

Örnek Problem

A ve B önermeleri ,

A: "Ali başarılı bir öğrenci ise derslerine çalışmaktadır."

B: "Ali çok televizyon seyrediyorsa derslerine çalışmaz."

olarak yorumlanmıştır.

$A \wedge B$ önermesinin doğru olması, aşağıdaki önermelerden hangilerinin doğru olmasını gerektirir?

I. "Ali başarılı bir öğrenci ise, çok televizyon seyretmiyordur."

II. "Ali başarılı bir öğrenci değil ise, çok televizyon seyrediyordur."

III. "Ali çok televizyon seyrediyorsa, başarılı bir öğrenci değildir."

A) Yalnız II B) Yalnız III C) I ve II

D) I ve III E) II ve III

Çözüm**I. Yol**

$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ denkleğini kullanalım:

I. **Ali başarılı bir öğrenci ise, derslerine çalışmaktadır. Ali derslerine çalışıyor ise çok televizyon seyretmiyordur.**

"B" önermesinin karşıt tersini kullandığımıza dikkat ediniz.

$A \wedge B$ önermesi I önermesini gerektirmektedir.

II. **Ali başarılı bir öğrenci değil ise, televizyon seyretmiyor olabilir.**

Çok televizyon seyrediyordur diyemeyiz.

III. **Ali çok televizyon seyrediyorsa, derslerine çalışamaz. Ali derslerine çalışmıyor ise başarılı bir öğrenci değildir.**

"A" önermesinin karşıt tersini kullandığımıza dikkat ediniz.

$A \wedge B$ önermesi III önermesini gerektirmektedir.

II. Yol

$A \wedge B$ önermesinin bir C önermesini gerektirmesi, $A \wedge B \Rightarrow C$ önermesinin totoloji olması demektir.

p: "Ali başarılı bir öğrencidir."

q: " Ali derslerine çalışıyor."

r: "Ali çok televizyon seyrediyor."

dersek,

A: $p \Rightarrow q$; B: $r \Rightarrow q'$;

I: $p \Rightarrow r'$; II: $p' \Rightarrow r$;

III: $r \Rightarrow q'$ olur.

$$A \wedge B \Rightarrow I$$

$$\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q') \Rightarrow (p \Rightarrow r')$$

önermesi $p \Rightarrow r' \equiv 0$, yani $p \equiv 1$ ve $r \equiv 1$ iken yanlış olabilir. Halbuki; bu durumda

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q') &\equiv (1 \Rightarrow q) \wedge (1 \Rightarrow q') \\ &\equiv q \wedge q' \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

olacağından $A \wedge B \Rightarrow I$ önermesi doğru olup totolojidir. Öyle ise; $A \wedge B$ önermesi I önermesini gerektirir.

$$A \wedge B \Rightarrow II$$

$$\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q') \Rightarrow (p' \Rightarrow r)$$

önermesi $p' \Rightarrow r \equiv 0$, yani $p \equiv 0$ ve $r \equiv 0$ iken yanlış olabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q') &\equiv (0 \Rightarrow q) \wedge (0 \Rightarrow q') \\ &\equiv 1 \end{aligned}$$

olacağından $A \wedge B \Rightarrow I$ önermesi yanlış olur. Öyle ise; $A \wedge B$ önermesi I önermesini gerektirmez.

$$A \wedge B \Rightarrow III$$

$$\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q') \Rightarrow (r \Rightarrow q')$$

önermesi $r \Rightarrow q' \equiv 0$, yani $r \equiv 1$ ve $q \equiv 1$ iken yanlış olabilir. Halbuki; bu durumda

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q') &\equiv (p \Rightarrow 1) \wedge (1 \Rightarrow 0) \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

olacağından $A \wedge B \Rightarrow III$ önermesi doğru olup totolojidir. Öyle ise; $A \wedge B$ önermesi III önermesini gerektirir.