Sin ve cos toplamları ile ilgili formüllerin ispatı

Hazırlayan: Halit Çelik
Matematik Öğretmeni

Soru:

$$\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)+\cdots+\sin(nx)=\frac{sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

olduğunu tümevarımla ispatlayınız..

Çözüm:

1. Önermeyi P(n) ile ifade edelim

n=1 için

$$P(1)=sinx=\frac{sinxsin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}=sinx$$

olup P(1) doğrudur.

2. n=k için önermemiz

$$sinx+sin2x+sin3x+\cdots+\sin(kx)=\frac{sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)sin\left(\frac{k}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

doğru olsun. n=k+1 için doğruluğu gösterilirse önermemiz ispatlanmış olur.

P(k) ifadesinin her iki tarafına sin[(k+1)x] ifadesini ekleyelim.

$$sinx+sin2x+sin3x+\cdots+\sin(kx)+\sin[(k+1)x]=\frac{sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)sin\left(\frac{k}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}+\sin[(k+1)x]$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)sin\left(\frac{k}{2}x\right)+sin\left(\frac{x}{2}\right)sin[(k+1)x]}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)sin\left(\frac{k}{2}x\right)+2sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)\left[sin\left(\frac{k}{2}x\right)+2cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k+1}{2}\right)\left[sin\left(\frac{k}{2}x\right)+sin\left(\frac{k+2}{2}x\right)-sin\left(\frac{k}{2}x\right)\right]}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k+2}{2}x\right)sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$olur.Yani\ P(k+1)$ doğrudur. Bu nedenle

$$\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)+\cdots+\sin(nx)=\frac{sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

önermesi doğrudur.

Soru:

Her n∈N^+ için

$$cosx+cos2x+cos3x+\cdots+\cos(nx)=\frac{\sin\left[\frac{n}{2}x\right]cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

olduğunu tümevarımla ispatlayınız.

Çözüm:

Önermeyi P(n) ile ifade edelim,

1. n=1 için

$$cosx=\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)cosx}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}=cosx$$

   olur. Yani k=1 için önerme doğrudur.

2. n=k için

$$cosx+cos2x+cos3x+\cdots+\cos(kx)=\frac{\sin\left[\frac{k}{2}x\right]cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

   önermesinin doğru olduğunu kabul edelim ve n=k%1 için doğru olduğunu gösterelim
   Eşitliğin ikinci yanı

$$\frac{\sin\left[\frac{k+1}{2}x\right]cos\left(\frac{k+2}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

   olursa önermenin doğruluğu gösterilmiş olur. Eşitliğin her ili yanına cos[(k+1)x] ekleyelim

$$cosx+cos2x+cos3x+\cdots+\cos(kx)+\cos[(k+1)x]=\frac{\sin\left[\frac{k}{2}x\right]cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}+\cos[(k+1)x$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k}{2}x\right)cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)+\cos[(k+1)x]\,sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k}{2}x\right)cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)+\left[1-2sin^2\left(\frac{k+1}{2}x\right)-1\right]sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{sin\left(\frac{k}{2}x\right)cos\left(\frac{k+1}{2}x\right)+sin\left(\frac{x}{2}\right)-sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)2sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=$$

$$= \frac{sin\left(\frac{k}{2}x\right)cos\left(\frac{k+1}{2}x\right) + sin\left(\frac{x}{2}\right) - sin\left(\frac{k+1}{2}x\right)\left[cos\left(\frac{k}{2}x\right) - cos\left(\frac{k+2}{2}x\right)\right]}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{sin\left(\frac{k}{2}x\right)cos\left(\frac{k+1}{2}x\right) + sin\left(\frac{x}{2}\right) - cos\left(\frac{k}{2}x\right)sin\left(\frac{k+1}{2}x\right) + sin\left(\frac{k+1}{2}\right)cos\left(\frac{k+2}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{sin\left(\frac{k}{2}x\right)cos\left(\frac{k+1}{2}x\right) - cos\left(\frac{k}{2}x\right)sin\left(\frac{k+1}{2}x\right) + sin\left(\frac{x}{2}\right) + sin\left(\frac{k+1}{2}\right)cos\left(\frac{k+2}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{sin\left(\frac{k}{2}x\right)cos\left(\frac{k+1}{2}x\right) - cos\left(\frac{k}{2}x\right)sin\left(\frac{k+1}{2}x\right) + sin\left(\frac{x}{2}\right) + sin\left(\frac{k+1}{2}\right)cos\left(\frac{k+2}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{sin\left(\frac{k}{2}x - \frac{k+1}{2}x\right) + sin\left(\frac{x}{2}\right) + sin\left(\frac{k+1}{2}\right)cos\left(\frac{k+2}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{sin\left(-\frac{x}{2}\right) + sin\left(\frac{x}{2}\right) + sin\left(\frac{k+1}{2}\right)cos\left(\frac{k+2}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{sin\left(\frac{k+1}{2}\right)cos\left(\frac{k+2}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

olarak bulunur. Yani P(k+1) doğrudur. Buna göre

$$cosx + cos2x + cos3x + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin\left[\frac{n}{2}x\right]cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

önermesi doğrudur.

Ayrıca

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

eşitliğinde r yerine $z = cosx + isinx$ sayısı kullanılırsa :

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Bilindiği gibi $z^n = \cos(nx) + isin(nx)$ olduğundan

$$1 + cosx + isinx + cos2x + isşn2x + cos3x + isin3x + \cdots + cosnx + isin(nx)$$
$$= \frac{1 - \cos[(n+1)\,x] - isin[(n+1)x]}{1 - cosx - isinx}$$

$$1 + cosx + cos2x + cos3x + \cdots + \cos(nx) + i(sinx + sin2x + sin3x + \cdots + \sin(nx))$$
$$= \frac{1 - 1 + 2sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right) - i2sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{1 - 1 + 2sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - i2sin\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$
$$= \frac{2sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\left[sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) - icos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\right]}{2sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[sin\left(\frac{x}{2}\right) - cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]}$$

pay ve payda $\sin\left(\frac{x}{2}\right) + i\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ ile çarpılırsa

$$= \frac{sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)\left[sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) - icos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\right]\left(sin\left(\frac{x}{2}\right) + icos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[sin\left(\frac{x}{2}\right) - cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]\left(sin\left(\frac{x}{2}\right) + icos\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$$

ters dönüşüm uygulanır ve sadeleştirilirse

$$= \frac{sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)cos\left(\frac{n}{2}x\right) + isin\left(\frac{n+1}{2}x\right)sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{cos\left(\frac{n}{2}x\right)sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} + i\,\frac{sin\left(\frac{n}{2}x\right)sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$olur.\text{İ}ki\ karmaşık\ sayının\ eşitlğnden$

$$1 + cosx + cos2x + cos3x + \cdots + \cos(nx) = \frac{cos\left(\frac{n}{2}x\right)sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$sinx + sin2x + sin3x + \cdots + \sin(nx) = \frac{sin\left(\frac{n}{2}x\right)sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

ifadeleri elde edilir.