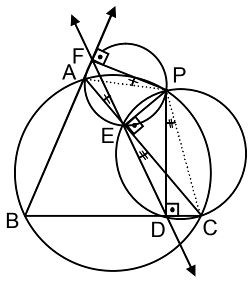
20. Bir üçgenin çevrel çemberi üzerindeki bir noktadan üçgenin kenarlarına indirilen dikmelerin ayaklarının aynı bir doğru üzerinde olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin çevrel çemberi üzerindeki nokta P, P den kenarlara indirilen dikmelerin ayakları D, E, F olsun.



D, E, F noktalarının aynı doğru üzerinde olacağını göstereceğiz. Bunun için $\widehat{AEF} \cong \widehat{CED}$ olduğunu göstermemiz gerekir.

D ile E noktaları $[PC]$ çaplı, E ile F noktaları $[PA]$ çaplı çemberler üzerindedir. (Neden?)

$[PA]$ çaplı çemberde $\widehat{APF} \cong \widehat{AEF}$, $[PC]$ çaplı çemberde $\widehat{CPD} \cong \widehat{CED}$ dir. (Neden?)

$\widehat{APF}$ açısının tümleri $\widehat{FAP}$ ve $\widehat{CPD}$ açısının tümleri $\widehat{DCP}$ açısıdır.

Hem $\widehat{FAP}$, hem de $\widehat{DCP}$ açılarının bütünleri $\widehat{PAB}$ açısıdır. (Neden?)

O halde, $\widehat{FAP} \cong \widehat{DCP}$

$\Rightarrow \widehat{APF} \cong \widehat{CPD}$

$\Rightarrow \widehat{AEF} \cong \widehat{CED}$ dır.

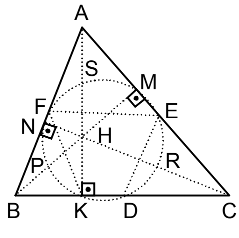
Bu da D, E, F nin doğrusal olduğunu gösterir.

NOT : Bu doğruya **Simson Doğrusu** denir.

21. Bir üçgende kenarların orta noktaları ile yüksekliklerin ayaklarının aynı çember üzerinde olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

$\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninde kenarların orta noktaları D, E, F; yüksekliklerin ayakları K, M, N ve yüksekliklerin kesim noktası H olsun.



FE // BC, $|FK| = \dfrac{1}{2}|AB|$ ve $|DE| = \dfrac{1}{2}|AB|$ olduğundan KDEF bir ikizkenar yamuk olup bir kirişler dörtgenidir.

Aynı şekilde, DEMF ile DEFN dörtgenlerinin de birer kirişler dörtgeni olduğu gösterilebilir. D, E, F noktaları bir çember belirlediğine göre bu kirişler dörtgenlerine ait çemberler aynı çemberdir.

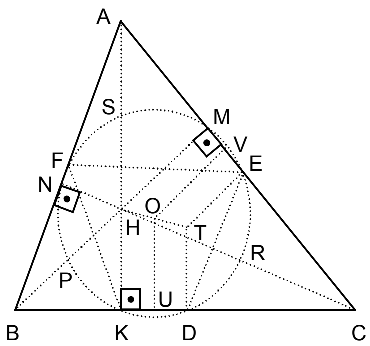
NOT : $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni için çözdüğümüz bu problemi $\overset{\triangle}{HBC}$ üçgenine uygulayalım. $\overset{\triangle}{HBC}$ üçgeninde de yüksekliklerin ayakları K, M, N olduğundan K, M, N noktalarından geçen çember, üçgenin kenarlarını ortalamalıdır. Buna göre P noktası $[HB]$ nin, R noktası da $[HC]$ nin ortası olmalıdır. Aynı şekilde $\overset{\triangle}{HAB}$ üçgeninde de S noktası $[HA]$ nın ortasıdır.

Demek ki bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninde yüksekliklerin ayakları K, M, N; kenarların orta noktaları D, E, F ve $[HA]$, $[HB]$, $[HC]$ nin orta noktaları S, P, R ise, bu dokuz nokta aynı çember üzerindedir.

Bu çembere **Euler Çemberi** ya da **Dokuz Nokta Çemberi** denir.

Teorem
Bir üçgende yüksekliklerin kesim noktası ile kenar-orta dikmelerinin kesim noktasını birleştiren doğru parçasının orta noktası Euler Çemberinin merkezidir.

İspat
Şekilde ABC üçgeninin Euler Çemberi çizilmiştir.
Buna göre; D, E ve F kenarların orta noktaları; K, M ve N de yüksekliklerin ayaklarıdır.
Yükseklikler H noktasında, [BC] ve [AC] kenarlarının orta dikmeleri T noktasında kesişmiş olsun.
HKDT ve HMET dik yamuklarında, [KD] ve [ME] kenarlarının orta dikmeleri [HT] yan kenarının O ortasında kesişirler. Bir çemberin kirişlerinin orta noktaları çemberin merkezinde kesişeceğinden O noktası ABC üçgeninin Euler Çemberinin merkezidir.



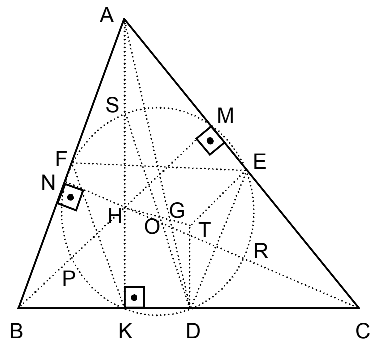
Teorem
Bir üçgende yüksekliklerin kesim noktası, kenarorta dikmelerinin kesim noktası ve kenarortayların kesim noktası aynı bir doğru üzerindedir.

İspat
Şekilde ABC üçgeninin Euler Çemberi çizilmiştir.
Buna göre; D, E ve F kenarların orta noktaları; K, M ve N de yüksekliklerin ayaklarıdır.
Yükseklikler H noktasında, [BC] ve [AC] kenarlarının orta dikmeleri T noktasında kesişmiş olsun. Üçgenin kenarortaylarının G kesim noktasının HT doğrusu üzerinde olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olacaktır.
[HT] doğru parçasının O ortası Euler çemberinin merkezi olduğundan, çemberin [DS] çapı O noktasından geçer.

$TD // AK$, $|TO| = |OH|$ ve $\dfrac{|TD|}{|HS|} = \dfrac{|TO|}{|OH|}$ olup

$|TD| = |HS|$ olur. Öte yandan Euler Çemberinde $|HS| = |SA|$ dır. $AD \cap HT = \{G\}$ olsun.

$\dfrac{|TD|}{|HA|} = \dfrac{|GD|}{|GA|} = \dfrac{1}{2}$ olacağından, G noktası ABC üçgeninin kenarortaylarının kesim noktası olur.



Öyleyse; bir üçgenin yüksekliklerinin kesim noktası, kenar orta dikmelerinin kesim noktası, kenarortaylarının kesim noktası aynı bir doğru üzerindedir. Bu doğruya Euler Doğrusu denir.

Sonuçlar

I. Bir üçgenin Euler Doğrusu, o üçgenin Euler Çemberinin merkezinden geçer.
II. Bir ABC üçgeninin ortik üçgeninin (yükseklik ayaklarının belirttiği üçgen.) Euler Doğrusu – tanım gereği – bu üçgenin çevrel çemberinin (ABC üçgeninin Euler Çemberi) merkezinden geçer.
O halde; ABC üçgeninin Euler Doğrusu ile ABC üçgeninin ortik üçgeninin Euler Doğrusu, ABC üçgeninin Euler Çemberinin merkezinde kesişirler.