Örnek Problem – 1

Özdeş 5 matematik kitabı gruplanarak özdeş 5 kutuya dağıtılacaktır.

Olası farklı gruplamalar ayrı kağıtlara yazılacak, rastgele çekilen bir kağıttaki gruplama kutulara dağıtılacaktır.

Buna göre; kutulardan yalnız ikisinin boş kalması olasılığı kaçtır?

Çözüm

5 kitap; 5, $4-1$, $3-2$, $2-2-1$, $3-1-1$, $2-1-1-1$, $1-1-1-1-1$ olarak 7 farklı biçimde gruplanabilir.

$2-2-1$ ve $3-1-1$ gruplarının kutulara dağıtılması isteneni sağlar.

Bu gruplamalar eş olumlu olduğuna göre; istenen olasılık, $\frac{2}{7}$'dir.

Örnek Problem – 2

Özdeş 5 matematik kitabı gruplanarak özdeş 5 kutuya dağıtılacaktır.

Eldeki 5 kitap birer birer masaya konularak gruplama yapılacaktır.

İlk kitap masaya konulduktan sonra, ikinci kitap eş olasılıkla ilkinin yanına ya da ayrı bir yere konulacaktır. Üçüncü kitap; ilk ikisi birlikte ise eş olasılıkla onların yanına ya da ayrı bir yere konulacaktır. İlk ikisi ayrı yerlerde ise üçüncü kitap eş olasılıkla ya onlardan birinin yanına ya da ayrı bir yere konulacaktır. Gruplama bu biçimde sürdürülecektir.

Örneğin; $2-1-1$ biçiminde bir gruplama varsa, beşinci kitap $1/3$ olasılıkla ikilinin yanına, $1/3$ olasılıkla birlilerden birinin yanına, $1/3$ olasılıkla ayrı bir yere konulacaktır.

Buna göre; kutulardan yalnız ikisinin boş kalması olasılığı kaçtır?

Çözüm

5 kitap; 5, $4-1$, $3-2$, $2-2-1$, $3-1-1$, $2-1-1-1$, $1-1-1-1-1$ olarak 7 farklı biçimde gruplanabilir.

$2-2-1$ ve $3-1-1$ gruplarının kutulara dağıtılması isteneni sağlar.

$3-1-1$ gruplamasının olasılığını bulalım.

$3-1-1$ gruplamasına şu aşamalarla gelinebilir:

$1 \to 2 \to 3 \to 3-1 \to 3-1-1;$

$1 \to 2 \to 2-1 \to 2-1-1 \to 3-1-1;$

$1 \to 2 \to 2-1 \to 3-1 \to 3-1-1;$

$1 \to 1-1 \to 2-1 \to 2-1-1 \to 3-1-1;$

$1 \to 1-1 \to 2-1 \to 3-1 \to 3-1-1;$

$1 \to 1-1 \to 1-1-1 \to 2-1-1 \to 3-1-1$

$1 \to 2 \to 3 \to 3-1 \to 3-1-1$

yolunun olasılığı $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$'tür.

$1 \to 2 \to 2-1 \to 2-1-1 \to 3-1-1$

yolunun olasılığı $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{36}$'dır.

$1 \to 2 \to 2-1 \to 3-1 \to 3-1-1$

yolunun olasılığı $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{36}$'dır.

$1 \to 1-1 \to 2-1 \to 2-1-1 \to 3-1-1$

yolunun olasılığı $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{36}$'dır.

$1 \to 1-1 \to 2-1 \to 3-1 \to 3-1-1$

yolunun olasılığı $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{36}$'dır.

$1 \to 1-1 \to 1-1-1 \to 2-1-1 \to 3-1-1$

yolunun olasılığı $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$'tür.

Buna göre; açıklanan yöntemle gruplama deneyinin $3-1-1$ çıktısının gerçekleşmesi olasılığı, $2\cdot\frac{1}{24}+4\cdot\frac{1}{36}=\frac{14}{72}$ bulunur.

$\{2\text{–}2\text{–}1\}$ olayının olasılığı da aynı yöntemle $\frac{13}{72}$ bulunur.

Görüldüğü gibi; belirtilen yöntemle gruplama deneyinin örneklem uzayı,

$$E = \{5,\ 4-1,\ 3-2,\ 3-1-1,\ 2-2-1,\ 2-1-1-1,\ 1-1-1-1-1\}$$

eş olumlu değildir.

$\{3\text{–}1\text{–}1,\ 2\text{–}2\text{–}1\}$ olayının olasılığı $\frac{14}{72}+\frac{13}{72}=\frac{3}{8}$ olur.

Örnek Problem – 3

Özdeş 5 matematik kitabı özdeş 5 kutuya dağıtılacaktır.

Dağıtım şöyle yapılacaktır:

Kutulardan biri rastgele çekilecek içine rastgele bir kitap konulup kapatılacak ve kutular karıştırılacaktır. Diğer kitapların dağıtımı da bu yöntemle tamamlanacaktır.

Buna göre; kutulardan yalnız ikisinin boş kalması olasılığı kaçtır?

Çözüm

Kitapların ve kutuların görünüşleri aynı olsa da özünde farklı nesnelerdir. Kitapları a, b, c, d, e; kutuları A, B, C, D, E diye işaretlesek de hangi kitabın A kutusuna atıldığı önemli değildir. Önemli olan; kutulara dağıtımın, kitap sayısı olarak nasıl gerçekleşeceğidir.

Buna göre; kitapların her biri için – özdeş de denilse – en azından konumları farklı 5 kutu seçeneği vardır. 5 kitap için seçenek sayısı 5^5 olacaktır.

5 özdeş kitabın A, B, C, D, E kutularına her değişik dağıtımı eş olumlu olduğu için; belirtilen koşulu sağlayan $2-2-1$ ve $3-1-1$ şeklindeki değişik dağıtımlarının toplam sayısının toplam dağıtım sayısına oranı istenen olasılığı verir.

$3-1-1$ dağıtımı AAABC, DDECD,… gibi; 3 farklı kutunun farklı sıralamalarından oluşabilir:

Farklı 3 kutu $C(5,3)$ değişik biçimde seçilebilir.

Bu 3 kutudan biri $C(3,1)$ değişik biçimde seçilip içine 3 kitap, diğerlerine birer kitap konulabilir. Değişik dağıtım sıralamalarının sayısı da, götürdüğü dağıtımın olasılığını etkileyecektir.

Örneğin; AAABC dağıtımı ile ulaşılan $3-1-1$ dağıtımına AABAC, ABCAA, … gibi $5!/3!$ farklı yollarla ulaşılabilir.

Bu yöntemle $3-1-1$ dağıtımına varan dağıtım yollarının sayısı,

$C(5,3)\cdot C(3,1)\cdot 5!/3! = 600$ olur.

Aynı yöntemle, $2-2-1$ dağıtımına götüren dağıtım yollarının sayısı,

$C(5,3)\cdot C(3,1)\cdot 5!/(2!\cdot 2!) = 900$ bulunur.

Buna göre; istenen $2-2-1$ ve $3-1-1$ dağıtımlarının olasılığı,

$P = \frac{600}{5^5}+\frac{900}{5^5}=\frac{12}{25}$ olur.

▼ $2-2-1$ dağıtımları ABCBA, DBCDC,… gibi değişik sıralı dağıtımların sonucudur. Böyle 900 değişik sıralama ile $2-2-1$ sonucuna ulaşılır.

$3-1-1$ dağıtımları ABCAA, DBDED,… gibi değişik sıralı dağıtımların sonucudur. Böyle 600 değişik sıralama ile $3-1-1$ sonucuna ulaşılır.

Bu sayılar bize, kutuları adlandırmasak bile, $2-2-1$ dağıtımına ulaşma olasılığının $3-1-1$ dağıtımına ulaşma olasılığından büyük olduğunu gösterir.

$2-2-1$ dağıtımına ulaşma olasılığı $36/125$,

$3-1-1$ dağıtımına ulaşma olasılığı $24/125$'tir.

Özdeş nesnelerin dağıtımı problemlerinde bu dağıtımların eş olumlu olduğu verilmeden bu dağıtımları eş olumlu saymak yanlıştır!

Olasılıkta özdeş nesne yoktur!

Örnek Problem – 4

5 özdeş matematik kitabı birbirinden farklı 5 kutuya rastgele dağıtılacaktır.

Olası dağıtım sonuçları eş olumlu olduğuna göre; kutulardan yalnız ikisinin boş kalması olasılığı kaçtır?

Çözüm

Kutuları A, B, C, D, E diye adlandıralım.

Rastgele dağıtım sonunda kutulara k, m, n, p, r tane kitap konulmuş olsun.

$k+m+n+p+r=5$ denkleminin doğal sayılar kümesindeki çözüm sayısı, rastgele dağıtımların sayısını verecektir.

$1\,1\,1\,1\,1\,a\,a\,a\,a \;\rightarrow\; \dfrac{9!}{5!\cdot 4!}=126$.

Rastgele dağıtımların toplam sayısı 126 olur.

$x+y+z=5$ denkleminin sayma sayıları kümesindeki çözüm sayısı da, 5 kutudan rastgele seçilecek 3 kutudaki değişik kitap sayılarını verecektir. (Neden?)

İstenen bu sayıdır.

$1-1-1-1-1 \;\rightarrow\; C(4,2)=6$

İstenen dağıtımların sayısı,

$C(5,3)\cdot C(4,2)=60$ olur.

İstenen olasılık, $P=\dfrac{60}{126}=\dfrac{10}{21}$ bulunur.

▼ Dağıtım sonuçları eş olumlu sayıldığında, kutuların özdeş olduğu durumda da çözüm aynı olacaktır.

Örnek Problem – 5

Özdeş 2 kırmızı ve özdeş 2 siyah kalem özdeş 2 kutuya, birer birer rastgele çekilip rastgele dağıtılacaktır.

Dağıtım sonunda,

a. tüm kalemlerin aynı kutuya atılmış olması olasılığı kaçtır?

b. kırmızı kalemlerin kutulardan birine, siyah kalemlerin diğerine atılmış olması olasılığı kaçtır?

c. her kutuya bir kırmızı, bir siyah kalemin atılmış olması olasılığı kaçtır?

d. kutuların birine 3 kalem, diğerine 1 kalem atılmış olması olasılığı kaçtır?

Çözüm

a. 1. yol

"Olasılıkta özdeş nesne yoktur." ilkesine göre; kalemleri K_1, K_2, S_1, S_2 ve kutuları A, B diye adlandıralım.

Kalemler $4!$ değişik sıralama ile seçilebilirler. Her kalem için 2 kutu seçeneği olduğundan tüm dağıtım seçeneklerinin sayısı $4!\cdot 2^4=384$ olur.

Kalemler ve kutular birer birer rastgele seçildiği için 384 dağıtım seçeneği eş olumludur.

Kalemler $4!$ değişik sıralama ile A kutusuna, $4!$ değişik sıralama ile B kutusuna girebilir.

Buna göre; istenen olasılık, $P_a=\dfrac{4!+4!}{4!\cdot 2^4}=\dfrac{1}{8}$'dir.

2. yol

Kırmızı kalemleri K ile, siyah kalemleri S ile, kutuları A ve B ile gösterelim.

K,K,S,S kalemlerinin değişik seçim sıralamaları sayısı $\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ olur. Her kalem için 2 değişik kutu seçeneği olduğundan her sıralamaya 2^4 değişik dağıtım karşılık gelir. Buna göre; olası dağıtım sıralamalarının sayısı $6\cdot 2^4=96$ olur.

Kalemlerin çekilişleri ve kutulara konulmaları birer birer rastgele yapılacağı için her değişik dağıtım sıralaması eş olumlu olacaktır.

Şimdi; tüm kalemlerin A kutusuna konulduğu seçme ve dağıtım sıralamalarını yazalım:

Oklarla ayrılmış aralıklarda sol yan A kutusuna, sağ yan B kutusuna aittir.

1. $K-0 \rightarrow KK-0 \rightarrow KKS-0 \rightarrow KKSS-0$

2. $K-0 \rightarrow KS-0 \rightarrow KSK-0 \rightarrow KSKS-0$

3. $K-0 \rightarrow KS-0 \rightarrow KSS-0 \rightarrow KSSK-0$

4. $S-0 \rightarrow SK-0 \rightarrow SKK-0 \rightarrow SKKS-0$

5. $S-0 \rightarrow SS-0 \rightarrow SSK-0 \rightarrow SSKK-0$

6. $S-0 \rightarrow SK-0 \rightarrow SKS-0 \rightarrow SKSK-0$

Kalemlerin A kutusuna konulduğu sıralamaların sayısı 6 bulundu; B kutusuna konulduğu sıralama sayısı da 6 olacaktır.

Buna göre; tüm kalemlerin aynı kutuya konulmuş olması olasılığı, $\frac{6+6}{96}=\frac{1}{8}$ bulunur.

▼ "Olasılıkta özdeş nesne yoktur." ilkesi ile başladığımızda kalemleri K_1, K_2, S_1, S_2 diye adlandırmıştık. Ancak; burada K, K, S, S diye göstermemiz sonucu etkilemedi. Çünkü; hangi kırmızının belli bir kutuya girdiği önemli değildir. Önemli olan, kutulardaki kırmızı ve siyah kalemlerin sayılarıdır.

b. 1. yol

A kutusundaki kalemler K_1, K_2 ve B'deki kalemler S_1, S_2 olsun.

Tüm dağıtım sıralamalarının sayısı $4!\cdot 2^4$ 'tür.

A ve B kutularındaki $K_1K_2-S_1S_2$ değişik sıralı dağıtımlarının sayısını bulacağız.

4 değişik kalem $4!$ sıra ile çekilir. Her çekilen kalem için 2 seçenek vardır. Ancak; bizim istediğimiz seçenekler kırmızıların A kutusuna, siyahların B kutusuna girdiği birer seçenektir. Çektiğimiz her kalemi koyacağımız kutu bellidir. O halde; $4!$ seçenek için gerçekleşecek her dağıtım bizim istediğimizdir. Kırmızıların B kutusunda, siyahların A kutusunda olduğu sıralama sayısı da $4!$ olacaktır.

Buna göre; istenen olasılık, $P_b=\frac{4!+4!}{4!\cdot 2^4}=\frac{1}{8}$'dir.

2. yol

Kırmızı kalemleri K ile, siyah kalemleri S ile, kutuları A ve B ile gösterelim.

K,K,S,S kalemlerinin değişik seçim sıralamaları sayısı $\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ olur. Her kalem için 2 değişik kutu seçeneği olduğundan her sıralamaya 2^4 değişik dağıtım karşılık gelir.

Buna göre; olası dağıtım sıralamalarının sayısı $6\cdot 2^4=96$ olur.

Kalemlerin çekilişleri ve kutulara konulmaları birer birer rastgele yapılacağı için her değişik dağıtım sıralaması eş olumlu olacaktır.

Şimdi; aynı renkli kalemlerin aynı kutuya konulduğu seçme ve dağıtım sıralamalarını yazalım:

Oklarla ayrılmış aralıklarda sol yan A kutusuna, sağ yan B kutusuna aittir.

A ve B kutularındaki KK, SS dağıtımları şu sıralamalarla gerçekleşebilir:

1. $K-0 \rightarrow KK-0 \rightarrow KK-S \rightarrow KK-SS$

2. $K-0 \rightarrow K-S \rightarrow KK-S \rightarrow KK-SS$

3. $K-0 \rightarrow K-S \rightarrow K-SS \rightarrow KK-SS$

4. $0-S \rightarrow 0-SS \rightarrow K-SS \rightarrow KK-SS$

5. $0-S \rightarrow K-S \rightarrow KK-S \rightarrow KK-SS$

6. $0-S \rightarrow K-S \rightarrow K-SS \rightarrow KK-SS$

A kutusunda kırmızı kalemlerin, B kutusunda siyah kalemlerin bulunduğu dağıtım sıralaması sayısı 6'dır. A kutusunda siyah ve B'de kırmızı kalemlerin bulunduğu dağıtım sıralaması sayısı da 6 olur.

Buna göre; aynı renkli kalemlerin aynı kutuya konulmuş olması olasılığı, $\frac{6+6}{96}=\frac{1}{8}$ bulunur.

c. 1. yol

A kutusundaki kalemler K_1, S_1 ve B'deki kalemler K_2, S_2 olsun.

Tüm dağıtım seçeneklerinin sayısı $4!\cdot 2^4$ 'tür.

A ve B kutularındaki $K_1S_1-K_2S_2$ değişik sıralı dağıtımların sayısını bulacağız.

4 değişik kalem $4!$ sıra ile çekilir. 2 kırmızının birinin A kutusuna, birinin B kutusuna; 2 siyahın birinin A kutusuna birinin B kutusuna girdiği durumların sayısı $C(2,1)\cdot C(2,1)\cdot 4!$ olur.

Buna göre; istenen olasılık, $P_c=\frac{2\cdot 2\cdot 4!}{4!\cdot 2^4}=\frac{1}{4}$'tür.

2. yol

Kırmızı kalemleri K ile, siyah kalemleri S ile, kutuları A ve B ile gösterelim.

K,K,S,S kalemlerinin değişik seçim sıralamaları sayısı $\frac{4!}{2!.2!}=6$ olur. Her kalem için 2 değişik kutu seçeneği olduğundan her sıralamaya 2^4 değişik dağıtım karşılık gelir.

Buna göre; olası dağıtım sıralamalarının sayısı $6\cdot 2^4=96$ olur.

Kalemlerin çekilişleri ve kutulara konulmaları birer birer rastgele yapılacağı için her değişik dağıtım sıralaması eş olumlu olacaktır.

Şimdi; her kutuya bir kırmızı, bir siyah kalemin konulduğu seçme ve dağıtım sıralamalarını yazalım:

Oklarla ayrılmış aralıklarda sol yan A kutusuna, sağ yan B kutusuna aittir.

A ve B kutularındaki KS, KS dağıtımları şu sıralamalarla gerçekleşebilir:

1. $K-0 \rightarrow KS-0 \rightarrow KS-K \rightarrow KS-KS$
2. $K-0 \rightarrow KS-0 \rightarrow KS-S \rightarrow KS-KS$
3. $K-0 \rightarrow K-K \rightarrow KS-K \rightarrow KS-KS$
4. $K-0 \rightarrow K-K \rightarrow K-KS \rightarrow KS-KS$
5. $K-0 \rightarrow K-S \rightarrow KS-S \rightarrow KS-KS$
6. $K-0 \rightarrow K-S \rightarrow K-KS \rightarrow KS-KS$

Bu 6 dağıtımda ilk çekilen kırmızı kalemdir ve A kutusuna atılmıştır. 6 dağıtımda da ilk çekilen kırmızı kalem olup B kutusuna atılır.

12 dağıtımda da ilk çekilen siyah kalem olabilir.

24 değişik dağıtımla istenene ulaşılabilir.

Buna göre; her kutuda 1 kırmızı, 1 siyah kalem bulunması olasılığı, $\frac{24}{96}=\frac{1}{4}$'tür.

d. 1. yol

A kutusundaki kalemler K_1, K_2, S_1 ve B'deki kalem S_2 olsun.

Tüm dağıtım seçeneklerinin sayısı $4!.2^4$'tür.

A ve B kutularındaki $K_1K_2S_1-S_2$ değişik sıralı dağıtımlarının sayısını bulacağız.

4 değişik kalem $4!$ sıra ile çekilir. 2 kırmızının ikisinin de A kutusuna; 2 siyahın birinin A kutusuna birinin B kutusuna girdiği durumların sayısı $C(2,2)\cdot C(2,1)\cdot 4!$ olur. 2 kırmızının ikisinin de B kutusuna; 2 siyahın birinin A kutusuna birinin B kutusuna girdiği durumların sayısı da $C(2,2)\cdot C(2,1)\cdot 4!$ olur.

2 kırmızı ile 1 siyahın aynı kutuda olduğu durum sayısı $4\cdot 4!$ olur.

$K_1S_1S_2-K_2$ dağıtımları da aynı sayıda olur.

Buna göre; istenen olasılık, $P_d=\frac{8\cdot 4!}{4!.2^4}=\frac{1}{2}$'dir.

2. yol

Kırmızı kalemleri K ile, siyah kalemleri S ile, kutuları A ve B ile gösterelim.

K,K,S,S kalemlerinin değişik seçim sıralamaları sayısı $\frac{4!}{2!.2!}=6$ olur. Her kalem için 2 değişik kutu seçeneği olduğundan her sıralamaya 2^4 değişik dağıtım karşılık gelir.

Buna göre; olası dağıtım sıralamalarının sayısı $6\cdot 2^4=96$ olur.

Kalemlerin çekilişleri ve kutulara konulmaları birer birer rastgele yapılacağı için her değişik dağıtım sıralaması eş olumlu olacaktır.

Kutuların birine 3, birine 1 kalemin konulduğu seçme ve dağıtım sıralamalarını yazalım:

Oklarla ayrılmış aralıklarda sol yan A kutusuna, sağ yan B kutusuna aittir.

A ve B kutularındaki KKS, S dağıtımları şu sıralamalarla gerçekleşebilir:

1. $K-0 \rightarrow KK-0 \rightarrow KKS-0 \rightarrow KKS-S$
2. $K-0 \rightarrow KK-0 \rightarrow KK-S \rightarrow KKS-S$
3. $K-0 \rightarrow KS-0 \rightarrow KKS-0 \rightarrow KKS-S$
4. $K-0 \rightarrow KS-0 \rightarrow KS-S \rightarrow KKS-S$
5. $K-0 \rightarrow K-S \rightarrow KK-S \rightarrow KKS-S$
6. $K-0 \rightarrow K-S \rightarrow KS-S \rightarrow KKS-S$

Bu 6 dağıtımda ilk çekilen kırmızı kalemdir ve A kutusuna atılmıştır. 6 dağıtımda da ilk çekilen siyah kalem olup B kutusuna atılır.

12 dağıtımda da A'ya atılan kalem siyah olabilir.

$KKS-S$ sonucuna 24 değişik sıralama ile ulaşılabilir.

24 değişik sıralama da $KSS-K$ sonucu için yapılır.

Buna göre; istenen olasılık, $\frac{48}{96}=\frac{1}{2}$'dir.

▼ Birer birer rastgele seçme ve rastgele sıralama ile ulaşılacak bir sonucun olasılığının $1/96$ olduğunu

4. $K-0 \rightarrow KS-0 \rightarrow KS-S \rightarrow KKS-S$

seçme ve sıralaması üzerinde gösterelim:

$$P(4)=\left(\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{96}$$

Açıklayalım: 4 kalem içinden 1 kırmızı $2/4$ olasılıkla seçilir, $1/2$ olasılıkla A kutusuna atılır; kalan 3 kalem içinden 1 siyah $2/3$ olasılıkla seçilir, $1/2$ olasılıkla A kutusuna atılır; kalan 2 kalem içinden 1 siyah $1/2$ olasılıkla seçilir, $1/2$ olasılıkla B kutusuna atılır; kalan 1 kırmızı $1/2$ olasılıkla A kutusuna atılır.

▼ Siz de istediğiniz, rastgele birer birer seçme ve rastgele sıralama ile ulaşılacak bir sonucun olasılığının $1/96$ olduğunu bulunuz.

Örnek Problem – 6 (Halil Yiğit)

Özdeş 4 kırmızı ve özdeş 4 siyah kalem özdeş 2 kutuya rastgele dağıtılacaktır?

Olası dağıtım sonuçları eş olumlu olduğuna göre; kutuların ikisinde de her iki renkten en az bir kalemin bulunması olasılığı kaçtır?

Çözüm

Kırmızı kalemler kutuların birine 0, 1, 2, 3, 4 tane olmak üzere 5 değişik sayıda konulabilir. Siyah kalemler de bu kutuya 5 değişik sayıda konulabilir.

Bu kutuya konulmayanlar diğer kutuya konulacaklardır.

Dağıtım sonunda $5\cdot 5=25$ değişik sonuç beklenebilir. Ancak; $KKSS-KKSS$ dağıtımı dışındaki 24 dağıtımın 12 tanesi kalan 12 dağıtımın simetriğidir.

$KSS-SSKKK$ ile $SSKKK-KSS$ gibi.

Buna göre; $1+24/2=13$ değişik dağıtım olasıdır.

İstenen ayırımlar $KS-KKKSSS$, $KKS-KKSSS$, $KKKS-KSSS$, $KKSS-KKSS$, $KSS-KKKSS$ olmak üzere 5 tanedir.

Buna göre; kutuların ikisinde de her iki renkten en az bir kalemin bulunması olasılığı $5/13$'tür.

Örnek Problem – 7

Özdeş 4 kırmızı kalem ve özdeş 4 siyah kalem birer birer rastgele çekilip özdeş 2 kutuya rastgele dağıtılacaktır?

Dağıtım sonunda, kutuların ikisinde de her iki renkten en az bir kalemin bulunması olasılığı kaçtır?

Çözüm

Kırmızı kalemler K_1, K_2, K_3, K_4; siyah kalemler S_1, S_2, S_3, S_4; kutular A, B olsun.

Kalemler $8!$ değişik sıralama ile seçilebilirler.

Her kalem için 2 kutu seçeneği olduğundan tüm dağıtım seçeneklerinin sayısı $8!\cdot 2^8$ olur.

Kalemler ve kutular birer birer rastgele seçildiği için $8!\cdot 2^8$ sıralı dağıtım seçeneği eş olumludur.

İstenen sıralı dağıtımların sayılarını bulacağız.

1. $K_1S_1-K_2K_3K_4S_2S_3S_4 \rightarrow C(4,1)\cdot C(4,1)\cdot 2$

Bu dağıtımda A kutusuna 4 kırmızının 1'inin ve 4 mavinin birinin gireceği; diğerlerinin B kutusunda olacağı anlatılmıştır.

Bu ayırım $C(4,1)\cdot C(4,1)=16$ değişik yolla gerçekleşir. 1 kırmızı ve 1 mavi kalemin B kutusuna gireceği dağıtım sırası sayısı da 16 olur. Bu tür dağıtım sırası sayısı 32 bulunur.

Bu sonucu açıklayalım:

$K_1S_1 - K_2K_3K_4S_2S_3S_4$ sıralaması, bulduğumuz 32 sıralamadan biridir. Bu sıralama $8!$ çekim ile gerçekleşir. 32 dağıtım sırası da $32 \cdot 8!$ çekim ile gerçekleşir.

Diğer dağıtım sıralarının sayılarını da bulalım:

2. $K_1K_2S_1 - K_3K_4S_2S_3S_4 \rightarrow C(4,2) \cdot C(4,1) \cdot 2;$

3. $K_1S_1S_2 - K_2K_3K_4S_3S_4 \rightarrow C(4,1) \cdot C(4,2) \cdot 2;$

4. $K_1K_2K_3S_1 - K_4S_2S_3S_4 \rightarrow C(4,3) \cdot C(4,1) \cdot 2;$

5. $K_1K_2S_1S_2 - K_3K_4S_3S_4 \rightarrow C(4,2) \cdot C(4,2)$

İstenen dağıtım sıralarının sayıları toplamı 196 bulunur.

Dağıtım sıralarının her biri için $8!$ çekim sırası olacağına göre; istenen sıralı dağıtım seçeneği sayısı $196 \cdot 8!$ olur.

Buna göre; dağıtım sonunda, kutuların ikisinde de her iki renkten en az bir kalemin bulunması olasılığı, $P = \frac{196 \cdot 8!}{8! \cdot 2^8} = \frac{49}{64}$ bulunur.

Siz Çözünüz

1. Özdeş 3 kalem özdeş 3 kutuya rastgele dağıtılacaktır.

Olası dağıtımlar eş olumlu olduğuna göre; yalnız bir kutunun boş kalması olasılığını bulunuz.

2. Özdeş 4 kalem özdeş 4 kutuya rastgele dağıtılacaktır.

Olası dağıtımlar eş olumlu olduğuna göre; yalnız bir kutunun boş kalması olasılığını bulunuz.

3. Özdeş 3 kalem özdeş 3 kutuya birer birer rastgele dağıtılacaktır.

a. Olası değişik dağıtımların sayısını bulunuz.

b. Yalnız bir kutunun boş kalması olasılığını bulunuz.

4. Özdeş 4 kalem özdeş 4 kutuya birer birer rastgele dağıtılacaktır.

a. Olası değişik dağıtımların sayısını bulunuz.

b. Yalnız bir kutunun boş kalması olasılığını bulunuz.

c. Yalnız 2 kutunun boş kalması olasılığını bulunuz.

5. Bir torbada özdeş 4 kırmızı ve özdeş 4 siyah kalem vardır.

a. Torbadan rastgele 3 kalem çekilip özdeş 2 kutudan birine, kalanlar diğerine konuluyor.

Her iki kutuda da iki renkten en az bir kalemin bulunması olasılığını bulunuz.

b. Torbadan rastgele 3 kalem çekilip özdeş 2 kutudan birine, kalanlar diğerine konuluyor.

Her iki kutuda da iki renkten en az bir kalemin bulunması olasılığını bulunuz.

6. Bir torbada özdeş 4 kırmızı ve özdeş 4 siyah kalem vardır.

Torbadan rastgele çekilen bir miktar kalem özdeş 2 kutudan birine, kalanlar diğerine konuluyor.

Her iki kutuda da iki renkten en az bir kalemin bulunması olasılığını bulunuz.

7. Aynı 2 matematik ve aynı 3 fizik kitabı bir rafa rastgele dizilecektir.

3 fizik kitabının yan yana gelmeleri olasılığını bulunuz.

8. Özdeş 2 mavi ve özdeş 3 kırmızı koltuk bir yuvarlak masa etrafına rastgele dizilecektir.

3 kırmızı koltuğun yan yana gelmeleri olasılığını bulunuz.

9. Özdeş 2 mavi ve özdeş 4 kırmızı koltuk bir yuvarlak masa etrafına rastgele dizilecektir.

Elde edilecek değişik sıralamaların her birinin elde edilmeleri olasılığını bulunuz.