^2}=\frac{8ab^2(a+b)-tp-zp^2}{1}\ den$$

$$8a^3b^2(a+b)+2\alpha\beta p+\beta^2p^2=8a^3b^2(a+b-a^2tp-a^2zp^2$$

$$(a^2t+2\alpha\beta)p=(-a^2z-\beta^2)p^2\ \ denklemin den\ \ p=0\ \ veya\ \ p=\frac{a^2t+2\alpha\beta}{-a^2z-\beta^2}$$

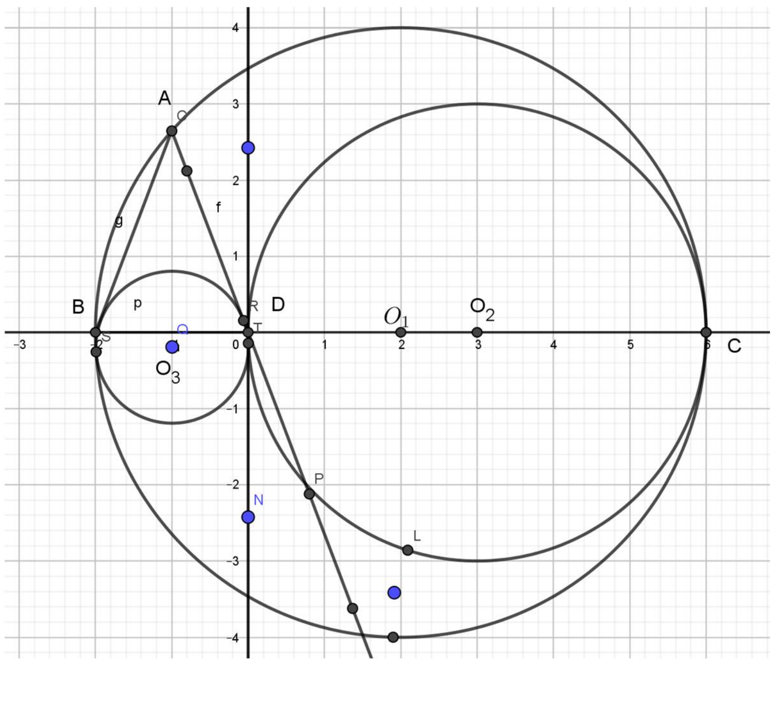
Olarak bulunur. Burada p = 0 için $O_3$ ün apsisi ile D noktasının apsisi eşit ve 0 dır. Yani D ve $O_3$ noktaları y ekseni üzerinde olup x eksenine dik olduğundan $O_3D$ doğrusu [BC] na diktir

Yukarıdaki örnekte p=0 için $q=-\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$ olup şekil aşağıdaki gibidir.




$p=\dfrac{a^2t+2\alpha\beta}{-a^2z-\beta^2}$ için $q=\dfrac{a^2t\beta-a^2z\alpha+\alpha\beta^2}{a(2b+a)\left(-a^2z-\beta^2\right)}$ olur. Yukarıdaki örnekte a=1 ve b=3 alınmıştı.

Bu durumda $\alpha=-12\sqrt{2}, \beta=2\sqrt{2}-7\sqrt{7}, t=-240\ ve\ z=48$ olur. Bu değerler yerine yazılırsa $p=\dfrac{-48+24\sqrt{14}}{-57+4\sqrt{14}}=\dfrac{48-24\sqrt{14}}{57-4\sqrt{14}}$ ve $q=\dfrac{-84\sqrt{2}+48\sqrt{7}}{-57+4\sqrt{14}}=\dfrac{84\sqrt{2}-48\sqrt{7}}{57-4\sqrt{14}}$ olup grafik aşağıdadır.



Bu sorunun çözümünde görüldüğü gibi ABD ikizkenar üçgeninin [AD ışınına , [BC] ve [DC] çaplı çemberlere teğet olmak üzere dört farklı çember vardır. Bunlardan iki tanesinin apsisi D ile aynı olup D ile birleştirildiğinde Ox eksenine dik olan doğru parçaları çizilmekte diğer iki çemberin merkezleri d noktası ile birleştirildiğinde çizilen doğru parçaları Ox eksenine dik omamaktadır. Problemn genel çözümünün şekli aşağıdadır.