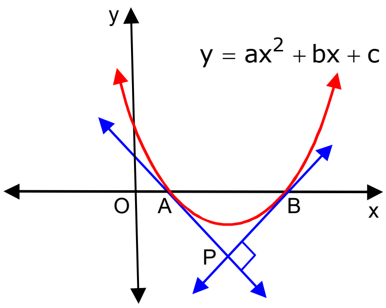
Örnek Problem-1

$y = ax^2 + bx + c$ parabolünün, x eksenini kestiği noktalardaki teğetlerinin birbirine dik olması için a, b, c katsayıları arasında nasıl bir bağıntı olmalıdır?

Çözüm



$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

$B\left(\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$ olur.

Teğetler, parabolün eksenine göre simetrik olduklarından PB'nin eğim açısı 45^o olur.

$m_{PB} = 1$ olup PB'nin denklemi yazılabilir:

$$PB : y = x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

PB doğrusunun $y = ax^2 + bx + c$ parabolüne teğet olması için, bunların kesim noktalarının apsislerini veren denklemin ikikat kökü olmalıdır:

$$ax^2 + bx + c = x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow ax^2 + (b-1)x + c - \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

$$\Delta = (b-1)^2 - 4a\left(c - \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1$ olmalıdır.

Siz Çözünüz

$y = x^2 - mx + 4$ parabolünün, x eksenini kestiği noktalardaki teğetlerinin birbirine dik olması için m kaç olmalıdır?

(Bulduğumuz formülü kullanmayınız.)

Örnek Problem-2

$y = ax^2$ parabollerinin, eğimlerinin farkı k olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

Çözüm

$y = ax^2$ parabollerinin, eğimlerinin farkı k olan teğetlerinin denklemleri $y = mx + n$ olsun.

$y = ax^2$ parabollerinin, eğimlerinin farkı k olan, $y = mx + n$ teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemi istenmektedir. Başka bir deyişle; öyle $P(x, y)$ noktaları belirlenmelidir ki, eğimleri $m_1 = m$ ve $m_2 = m - k$ olan teğetlerin $y = mx + n$ denklemlerini her m değeri için sağlasın.

$y = ax^2$ parabolleri ile $y = mx + n$ doğrularının birbirlerine teğet olmaları için,

$$ax^2 = mx + n \quad \Rightarrow \quad ax^2 - mx - n = 0$$

denkleminin kökleri birbirine eşit olmalıdır. Denklemin köklerinin birbirine eşit olması

$\Delta = m^2 + 4an = 0 \quad \Rightarrow \quad n = -\dfrac{m^2}{4a}$ olmasını gerektirir. n'nin bu değeri $y = mx + n$ denkleminde yerine konulursa,

$$y = mx - \frac{m^2}{4a} \quad \Rightarrow \quad m^2 - 4axm + 4ay = 0 \quad (1)$$

olur.

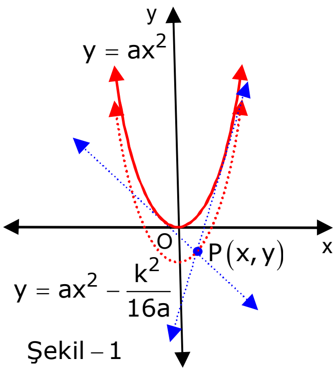
Bu denklemi, $m_1 - m_2 = k$ koşuluyla sağlayan $P(x, y)$ noktalarının geometrik yeri istenmektedir.

$m_1 - m_2 = k \quad (2)$ eşitliği ile (1) denkleminden yazılabilecek $m_1 + m_2 = 4ax \quad (3)$ eşitliğinden $m_1 = 2ax + \frac{k}{2}$ ve $m_2 = 2ax - \frac{k}{2}$ bulunur. Bu değerler, (1) denkleminin köklerinin çarpımını veren $m_1 \cdot m_2 = 4ay \quad (4)$ eşitliğinde yerlerine konulursa,

$y = ax^2 - \frac{k^2}{16a} \quad (5)$ elde edilir.

$y = ax^2$ parabollerinin, eğimlerinin farkı k olan teğetlerinin kesim noktaları (5) parabolü üzerinde bulunur. Karşıt olarak; $y = ax^2$ parabolünün, (5) parabolü üzerindeki herhangi bir noktadan geçen teğetlerinin eğimlerinin farkı k kadar olur.

$y = ax^2$ parabollerinin, eğimlerinin farkı k olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yeri $y = ax^2 - \frac{k^2}{16a}$ parabolüdür.



Şekil – 1

Örnek Problem-3

$y = ax^2 + bx + c$ parabollerinin, eğimlerinin farkı k olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

Çözüm

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

eşitliğine göre; $y = ax^2 + bx + c$ parabolleri $y = ax^2$ parabollerinin, $\vec{v} = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ vektörü ile ötelenmiş biçimidir. Buna göre; istenen geometrik yer, 1. kısımda bulduğumuz geometrik yerin $\vec{v}$ ile ötelenmiş biçimi olacaktır:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{k^2}{16a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Örnek Problem-4 (Barış B. Demir)

$y = x^2$ parabolünü 45^o'lik açı altında gören noktaların geometrik yerinin denklemini bulunuz.

Çözüm

$y = x^2$ parabolüne $P(a, b)$ noktasından çizilen teğetin eğimi m olsun.

Teğetin denklemi $y = m(x - a) + b$ olur.

$x^2 = m(x - a) + b$ denkleminin ikikat kökü vardır.

$$x^2 - m \cdot x + m \cdot a - b = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = m^2 - 4 \cdot a \cdot m + 4 \cdot b = 0 \qquad (1)$$

(1) denkleminin m_1 ve m_2 kökleri $P(a, b)$ noktasından çizilen iki teğetin eğimleridir.

Bu teğetler birbiriyle 45^o'lik açı yapmaktadır. m_1 eğimli teğetin eğim açısı α ve m_2 eğimli teğetin eğim açısı $45^o - \alpha$ olsun.

$$\tan 45^o = \frac{\tan\alpha - \tan\left(45^o - \alpha\right)}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\left(45^o - \alpha\right)}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

$$\Rightarrow 1 + m_1 \cdot m_2 = m_1 - m_2 \qquad (2)$$

(1) denkleminden,

$m_1 \cdot m_2 = 4 \cdot b$ ve

$m_1 - m_2 = -\sqrt{\Delta'}$

$\Rightarrow \; m_1 - m_2 = -4 \cdot \sqrt{a^2 - b}$

$m_1 - m_2 = -\sqrt{\Delta'}$ eşitliği yazılırken $m_1 < 0$ ve $m_2 > 0$ olduğu dikkate alınmıştır.

Δ', (1) denkleminin diskriminantıdır.

$m_1 \cdot m_2$ ve $m_1 - m_2$ değerleri (2) denkleminde yerlerine konulursa,

$$1 + m_1 \cdot m_2 = m_1 - m_2$$

$$\Rightarrow 1 + 4 \cdot b = -4 \cdot \sqrt{a^2 - b} \qquad (3)$$

(3) denklemi, $P(a,b)$ noktalarının geometrik yerinin denklemidir.

$(a,b) \to (x,y)$ dönüşümü yapılıp eşitliğin karesi alınırsa, denklemin xoy koordinat sistemindeki karşılığı olan eğrinin denklemi bulunur:

$$1 + 4 \cdot b = -4 \cdot \sqrt{a^2 - b}$$

$$\Rightarrow 1 + 4 \cdot y = -4 \cdot \sqrt{x^2 - y} \qquad (4)$$

$$\Rightarrow 16 \cdot x^2 + 16 \cdot y^2 - 24 \cdot y - 1 = 0 \qquad (5)$$

(5) denklemi, P noktalarının geometrik yerinin bir hiperbol olduğunu; bu denklemi elde ettiğimiz (4) denklemi de P noktalarının, hiperbolün $y \le -\frac{1}{4}$ bölgesindeki kolunun üzerinde bulunduğunu gösterir.

Örnek Problem-5

$y = x^2 + kx + 4$ parabolünün orijinden geçen teğetleri 45^o'lik açı yapmaktadır.

Buna göre, k kaçtır?

Çözüm

Parabolün teğetleri $y = mx$ olsun.

Kesim noktalarının apsislerini veren denklemin iki kat kökü olmalıdır.

$$x^2 + kx + 4 = mx$$

$$\Rightarrow x^2 + (k - m)x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (k - m)^2 - 16$$

Bu da, $\Delta = 0$ olmasını gerektirir.

$$\Delta = (k - m)^2 - 16$$

$$\Rightarrow m_1 = k - 4, \quad m_2 = k + 4$$

Eğimi pozitif olanının eğim açısı α ise, diğerininki $\alpha + 45^o$ olur.

$m_1 = \tan\left(\alpha + 45^o\right) = k - 4$ ve

$m_2 = \tan(\alpha) = k + 4$

$$\Rightarrow \tan\left(\alpha + 45^o\right) = \frac{\tan(\alpha) + \tan\left(45^o\right)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan\left(45^o\right)}$$

$$\Rightarrow k - 4 = \frac{k + 4 + 1}{1 - k - 4}$$

$$\Rightarrow k = \mp\sqrt{7}$$

Örnek Problem-6

$y = x^2 + kx + 1$ parabolünün orijinden geçen teğetlerinin yaptığı açının en küçük olması sağlandığında, k kaç olur?

Bu durumda, teğetlerin yaptığı açının tanjantı kaç olur?

Çözüm

1. yol

K değeri sıfıra yaklaştıkça teğetler arası açının küçüldüğü ve $k=0$ iken açının en küçük olacağı görülür.

$y=x^2+1$ iken, parabolün teğetleri $y=mx$ olsun.

Kesim noktalarının apsislerini veren denklemin iki kat kökü olmalıdır.

$$x^2+1=mx$$
$$\Rightarrow x^2-mx+1=0$$
$$\Rightarrow \Delta=m^2-4=0$$
$$\Rightarrow m_1=-2,\quad m_2=2$$

Teğetlerin belirttiği açının tanjantı 4/3 bulunur.

2. yol

Parabolün teğetleri $y=mx$ olsun.

Kesim noktalarının apsislerini veren denklemin iki kat kökü olmalıdır.

$$x^2+kx+1=mx$$
$$\Rightarrow x^2+(k-m)x+1=0$$
$$\Rightarrow \Delta=(k-m)^2-4=0$$
$$\Rightarrow m_1=k-2,\quad m_2=k+2$$

Eğimi pozitif olanının eğim açısı β ise, diğerininki $\alpha+\beta$ olsun.

$m_1=\tan(\alpha+\beta)=k-2$ ve

$m_2=\tan(\beta)=k+2$

$$\Rightarrow \tan(\alpha)=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan(\beta)}$$
$$\Rightarrow \tan(\alpha)=\frac{k-2-k-2}{1+k^2-4}=t$$
$$\Rightarrow k^2=\frac{3t-4}{t}\geq 0$$
$$\Rightarrow t=\tan(\alpha)\geq\frac{4}{3}\quad \text{bulunur.}$$

Siz Çözünüz

1. $y=x^2$ parabolünün, eğimlerinin farkı 2 olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.
(Formül kullanmayınız.)

2. $y=x^2-4x+1$ parabolünün eğimlerinin farkı 4 olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.
(Formül kullanmayınız.)

3. $y=x^2$ parabolünün, eğimlerinin toplamı 4 olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

4. $y=x^2-4x+1$ parabolünün eğimlerinin oranı 3 olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

5. $y=x^2-4x+1$ parabolünün eğimlerinin çarpımı 2 olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

6. $y=ax^2$ parabollerinin, eğimleri 2 olan teğetlerinin değme noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

7. $y=ax^2+2$ parabollerinin, $A(1,0)$ noktasından geçen teğetlerinin değme noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

8. $y=x^2-kx+1$ parabollerinin, $A(2,0)$ noktasından geçen teğetlerinin eğimlerinin çarpımı -3 olduğuna göre, değme noktalarının koordinatlarını bulunuz.

9. $y=ax^2+bx+c$ parabollerinin, eğimlerinin çarpımı k olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

10. $y=ax^2+bx+c$ parabollerinin, eğimlerinin oranı k olan teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.