Sinüs ve Kosinüsler Toplam ve Çarpımları

Derleyen
Halit Çelik
Matematik Öğretmeni

Sin ve cos toplamları ile ilgili formüllerin ispatı

Hazırlayan: Halit Çelik
Matematik Öğretmeni

Soru:

$$\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)+\cdots+\sin(nx)=\frac{sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

olduğunu tümevarımla ispatlayınız..

Çözüm:

1. Önermeyi P(n) ile ifade edelim

n=1 için

$$P(1)=sinx=\frac{sinxsin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}=sinx$$

olup P(1) doğrudur.

2. n=k için önermemiz

$$sinx+sin2x+sin3x+\cdots+\sin(kx)=\frac{sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)sin\left(\frac{k}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

doğru olsun. n=k+1 için doğruluğu gösterilirse önermemiz ispatlanmış olur.
P(k) ifadesinin her iki tarafına sin[(k+1)x] ifadesini ekleyelim.

$$sinx+sin2x+sin3x+\cdots+\sin(kx)+\sin[(k+1)x]=\frac{sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)sin\left(\frac{k}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}+\sin[(k+1)x]$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)sin\left(\frac{k}{2}x\right)+sin\left(\frac{x}{2}\right)sin[(k+1)x]}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)sin\left(\frac{k}{2}x\right)+2sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)\left[sin\left(\frac{k}{2}x\right)+2cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k+1}{2}\right)\left[sin\left(\frac{k}{2}x\right)+sin\left(\frac{k+2}{2}x\right)-sin\left(\frac{k}{2}x\right)\right]}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k+2}{2}x\right)sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$olur. Yani\ P(k+1)$ doğrudur. Bu nedenle

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

önermesi doğrudur.

Soru:
Her $n \in N^+$ için

$$cosx + cos2x + cos3x + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin\left[\frac{n}{2}x\right] cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

olduğunu tümevarımla ispatlayınız.

Çözüm:
Önermeyi P(n) ile ifade edelim,

1. n=1 için

$$cosx = \frac{sin\left(\frac{x}{2}\right) cosx}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} = cosx$$

   olur. Yani k=1 için önerme doğrudur.

2. n=k için

$$cosx + cos2x + cos3x + \cdots + \cos(kx) = \frac{\sin\left[\frac{k}{2}x\right] cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

   önermesinin doğru olduğunu kabul edelim ve n=k%1 için doğru olduğunu gösterelim
   Eşitliğin ikinci yanı

$$\frac{\sin\left[\frac{k+1}{2}x\right] cos\left(\frac{k+2}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

   olursa önermenin doğruluğu gösterilmiş olur. Eşitliğin her ili yanına cos[(k+1)x] ekleyelim

$$cosx + cos2x + cos3x + \cdots + \cos(kx) + \cos[(k+1)x] = \frac{\sin\left[\frac{k}{2}x\right] cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \cos[(k+1)x$$

$$= \frac{sin\left(\frac{k}{2}x\right) cos\left(\frac{k+1}{2}x\right) + \cos[(k+1)x]\, sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{sin\left(\frac{k}{2}x\right) cos\left(\frac{k+1}{2}x\right) + \left[1 - 2sin^2\left(\frac{k+1}{2}x\right) - 1\right] sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{sin\left(\frac{k}{2}x\right) cos\left(\frac{k+1}{2}x\right) + sin\left(\frac{x}{2}\right) - sin\left(\frac{k+1}{2}x\right) 2sin\left(\frac{k+1}{2}x\right) sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k}{2}x\right)cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)+sin\left(\frac{x}{2}\right)-sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)\left[cos\left(\frac{k}{2}x\right)-cos\left(\frac{k+2}{2}x\right)\right]}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k}{2}x\right)cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)+sin\left(\frac{x}{2}\right)-cos\left(\frac{k}{2}x\right)sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)+sin\left(\frac{k+1}{2}\right)cos\left(\frac{k+2}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k}{2}x\right)cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)-cos\left(\frac{k}{2}x\right)sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)+sin\left(\frac{x}{2}\right)+sin\left(\frac{k+1}{2}\right)cos\left(\frac{k+2}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k}{2}x\right)cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)-cos\left(\frac{k}{2}x\right)sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)+sin\left(\frac{x}{2}\right)+sin\left(\frac{k+1}{2}\right)cos\left(\frac{k+2}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k}{2}x-\frac{k+1}{2}x\right)+sin\left(\frac{x}{2}\right)+sin\left(\frac{k+1}{2}\right)cos\left(\frac{k+2}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{sin\left(-\frac{x}{2}\right)+sin\left(\frac{x}{2}\right)+sin\left(\frac{k+1}{2}\right)cos\left(\frac{k+2}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k+1}{2}\right)cos\left(\frac{k+2}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

olarak bulunur. Yani P(k+1) doğrudur. Buna göre

$$cosx+cos2x+cos3x+\cdots+\cos(nx)=\frac{\sin\left[\frac{n}{2}x\right]cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

önermesi doğrudur.

Ayrıca

$$1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

eşitliğinde r yerine $z=cosx+isinx$ sayısı kullanılırsa:

$$1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Bilindiği gibi $z^n=\cos(nx)+isin(nx)$ olduğundan

$$1+cosx+isinx+cos2x+isşn2x+cos3x+isin3x+\cdots+cosnx+isin(nx)$$

$$=\frac{1-\cos[(n+1)\,x]-isin[(n+1)x]}{1-cosx-isinx}$$

$$1+cosx+cos2x+cos3x+\cdots+\cos(nx)+i(sinx+sin2x+sin3x+\cdots+\sin(nx))$$

$$=\frac{1-1+2sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)-i2sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{1-1+2sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-i2sin\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{2sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\left[sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)-icos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\right]}{2sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[sin\left(\frac{x}{2}\right)-cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]}$$

pay ve payda $\sin\left(\frac{x}{2}\right)+i\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ ile çarpılırsa

$$=\frac{sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\left[sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)-icos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\right]\left(sin\left(\frac{x}{2}\right)+icos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[sin\left(\frac{x}{2}\right)-cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]\left(sin\left(\frac{x}{2}\right)+icos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$$

ters dönüşüm uygulanır ve sadeleştirilirse

$$=\frac{sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)cos\left(\frac{n}{2}x\right)+isin\left(\frac{n+1}{2}x\right)sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{cos\left(\frac{n}{2}x\right)sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}+i\frac{sin\left(\frac{n}{2}x\right)sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$olur.\text{İ}ki\ karmaşık\ sayının\ eşitlğnden$

$$1+cosx+cos2x+cos3x+\cdots+\cos(nx)=\frac{cos\left(\frac{n}{2}x\right)sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$sinx+sin2x+sin3x+\cdots+\sin(nx)=\frac{sin\left(\frac{n}{2}x\right)sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

ifadeleri elde edilir.

$z^n - 1 = 0$ denkleminin köklerinden faydalanarak sin ve cos çarpımlarının değerlerini bulma

Hazırlayan: Halit Çelik
Adıyaman Anadolu Lisesi
Matematik Öğretmeni

Soru:

$$sin\left(\frac{\pi}{n}\right) sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) \dots sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$z^n = 1$ denklemi $z^n - 1 = 0$ yazılır ve çarpanlara ayrılırsa

$$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^2 + z + 1)$$

şeklinde yazılır. Bu denklemin köklerinden birisi 1 dir. Diğer kökleri

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^2 + z + 1 = 0$$

denkleminin kökleridir. Bu köklerden birincisi;

$$w = cos\frac{2\pi}{n} + isin\frac{2\pi}{n} \ ise$$

$$w_k = cos\left(\frac{k2\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{k2\pi}{n}\right) \ yani \ w_k = w^k$$

olur. Buna göre

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^2 + z + 1 = (z-w)(z-w^2)(z-w^3) \dots (x-w^{n-1})$$

şeklinde yazılabilir. [Zira bilindiği gibi $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1 = 0$ denkleminin kökleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ ise $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + 1 = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$ olarak yazılır]

Yukarıdaki eşitlikte z = 1 alınırsa eşitliğin birinci tarafının toplamı n olur. Yani

$$(1-w)(1-w^2)(1-w^3) \dots (1-w^{n-1}) = n$$

olur. Şimdi $1 - w^k$ yı ve bu sayının uzunluğunu hesaplayalım:

$$1 - w^k = 1 - cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + isin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$1-w^k = 1-\left(1-2sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)+i2sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$1-w^k = 2sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left(sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)+icos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

$$|1-w^k| = \left|2sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|\left|sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)+icos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|$$

olur. Burada

$$\left|sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)+icos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| = \sqrt{\left(sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2+\left(cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2} = 1$$

olduğundan

$$|1-w^k| = 2sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

olur. Bu değerlendirmeye göre:

$$(1-w)(1-w^2)(1-w^3)\dots(1-w^{n-1}) = n$$

eşitliğinin her iki tarafının uzunluğu yazılırsa

$$|1-w||1-w^2||1-w^3|\dots|1-w^{n-1}| = |n|$$

$$2sin\left(\frac{\pi}{n}\right)2sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)2sin\left(\frac{3\pi}{n}\right)\dots 2sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = n$$

$$2^{n-1}sin\left(\frac{\pi}{n}\right)sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)sin\left(\frac{3\pi}{n}\right)\dots sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = n$$

$$sin\left(\frac{\pi}{n}\right)sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)sin\left(\frac{3\pi}{n}\right)\dots sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots(I)$$

olarak bulunur. Bu ifadede

$$sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$sin\left(\frac{(n-2)\pi}{n}\right) = sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$$

$$\sin\left(\frac{(n-m)\pi}{n}\right) = sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)$$

olduğundan n tek sayı ve $m=\frac{n-1}{2}$ alınır ve yukarıdaki değerler (I) ifadesinde yerine yazılırsa

$$sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right) sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) sin^2\left(\frac{3\pi}{n}\right) \dots sin^2\left(\frac{m\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{2m}}$$

olur. Her iki yanın karekökü alınırsa $m=\frac{n-1}{2}$ olmak üzere

$$sin\left(\frac{\pi}{n}\right) sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) \dots sin\left(\frac{m\pi}{n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^m}$$

sonucuna ulaşılır.

1.Sonuç:

$n=2m+1$ olmak üzere $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm:

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right)$$

olsun. Bir önceki sorudan

$$\sqrt{n} = 2^m sin\left(\frac{\pi}{n}\right) sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) \dots sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)$$

dir. Bu iki eşitlik taraf tarafa çarpılırsa:

$$\sqrt{n}A = sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) sin\left(\frac{6\pi}{n}\right) \dots sin\left(\frac{2m\pi}{n}\right)$$

Bu ifadede

$$2m = n-1 \ olduğundan \ sin\left(\frac{2m\pi}{n}\right) = sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) = sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$2m-2 = n-3 \ olduğundan \ sin\left(\frac{(2m-2)\pi}{n}\right) = sin\left(\frac{(n-3)\pi}{n}\right) = sin\left(\frac{3\pi}{n}\right)$$

$$2m-4 = n-5 \ olduğundan \ sin\left(\frac{(2m-4)\pi}{n}\right) = sin\left(\frac{(n-5)\pi}{n}\right) = sin\left(\frac{5\pi}{n}\right)$$

Bu değerler yerine yazılırsa ifademiz.

$$\sqrt{n}A = sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) sin\left(\frac{6\pi}{n}\right) \dots sin\left(\frac{5\pi}{n}\right) sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

yani

$$\sqrt{n}A = sin\left(\frac{\pi}{n}\right) sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) \dots sin\left(\frac{m\pi}{n}\right)$$

$$\sqrt{n}A = \frac{\sqrt{n}}{2^m}\ ve$$

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right) = \frac{1}{2^m}\ olarak\ bulunur.$$

2.Sonuç:

$n = 2m+1$ olmak üzere $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cdots\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm:

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right) = \frac{1}{2^m}$$

olduğunu biliyoruz. Soruda verilen ifadede

$$cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = cos\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\cos\left(\frac{(n-2)\pi}{n}\right) = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$\cos\left(\frac{(n-3)\pi}{n}\right) = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{n}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{n}\right)$$

… … … … … … ….

$$\cos\left(\frac{(n-m)\pi}{n}\right) = \cos\left(\pi - \frac{m\pi}{n}\right) = -\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right)$$

olduğundan verilen ifade

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cdots\cos\left(\frac{3\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

olarak yazılır. Verilen bilgiye göre m çift bir sayı olduğundan ifadenin işareti pozitif olur. Dikkat edilirse

$$B=\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right)}_{A}\underbrace{\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right)\cdots\cos\left(\frac{3\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}_{A}=A^2$$

Yani:

$$B=\left(\frac{1}{2^m}\right)^2=\frac{1}{2^{2m}}$$

olarak bulunur.