1. R'de tanımlı, türevlenebilir bir f fonksiyonu her x, y reel sayısı için,

$f(x+y)-f(x)=y^2+3y+2xy$

bağıntısını sağladığına göre $f'(2)$ kaçtır?

2. R'de tanımlı, türevlenebilir bir f fonksiyonu her x, y reel sayısı için,

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$

bağıntısını sağlamaktadır.

$f'(0)=5$ olduğuna göre $f'(1)$ kaçtır?

3. R^+'dan R'ye tanımlı türevlenebilir bir f fonksiyonu tanım kümesindeki her x, y reel sayısı için,

$f(x)\cdot f(y)=[f(x)+f(y)]\cdot f(x+y)$

bağıntısını sağlamaktadır.

$f'(1)=-1$ olduğuna göre $f'(4)$ kaçtır?

4. R'de tanımlı, türevlenebilir bir f fonksiyonu her x, y reel sayısı için,

$f(x+y)-f(x)=y^2+3y+2xy$

bağıntısını sağladığına göre $f'(2)$ kaçtır?

Çözüm

y'ye göre türev alalım:

$f'(x+y)=2y+3+2x$

Bu eşitlik her x, y reel sayısı için geçerlidir.

x ve y yerine, $x+y=2$ olacak biçimde istenilen her reel sayı değeri konulabilir.

Biz, $x=2$ ve $y=0$ koyalım.

$f'(2)=7$ bulunur.

5. R'de tanımlı, türevlenebilir bir f fonksiyonu her x, y reel sayısı için,

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$

bağıntısını sağlamaktadır.

$f'(0)=5$ olduğuna göre $f'(1)$ kaçtır?

Çözüm

x'e göre türev alalım:

$f'(x+y)=f'(x)+2y$

$x=0$ ve $y=1$ koyalım.

$f'(1)=f'(0)+2$ ve $f'(0)=5$ ise $f'(1)=7$

bulunur.

6. R'de tanımlı, türevlenebilir bir f fonksiyonu her x, y reel sayısı için,

$f(x+y)-f(x)=y^2+3y+2xy$

bağıntısını sağlamaktadır.

$f(0)=2$ olduğuna göre $y=f(x)$ kuralını bulunuz.

Çözüm

y'ye göre türev alalım:

Türevi, eşitliğin solundaki 2. terimi ortadan kaldırarak bir tek türev ifadesi elde etmek için, y'ye göre alıyoruz. "Türevi y'ye göre alıyoruz." demekle, "y'yi fonksiyonu serbest değişkeni, x'i de bir sabit sayıyoruz." demiş oluyoruz.

$f'(x+y)=2y+3+2x$ $y=0$ koyalım.

$f'(x)=2x+3$ ise $f(x)=x^2+3x+k$ ve

$f(0)=2$ olup $f(x)=x^2+3x+2$ bulunur.

7. R'de tanımlı, türevlenebilir bir f fonksiyonu her x, y reel sayısı için,

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$

bağıntısını sağlamaktadır.

$f'(0)=3$ olduğuna göre $y=f(x)$ kuralını bulunuz.

Çözüm

$x=y=0$ koyalım.

$f(0)=2\cdot f(0)$ ise $f(0)=0$ bulunur.

x'e göre türev alalım:

$f'(x+y)=f'(x)+2y$

olur.

$x = 0$ ve $y = x$ koyalım:

$f'(x) = f'(0) + 2x$ ve $f'(0) = 3$ olup

$f'(x) = 2x + 3$ ve $f(x) = x^2 + 3x + k$

bulunur.

$f(0) = 0$ olduğundan

$f(x) = x^2 + 3x$ olur.

8. R^+ dan R'ye tanımlı türevlenebilir bir f fonksiyonu tanım kümesindeki her x, y reel sayısı için,

$f(x) \cdot f(y) = [f(x) + f(y)] \cdot f(x + y)$

bağıntısını sağlamaktadır.

$f'(1) = -1$ olduğuna göre $f'(4)$ kaçtır?

Çözüm

$y = x$ koyalım.

$f(x) \cdot f(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f(2x)$ olup

$f(x) = 2 \cdot f(2x)$ ya da $f(x) = 0$ olur.

$f'(1) = -1$ verildiğinden, $f(x) = 0$ olmaz.

$f(x) = 2 \cdot f(2x)$ ise, x'e göre türev alınarak $f'(x) = 4 \cdot f'(2x)$ bulunur.

$f'(1) = 4 \cdot f'(2)$,

$f'(2) = 4 \cdot f'(4)$ olup

$f'(4) = -1/16$ bulunur.

9. Reel sayılarda tanımlı, bir f fonksiyonu her x, y reel sayısı için,

$(x - y) \cdot f(x + y) = x \cdot f(y) - y \cdot f(x)$

bağıntısını sağlamaktadır.

$x \cdot f''(x)$ ifadesini $f'(x)$ türünden yazınız.

Çözüm

$(x - y) \cdot f(x + y) = x \cdot f(y) - y \cdot f(x)$

eşitliği $y = 0$ için de sağlanacaktır.

$y = 0$ koyalım:

$x \cdot f(x) = x \cdot (0) \Rightarrow f(x) = f(0) \Rightarrow f'(x) = 0$

$\Rightarrow f''(x) = 0$ bulunur.

Her k reel sayısı için

$x \cdot f''(x) = k \cdot f'(x)$ yazılabilir.

10. Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları her x ve y reel sayısı için,

$f(x + g(y)) = 2y + y + 8$

bağıntısını sağlamaktadır.

Buna göre;

a. $g(x + f(y))$ ifadesini x ve y türünden yazınız.

b. $f(1) = 3$ ise $g(1)$ değerini bulunuz.

Çözüm

a. $f(x + g(y)) = 2x + y + 8$ (1)

İki tarafın x'e göre türevini alalım:

$f'(x + g(y)) = 2$ olur.

$x + g(y) = t$ dersek,

$f'(t) = 2 \Rightarrow f(t) = 2t + k$ bulunur. (2)

$t = x + g(y)$ koyarsak,

$f(x + g(y)) = 2(x + g(y)) + k$

$\Rightarrow f(x + g(y)) = 2x + 2g(y) + k$ olur. (3)

(1) ve (3)'ten,

$g(y) = 1/2 \cdot y + 4 - k/2$

ve y yerine $x + f(y)$ koyarsak,

$g(x + f(y)) = 1/2 \cdot (x + 2y + k) + 4 - k - 2$

$\Rightarrow g(x + f(y)) = 1/2 \cdot x + y + 4$ bulunur.

b. $f(t) = 2t + k$ olduğunu bulmuştuk.

$f(1) = 3$ ise $k = 1$ olur.

$g(y) = 1/2 \cdot y + 4 - k/2$ bulmuştuk.

$y = 1$ ve $k = 1$ konursa, $g(1) = 4$ bulunur.