

## 4.10 – Üslü Sayılar

### 4.10.1 – Üslü Sayıların Tanımı

Üslü sayıları; **doğal sayıların doğal sayı kuvvetleri, tam sayıların doğal sayı kuvvetleri, tam sayıların tam sayı kuvvetleri ve rasyonel sayıların tamsayı kuvvetleri** olarak önceki bölümlerde tanıtmıştık.

Bu bölümde; tanıdığınız üslü sayılara **gerçek sayıların tam sayı kuvvetlerini** de katarak, üslü sayıların özelliklerini topluca ele alacağız.

#### Tanım – 4.69

$a \in \mathbb{R}$  ve  $n \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere;

$$\mathbf{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ tane}} \text{ dir.}}$$

$\mathbf{a^n}$  ifadesinde  $\mathbf{a}$ 'ya **taban**,  $\mathbf{n}$ 'ye **üs** ya da **kuvvet** denildiğini;  $\mathbf{a^n}$  ifadesinin  $\mathbf{a}$  **üssü n** ya da  **$\mathbf{a}$ 'nın  $\mathbf{n}$ 'inci kuvveti** diye okunduğunu biliyorsunuzuz.

$a \in \mathbb{R} - \{0\}$  olmak üzere;

$\mathbf{a^0 = 1}$  ve  $\mathbf{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$  olarak tanımlanır.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ tane}}}$$

$$\Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$$\Rightarrow \mathbf{a^{-n} = (a^{-1})^n}$$
 bulunur.

Buna göre;  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$  olur.

#### Örnek – 4.147

a.  $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

b.  $3^0 = 1; (-3)^0 = 1; (-\sqrt{5})^0 = 1$

c.  $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

d.  $(-\sqrt{2})^4 = \underbrace{(-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2})}_{2} \cdot \underbrace{(-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2})}_{2} = 2 \cdot 2 = 4$

e.  $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

f.  $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

g.  $(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}$

h.  $(0,2)^{-3} = \left(\frac{2}{10}\right)^{-3} = \left(\frac{10}{2}\right)^3 = 5^3 = 125$

#### Etkinlik – 4.241

Aşağıdaki üslü sayıların değerlerini bulunuz.

a.  $\left(\frac{2}{3}\right)^3$     b.  $(\sqrt{3})^5$     c.  $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^4$     d.  $(-3)^{-1}$

e.  $(-2)^{-3}$     f.  $(-2^2)^3$     g.  $(3^{-1})^{-2}$     h.  $(0,008)^{-2}$

### 4.10.2 – Üslü Sayılarla İşlemler

#### Çarpma ve Bölme

Teorem-4.114 üslü sayılarla çarpma ve bölme işlemlerinin nasıl yapılacağını belirtir.

#### Teorem – 4.114

$a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$  ve  $m, n \in \mathbb{Z}$  olmak üzere;

1.  $\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

2.  $\mathbf{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$

3.  $\mathbf{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$

4.  $\mathbf{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

5.  $\mathbf{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$  dir.

## Etkinlik – 4.242

Teorem-4.114'ü ispatlayınız.

## Örnek – 4.148

- a.  $5^{11} \cdot 5^{-8} = 5^{11+(-8)} = 5^3 = 125$   
 b.  $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10000$   
 c.  $(-2^3)^2 = (-1)^2 \cdot (2^3)^2 = 2^6 = 64$   
 d.  $\frac{(-3)^6}{3^3} = \frac{3^6}{3^3} = 3^{6-3} = 3^3 = 27$   
 e.  $\frac{4^{-3}}{20^{-3}} = \left(\frac{4}{20}\right)^{-3} = \left(\frac{20}{4}\right)^3 = 5^3 = 125$

## Örnek – 4.149

Aşağıdaki işlemleri yapınız.

- a.  $\frac{3,6 \cdot 10^{-7}}{0,04 \cdot 10^{-9}}$       b.  $5^7 \cdot 8^3$   
 c.  $\frac{12^7}{6^8}$       d.  $\frac{9^{-6} - 15^{-6}}{30^{-6} - 18^{-6}}$   
 e.  $(-a^2)^{-5} \cdot (-a^{-2})^{-4} \cdot (-a^{-1})^{-3}$   
 f.  $\frac{24(-a^2)^3 \cdot (-2b)^{-4}}{(-4a^{-2})^{-3} \cdot (-8b^{-2})^2}$

## Çözüm

- a.  $\frac{3,6 \cdot 10^{-7}}{0,04 \cdot 10^{-9}} = \frac{36 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 10^{-11}} = 9 \cdot 10^{-8-(-11)} = 9000$   
 b.  $5^7 \cdot 8^3 = 5^7 \cdot (2^3)^3 = 5^7 \cdot 2^9 = 2^2 \cdot (5 \cdot 2)^7 = 4 \cdot 10^7$   
 c.  $\frac{12^7}{6^8} = \frac{12^7}{6 \cdot 6^7} = \frac{1}{6} \left(\frac{12}{6}\right)^7 = \frac{1}{6} \cdot 2^7 = \frac{64}{3}$   
 d.  $\frac{9^{-6} - 15^{-6}}{30^{-6} - 18^{-6}} = \frac{3^{-6} \cdot 3^{-6} - 3^{-6} \cdot 5^{-6}}{6^{-6} \cdot 5^{-6} - 6^{-6} \cdot 3^{-6}}$   

$$= \frac{3^{-6}(3^{-6} - 5^{-6})}{-6^{-6}(3^{-6} - 5^{-6})} = -\left(\frac{3}{6}\right)^{-6} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = -64$$

$$\text{e. } (-a^2)^{-5} \cdot (-a^{-2})^{-4} \cdot (-a^{-1})^{-3} \\ = (-a^{-10}) \cdot (a^8) \cdot (-a^3) = a$$

$$\text{f. } \frac{24(-a^2)^3 \cdot (-2b)^{-4}}{(-4a^{-2})^{-3} \cdot (-8b^{-2})^2} = \frac{24 \cdot (-a^6) \cdot (-2)^{-4} \cdot b^{-4}}{(-4)^{-3} \cdot a^6 \cdot (-8)^2 \cdot b^{-4}} \\ = \frac{-24 \cdot 2^{-4}}{-4^{-3} \cdot 8^2} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

## Etkinlik – 4.243

Aşağıdaki işlemleri yapınız. Sonuçlarını en sade biçimde yazınız.

- a.  $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^3$       b.  $(0,04)^4 \cdot 25^5$   
 c.  $\frac{4 \cdot 5^3 \cdot 6^4}{10^2 \cdot 180^2}$       d.  $\left(\frac{16^{-2} \cdot 27^{-1}}{18^{-1} \cdot 48^{-2}}\right)^{-1}$   
 e.  $\frac{4^x \cdot 4^y}{2^{x-y}} : \frac{4^{x-y}}{2^x \cdot 2^y}$       f.  $\left\{-\left[-(-0,2)^2\right]^2\right\}^{-1}$   
 g.  $(-2)^5 \cdot (-8)^{-3} \cdot (-4^{-1})^{-3}$   
 h.  $\left(\frac{a^3 b^2 c^6}{8x^{-1} y^2 z^4}\right)^{-1} : \left(\frac{2x^2 y^{-3} z^{-2}}{a^{-1} b^{-2} c^{-3}}\right)^{-2}$   
 i.  $\frac{(-2)^{3n} \cdot (-4)^{2n+1}}{(-8)^{n-3} \cdot (-16)^{n+2}}$   
 j.  $\left(\frac{3^x}{2^{x+1}}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{2^x}{3^{x-1}}\right)^{x+1}$

## Etkinlik – 4.244

- a.  $3^x = a$  ise  $3^{x+2}$  nin a türünden değeri nedir?  
 b.  $2^{x-1} = a$  ise  $8^x$  in a türünden değeri nedir?  
 c.  $4^x = a$  ise  $32^x$  in a türünden değeri nedir?  
 d.  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = a$  ise  $3^{1-2x} \cdot 6^{1+x}$  in a türünden değeri nedir?

## Etkinlik – 4.245

Aşağıdaki sayıların, onluk sayma düzeninde kaçar basamaklı olduklarını bulunuz.

a.  $8^5 \cdot 25^6 \cdot 750^2$       b.  $6^3 \cdot 16^4 \cdot 50^{20}$

## Toplama ve Çıkarma

Üslü sayılarla toplama ve çıkarma işlemlerinde, çarpmanın toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özeliğinden yararlanılır.

$$x \cdot a^n \mp y \cdot x^n = (x \mp y) \cdot x^n \text{ dir.}$$

## Örnek – 4.150

Aşağıdaki işlemleri inceleyiniz.

a.  $5 \cdot 3^{17} + 3^{17} = (5 + 1) \cdot 3^{17} = 2 \cdot 3 \cdot 3^{17} = 2 \cdot 3^{18}$

b.  $3 \cdot 2^{23} + 2^{24} = 3 \cdot 2^{23} + 2 \cdot 2^{23} = (3 + 2) \cdot 2^{23} = 5 \cdot 2^{23}$

c.  $10^{-13} + 10^{-14} + 10^{-15} = 10^2 \cdot 10^{-15} + 10 \cdot 10^{-15} + 10^{-15} = (100 + 10 + 1) \cdot 10^{-15} = 111 \cdot 10^{-15}$

d.  $(\sqrt{5})^{32} + (\sqrt{5})^{33} + (\sqrt{5})^{34} = (\sqrt{5})^{32} [1 + \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2] = [(\sqrt{5})^2]^{16} (1 + \sqrt{5} + 5) = (6 + \sqrt{5}) \cdot 5^{16}$

## Etkinlik – 4.246

Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a.  $\frac{10^{-20}}{5} - \frac{10^{-19}}{2}$

b.  $\frac{5^{41} + 5^{42}}{5^{43} - 5^{44}}$

c.  $\frac{5 \cdot 2^n - 2^{n-1}}{2^{n-1} + 2^{n-2}}$

d.  $\frac{(-0,04)^2}{(0,02)^3} - \frac{(-4 \cdot 10^7)^3}{(2 \cdot 10^5)^4}$

e.  $\frac{2}{a^{n-2}} + \frac{3-2a}{a^{n-1}} - \frac{3a-1}{a^n}$

f.  $\frac{a^{2x} + a^{x+y} - a^x - a^y}{a^x + a^y}$

## Etkinlik – 4.247

$x \neq y$  ve  $a \neq \mp 1$  olduğuna göre;

$$\frac{1}{1-a^{x-y}} + \frac{1}{1-a^{y-x}} \text{ işlemini yapınız.}$$

## 4.10.3 – Üslü Denklemler

Burada; tabanların birer gerçek sayı ve üslerin birer tam sayı olduğu üslü denklemlerden, birinci dereceye indirgenebilenleri ile ilgileneceğiz.

## Teorem – 4.115

1.  $a \notin \{-1, 0, 1\}$  ve  $m, n \in \mathbb{Z}$  olmak üzere;

$$a^m = a^n \text{ ise } m = n \text{ dir.}$$

2.  $n$  tek tam sayı olmak üzere;

$$a^n = b^n \text{ ise } a = b$$

3.  $n \neq 0$  çift tam sayı olmak üzere;

$$a^n = b^n \text{ ise } |a| = |b| \text{ dir.}$$

4.  $a, b \notin \{-1, 0, 1\}$  ve  $m, n, x, y \in \mathbb{Z} - \{0\}$  olmak üzere;

$$\left. \begin{array}{l} a^m = b^x \\ a^n = b^y \end{array} \right\} \text{ ise } \frac{m}{n} = \frac{x}{y} \text{ dir.}$$

## Etkinlik – 4.248

Teorem-4.115'i ispatlayınız.

Teorem-4.114'ten şu sonuç çıkarılır:

$$a^n = 1 \text{ ise, } n = 0$$

$$\text{veya } a = 1$$

$$\text{veya } a = -1 \text{ ve } n \text{ çifttir.}$$

İspatlayalım:

$$a^n = 1 \text{ ve } a \neq \mp 1$$

$$\Rightarrow a^n = a^0 \quad (\text{Tanım – 4.69})$$

$$\Rightarrow n = 0 \text{ olur.} \quad (\text{Teorem – 4.115.1})$$

$$a^n = 1 \text{ ve } n \text{ tek}$$

$$\Rightarrow a^n = 1^n \quad (\text{Tanım – 4.69})$$

$$\Rightarrow a = 1 \text{ olur.} \quad (\text{Teorem – 4.115.2})$$

$$a^n = 1, \quad n \neq 0 \text{ ve } n \text{ çift}$$

$$\Rightarrow a^n = (\mp 1)^n \quad (\text{Tanım – 4.69})$$

$$\Rightarrow a = -1 \text{ veya } a = 1 \text{ olur. (Teorem – 4.115.3)}$$

(İspatı  $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q} \vee \mathbf{r} \equiv (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}') \Rightarrow \mathbf{r}$  denkleğine dayanarak yaptığımızı dikkat ediniz.)

### Örnek – 4.151

Aşağıdaki denklemleri  $Z$ 'de çözünüz.

$$\mathbf{a.} \quad 2^{2x-5} = 8 \quad \mathbf{b.} \quad 5^{2-3x} = (0,04)^2$$

### Çözüm

$$a^m = a^n \text{ ise } m = n \text{ dir.}$$

$$\mathbf{a.} \quad 2^{2x-5} = 8 \Rightarrow 2^{2x-5} = 2^3 \\ \Rightarrow 2x - 5 = 3 \\ \Rightarrow x = 4 \text{ bulunur.}$$

$$\mathbf{b.} \quad 5^{2-3x} = (0,04)^2 \Rightarrow 5^{2-3x} = \left(\frac{4}{100}\right)^2 \\ \Rightarrow 5^{2-3x} = 5^{-4} \\ \Rightarrow 2 - 3x = -4 \\ \Rightarrow x = 2 \text{ bulunur.}$$

### Örnek – 4.152

Aşağıdaki denklemleri  $R$ 'de çözünüz.

$$\mathbf{a.} \quad (2x - 1)^3 = 27 \quad \mathbf{b.} \quad (3x - 2)^5 = (x - 6)^5$$

### Çözüm

$n$  tek tam sayı olmak üzere,

$$a^n = b^n \text{ ise } a = b \text{ dir.}$$

$$\mathbf{a.} \quad (2x - 1)^3 = 27 \Rightarrow (2x - 1)^3 = 3^3 \\ \Rightarrow 2x - 1 = 3 \\ \Rightarrow x = 2 \text{ bulunur.}$$

$$\mathbf{b.} \quad (3x - 2)^5 = (x - 6)^5 \Rightarrow 3x - 2 = x - 6 \\ \Rightarrow x = -2 \text{ bulunur.}$$

### Örnek – 4.153

Aşağıdaki denklemleri  $R$ 'de çözünüz.

$$\mathbf{a.} \quad (5x + 3)^6 = 64 \quad \mathbf{b.} \quad (3x + 1)^4 = (x + 7)^4$$

### Çözüm

$n$  çift tam sayı olmak üzere,

$$a^n = b^n \text{ ise } |a| = |b| \text{ dir.}$$

$$\mathbf{a.} \quad (5x + 3)^6 = 64$$

$$\Rightarrow (5x + 3)^6 = 2^6 \Rightarrow |5x + 3| = 2$$

$$\Rightarrow 5x + 3 = 2 \text{ veya } 5x + 3 = -2$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1}{5} \text{ veya } x = -1 \text{ bulunur.}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ -\frac{1}{5}, -1 \right\} \text{ dir.}$$

$$\mathbf{b.} \quad (3x + 1)^4 = (x + 7)^4$$

$$\Rightarrow 3x + 1 = x + 7 \text{ veya } 3x + 1 = -x - 7$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ veya } x = -2 \text{ bulunur.}$$

$$\mathcal{C} = \{3, -2\} \text{ dir.}$$

### Örnek – 4.154

$(2x - 1)^{2-4x} = 1$  denkleminin  $R$ 'deki çözüm kümesini bulunuz.

### Çözüm

$$2 - 4x = 0$$

$$\text{veya } 2x - 1 = 1$$

$$\text{veya } 2x - 1 = -1 \text{ ve } 2 - 4x \text{ çift olmalıdır.}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{1}{2}, 1, 0 \right\} \text{ olur.}$$

### Örnek – 4.155

$(2a)^{-x} = a^3$   
 $a^{1-x} = 2^{4-x}$  } sistemini sağlayan  $(x, a)$  ikililerinin kümesini bulunuz.

### Çözüm

$$\left. \begin{array}{l} a^m = b^x \\ a^n = b^y \end{array} \right\} \text{ ise } \frac{m}{n} = \frac{x}{y} \text{ dir.} "$$

teoreminden yararlanacağız.

$$(2a)^{-x} = a^3 \Rightarrow 2^{-x} \cdot a^{-x} = a^3$$

$$\Rightarrow 2^{-x} = a^3 : a^{-x}$$

$$\Rightarrow 2^{-x} = a^{x+3} \text{ olur.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2^{-x} = a^{x+3} \\ 2^{4-x} = a^{1-x} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-x}{4-x} = \frac{x+3}{1-x}$$

$$\Rightarrow -x + x^2 = 12 + x - x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ veya } x = -2 \text{ bulunur.}$$

$x = 3$  iken;

$$a^{1-x} = 2^{4-x} \Rightarrow a^{-2} = 2^1$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{-1}{\sqrt{2}} \text{ veya } a = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ olur.}$$

$x = -2$  iken;

$$a^{1-x} = 2^{4-x} \Rightarrow a^3 = 2^6$$

$$\Rightarrow a = 4 \text{ olur.}$$

Buna göre;  $(x, a)$  ikililerinin kümesi,

$$\left\{ \left( 3, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right), \left( 3, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), (-2, 4) \right\} \text{ dir.}$$

#### Etkinlik – 4.249

Aşağıdaki denklemlerin R'deki çözüm kümelerini bulunuz.

$$\text{a. } 3^{2x+3} = \frac{1}{27} \quad \text{b. } (\sqrt{2}x + \sqrt{3})^7 = (\sqrt{3}x - \sqrt{2})^7$$

$$\text{c. } (3-2x)^{-6} = (x+6)^{-6} \quad \text{d. } (3x-5)^{6x+1} = 1$$

$$\text{e. } (x+2)^{x^2-4} = 1 \quad \text{f. } (x-2)^4 = (x^2+x-4)^2$$

#### Etkinlik – 4.250

Aşağıdaki denklemleri sağlayan  $(x, a)$  ikililerinin kümelerini bulunuz.

$$\text{a. } \left. \begin{array}{l} a^{3-x} = 9^{1-x} \\ a^6 = 3^{5-x} \end{array} \right\} \quad \text{b. } \left. \begin{array}{l} (5a)^x = a^{x+2} \\ a^{x+4} = 5^{2x+2} \end{array} \right\}$$

#### Örnek – 4.156

Aşağıdaki denklemlerin Z'deki çözüm kümelerini bulunuz.

$$\text{a. } 2^{x-1} + 3 \cdot 2^{x+2} = 100$$

$$\text{b. } 3 \cdot 6^{x+1} - 50 \cdot 10^x = 0$$

$$\text{c. } \frac{6^x - 3^x}{3^{x-1} + 3^{x+1}} = 9 \cdot 2^{x-5}$$

$$\text{d. } \left( \frac{3}{4} \right)^{2x} \cdot \left( \frac{8}{3} \right)^{x-1} = 3^{x+1}$$

#### Çözüm

$$\text{a. } 2^{x-1} + 3 \cdot 2^{x+2} = 100$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot \left( \frac{1}{2} + 3 \cdot 2^2 \right) = 100$$

$$\Rightarrow 2^x = 2^3$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ bulunur.}$$

$$\mathcal{C} = \{3\} \text{ dir.}$$

$$\text{b. } 3 \cdot 6^{x+1} - 50 \cdot 10^x = 0$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 6^{x+1} = 5 \cdot 10^{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{6^{x+1}}{10^{x+1}} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{6}{10} \right)^{x+1} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{3}{5} \right)^{x+1} = \left( \frac{3}{5} \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow x+1 = -1 \Rightarrow x = -2 \text{ bulunur.}$$

$$\mathcal{C} = \{-2\} \text{ dir.}$$

$$\text{c. } \frac{6^x - 3^x}{3^{x-1} + 3^{x+1}} = 9 \cdot 2^{x-5}$$

$$\Rightarrow \frac{3^x(2^x - 1)}{3^x(3^{-1} + 3)} = 9 \cdot 2^{x-5}$$

$$\Rightarrow \frac{2^x - 1}{10} = 9 \cdot 2^{x-5}$$

$$\Rightarrow 2^x - 1 = 30 \cdot 2^{x-5}$$

$$\Rightarrow 2^x - 1 = 30 \cdot \frac{2^x}{32}$$

$$\Rightarrow 32 \cdot 2^x - 32 = 30 \cdot 2^x$$

$$\Rightarrow 2^x = 16 \Rightarrow x = 4 \text{ bulunur.}$$

$$\mathcal{C} = \{4\} \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned}
\text{d. } \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{x-1} &= 3^{x+1} \\
\Rightarrow \left(\frac{3^2}{4^2}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^{-1} &= 3^x \cdot 3 \\
\Rightarrow \left(\frac{9}{16} \cdot \frac{8}{3}\right)^x \cdot \frac{3}{8} &= 3 \cdot 3^x \\
\Rightarrow \frac{3^x}{2^x} \cdot \frac{3}{8} &= 3 \cdot 3^x \\
\Rightarrow \frac{1}{2^x \cdot 8} &= 1 \\
\Rightarrow 2^{x+3} = 1 &\Rightarrow x = -3 \text{ bulunur.} \\
\mathcal{C} = \{-3\} &\text{ dir.}
\end{aligned}$$

**Etkinlik – 4.251**

Aşağıdaki denklemlerin  $Z$ 'deki çözüm kümelerini bulunuz.

- a.  $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 28$
- b.  $\left(\frac{4}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{x-1} = 5^x$
- c.  $3 \cdot 2^{x+1} - 3^{x+1} = 3^x - 3 \cdot 2^x$
- d.  $4^{2x} - 4^x = 3(8^x + 4^x)$

**Etkinlik – 4.252**

Aşağıdaki denklem sistemlerini sağlayan  $(x, y)$  ikililerinin kümelerini yazınız.

- a.  $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 3^y = 15 \\ 2^{x+2} - 3^{y-1} = 5 \end{cases}$
- b.  $\begin{cases} 4^x \cdot 2^y = 2^{x+3} \\ 3^{3x} \cdot 27^{y-1} = 9^{x+4} \end{cases}$

**4.10.4 – Üslü Eşitsizlikler**

Bu kısımda, tabanların birer gerçekte sayı ve üslerin birer tam sayı olduğu üslü eşitsizliklerden, birinci dereceye indirgenenlerin üzerinde duracağız.

**Teorem – 4.116**

1.  $a \in \mathbf{R}^+$  ise  $\forall n \in \mathbf{Z}$  için  $a^n > 0$  dir.
2.  $a \in \mathbf{R}^-$  ve  $n$  çift ise  $a^n > 0$  dir.
3.  $a \in \mathbf{R}^-$  ve  $n$  tek ise  $a^n < 0$  dir.

Örneğin;  $3^5 > 0$ ,  $2^{-2} > 0$ ,  $(-3)^3 < 0$ ,  $(-2)^{-3} < 0$ ,  $(-4)^4 > 0$ ,  $(-5)^{-2} > 0$ , ... olur.

**Etkinlik – 4.253**

Teorem-4.11'yi ispatlayınız.

**Örnek – 4.157**

Aşağıdaki eşitsizliklerin  $R$ 'deki çözüm kümelerini bulunuz.

- a.  $(2x - 5)^3 (x + 2)^4 \geq 0$
- b.  $(3x - 7)^5 (2x + 6)^6 < 0$

**Çözüm**

- a.  $x = -2$  iken önerme doğru olur.  
 $x \neq -2$  iken  $(x + 2)^4 > 0$  olduğundan eşitsizliğin iki tarafı  $(x + 2)^4$  ile bölünebilir.

$$\begin{aligned}
(2x - 5)^3 (x + 2)^4 \geq 0 &\Rightarrow (2x - 5)^3 \geq 0 \\
&\Rightarrow 2x - 5 \geq 0 \\
&\Rightarrow x \geq \frac{5}{2} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{C} = \{-2\} \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right) \text{ olur.}$$

- b.  $x \neq -3$  iken  $(2x + 6)^6 > 0$  olduğundan eşitsizliğin iki tarafı  $(2x + 6)^6$  ile bölünebilir.

$$\begin{aligned}
(3x - 7)^5 (2x + 6)^6 < 0 &\Rightarrow (3x - 7)^5 < 0 \\
&\Rightarrow 3x - 7 < 0 \\
&\Rightarrow x < \frac{7}{3} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

$(2x + 6)^6$  çarpanını sıfır yapan  $x = -3$  değeri eşitsizliği sağlamaz.

$$\mathcal{C} = \left(-\infty, \frac{7}{3}\right) - \{-3\} \text{ olur.}$$

**Teorem – 4.117**

1.  $a, b \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}^+$  ve  $n$  tek iken;

$$a^n < b^n \Leftrightarrow a < b \text{ dir.}$$

2.  $a, b \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}^+$  ve  $n$  çift iken,

$$a^n < b^n \Leftrightarrow |a| < |b| \text{ dir.}$$

**Etkinlik – 4.254**

Teorem-4.117'yi ispatlayınız.

" $a, b \in \mathbf{R}^+$  iken, her  $n \in \mathbf{Z}^+$  için  $a^n < b^n \Leftrightarrow a < b$ " olduğunu da gösteriniz.

**Örnek – 4.158**

Aşağıdaki eşitsizliklerin  $\mathbf{R}$ 'deki çözüm kümelerini bulunuz.

a.  $(2x - 4)^3 < (x + 2)^3$

b.  $(2x - 1)^4 > (x + 4)^4$

c.  $(x - 1)^{-5} < (3x + 3)^{-5}$

d.  $(x + 3)^{-4} \geq (2x - 6)^{-4}$

**Çözüm**

a.  $(2x - 4)^3 < (x + 2)^3 \Rightarrow 2x - 4 < x + 2$   
 $\Rightarrow x < 6$  bulunur.

$$\mathcal{C}_1 = (-\infty; 6) \text{ dir.}$$

b.  $(2x - 1)^4 > (x + 4)^4 \Rightarrow |2x - 1| > |x + 4|$  olur.

$$x < -4 \text{ iken;}$$

$$|2x - 1| > |x + 4| \Rightarrow -2x + 1 > -x - 4$$

$$\Rightarrow x < 5 \text{ bulunur.}$$

$$\mathcal{C}_1 = (-\infty; -4) \text{ dir.}$$

$$-4 \leq x < \frac{1}{2} \text{ iken;}$$

$$|2x - 1| > |x + 4| \Rightarrow -2x + 1 > x + 4$$

$$\Rightarrow x < -1 \text{ bulunur.}$$

$$\mathcal{C}_2 = [-4; -1) \text{ dir.}$$

$$x \geq \frac{1}{2} \text{ iken;}$$

$$|2x - 1| > |x + 4| \Rightarrow 2x - 1 > x + 4$$

$$\Rightarrow x > 5 \text{ bulunur.}$$

$$\mathcal{C}_3 = (5; +\infty) \text{ dir.}$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} = (-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$$

c.  $(x - 1)^{-5} < (3x + 3)^{-5}$

$$\Rightarrow [(x - 1)^{-1}]^5 < [(3x + 3)^{-1}]^5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x - 1} < \frac{1}{3x + 3} \text{ olur.}$$

Paydaların kritik değerleri  $-1$  ve  $1$ 'dir.

$$x < -1 \text{ iken;}$$

$(x - 1)(3x + 3) > 0$  olacağından eşitsizliğin iki tarafı bu çarpım ile çarpılabilir:

$$\frac{1}{x - 1} < \frac{1}{3x + 3}$$

$$\Rightarrow (x - 1)(3x + 3) \cdot \frac{1}{x - 1} < (x - 1)(3x + 3) \cdot \frac{1}{3x + 3}$$

$$\Rightarrow 3x + 3 < x - 1 \Rightarrow x < -2 \text{ bulunur.}$$

$$\mathcal{C}_1 = (-\infty; -2) \text{ dir.}$$

$$-1 < x < 1 \text{ iken;}$$

$$(x - 1)(3x + 3) < 0 \text{ dir.}$$

$$\frac{1}{x - 1} < \frac{1}{3x + 3}$$

$$\Rightarrow (x - 1)(3x + 3) \cdot \frac{1}{x - 1} > (x - 1)(3x + 3) \cdot \frac{1}{3x + 3}$$

$$\Rightarrow 3x + 3 > x - 1 \Rightarrow x > -2 \text{ bulunur.}$$

$$\mathcal{C}_2 = (-1; 1) \text{ dir.}$$

$$x > 1 \text{ iken;}$$

$$(x - 1)(3x + 3) > 0 \text{ dir.}$$

$$\frac{1}{x - 1} < \frac{1}{3x + 3}$$

$$\Rightarrow (x - 1)(3x + 3) \cdot \frac{1}{x - 1} < (x - 1)(3x + 3) \cdot \frac{1}{3x + 3}$$

$$\Rightarrow 3x + 3 < x - 1 \Rightarrow x < -2 \text{ bulunur.}$$

$$\mathcal{C}_3 = \emptyset \text{ dir.}$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} = (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \text{ olur.}$$

$$d. (x+3)^{-4} \geq (2x-6)^{-4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x+3}\right)^4 \geq \left(\frac{1}{2x-6}\right)^4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x+3|} \geq \frac{1}{|2x-6|}$$

$$\Rightarrow |2x-6| \geq |x+3|, x \neq -3, x \neq 3 \text{ bulunur.}$$

$$x < -3 \text{ iken;}$$

$$|2x-6| \geq |x+3| \Rightarrow -2x+6 \geq -x-3 \\ \Rightarrow x \leq 9 \text{ bulunur.}$$

$$C_1 = (-\infty; -3) \text{ dir.}$$

$$-3 < x < 3 \text{ iken;}$$

$$|2x-6| \geq |x+3| \Rightarrow -2x+6 \geq x+3 \\ \Rightarrow x \leq 1 \text{ bulunur.}$$

$$C_2 = (-3; 1] \text{ dir.}$$

$$x > 3 \text{ iken;}$$

$$|2x-6| \geq |x+3| \Rightarrow 2x-6 \geq x+3 \\ \Rightarrow x \geq 9 \text{ bulunur.}$$

$$C_3 = [9; +\infty) \text{ dir.}$$

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

$$\Rightarrow C = (-\infty; -3) \cup (-3; 1] \cup [9; +\infty) \text{ olur.}$$

#### Etkinlik – 4.255

Aşağıdaki eşitsizliklerin  $\mathbb{R}$ 'deki çözüm kümelerini bulunuz.

$$a. (2x-5)^7 (3x+1)^4 < 0$$

$$b. \frac{(x+2)^4 (x-2)^5}{(x-3)^2} \geq 0$$

$$c. (3x-5)^3 > 64$$

$$d. (x+2)^{-5} < -1$$

$$e. (2x-1)^4 \leq 4$$

$$f. (x-2)^{-4} \geq \frac{1}{16}$$

$$g. (3x-4)^5 > (2x+1)^5$$

$$h. (x-2)^6 \geq (2x+3)^6$$

#### Teorem – 4.118

$a \in \mathbb{R}$  ve  $m, n \in \mathbb{Z}$  olmak üzere;

1.  $0 < a < 1$  ve  $a^m < a^n$  ise  $m > n$  dir.

2.  $a > 1$  ve  $a^m < a^n$  ise  $m < n$  dir.

#### Etkinlik – 4.256

Teorem-4.118'i ispatlayınız.

#### Örnek – 4.159

Aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan en büyük  $x$  tam sayılarını bulunuz.

$$a. 4^{x-1} < \left(\frac{1}{8}\right)^{x+3}$$

$$b. \left(\frac{9}{25}\right)^{1-2x} > \left(\frac{125}{27}\right)^{2x+3}$$

#### Çözüm

$$a. 4^{x-1} < \left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} \Rightarrow (2^2)^{x-1} < (2^{-3})^{x+3} \\ \Rightarrow 2^{2x-2} < 2^{-3x-9} \\ \Rightarrow 2x-2 < -3x-9 \\ \Rightarrow x < \frac{-7}{5} \text{ bulunur.}$$

Eşitsizliği sağlayan en büyük  $x$  tam sayısı  $-2$  dir.

$$b. \left(\frac{9}{25}\right)^{1-2x} > \left(\frac{125}{27}\right)^{2x+3}$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^{1-2x} > \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right]^{2x+3} \\ \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2-4x} > \left(\frac{3}{5}\right)^{-6x-9}$$

$$\Rightarrow 2-4x < -6x-9 \Rightarrow x < \frac{-11}{2} \text{ bulunur.}$$

Eşitsizliği sağlayan en büyük  $x$  tam sayısı  $-6$  dir.



**Etkinlik – 4.257**

Aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan en küçük x tam sayılarını bulunuz.

a.  $(0,2)^{3x-1} < \frac{1}{25}$

b.  $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{9}{4}\right)^{2x-5}$

**Alıştırmalar ve Problemler – 4.11**

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a.  $(2^3)^2$    b.  $2^{(3^2)}$    c.  $(-2^2)^{-1}$    d.  $(-2^{-1})^2$

e.  $(\sqrt{3})^6$    f.  $(\sqrt{2})^{-3}$    g.  $[(-25)^0 \cdot 5^{-2}]^{-1}$

h.  $\frac{10^{45}}{4}$    i.  $\frac{6^{-23}}{9}$    j.  $4^4 \cdot 8^{-2}$    k.  $4^{-4} \cdot 24^2$

l.  $12^5 \cdot 25^6$    m.  $(1,2)^3 \cdot 5^4$    n.  $(-3)^{-2} \cdot (-6^{-1})$

o.  $\frac{(0,004)^{-3}}{(0,08)^{-2}}$    p.  $\frac{2^9 \cdot 3^8}{6^7}$    r.  $8^7 \cdot 25^{11} \cdot 10^{-21}$

s.  $\frac{10^2 \cdot 18^6 \cdot 75^3}{20^3 \cdot 45^7}$    t.  $\frac{(0,2)^5 \cdot (0,03)^4}{(0,0006)^3}$

u.  $(0,2)^{10} \cdot (0,02)^{-20} \cdot (0,002)^{10}$

2. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a.  $3^{35} + 3^{33}$    b.  $5^{29} - 5^{28}$

c.  $2^{23} + 2^{24} - 2^{25}$    d.  $3^{-10} + 3^{-11} - 3^{-12}$

e.  $\frac{9^9 + 2 \cdot 9^{10} + 9^{11}}{6 \cdot 3^3 \cdot 45^2}$    f.  $\frac{6^8 + 2^8}{12^8 + 4^8}$

g.  $\frac{(-2)^{-2008} - (-2)^{-2007}}{(-2)^{-2008} + (-2)^{-2007}}$    h.  $\frac{3^{-15} - 3^{-5}}{9^{-10} - 9^{-5}}$

i.  $\frac{2^{13} - 2}{2^7 + 2}$    j.  $\frac{9^{34} - 9}{3^{35} - 3^2}$

3. Aşağıdaki işlemleri yapınız. Sonuçları en sade biçimde yazınız.

a.  $(x-1)^3 \cdot (1-x)^{-4} \cdot (1-x)^5$    b.  $\frac{8^n + 8^n + 8^n}{2^n \cdot 2^n \cdot 2^n}$

c.  $\frac{9^{2n+1} \cdot 3^{2n}}{27^{2n-1}}$    d.  $2^{n+1} - 2^{n-1} - 2^{n-2}$

e.  $\frac{4^{3x-2} \cdot 8^{5-6x}}{16^{2-3x}}$    f.  $\frac{6^{x+2} - 9 \cdot 6^{x-1}}{3 \cdot 6^{x+1} + 5 \cdot 6^x}$

g.  $\frac{2^x - 4^x}{1 - 3 \cdot 2^x + 2^{x+1}}$    h.  $\frac{4^{2x} - 4^{x+1}}{2^{3x} + 2^{2x+1}}$

4. Aşağıdaki işlemleri yapınız. Sonuçları en sade biçimde yazınız.

a.  $(-2a^{-2} \cdot b^{-1})^3 \cdot (-4ab^2)^{-1}$

b.  $(-a^{-2}b^{-1}c^{-1})^{-2} \cdot (-a^{-1}b^2c)^{-1}$

c.  $\frac{(24a^2b^3)^2 \cdot (18bc^{-1})^5}{(27c^{-2})^4 \cdot (16ab^3)^3}$

d.  $a^n(a^2 + a) + a^2(a^n - a^{n-1})$

e.  $a^m(a^m - a^{n-m}) - a^{m-n}(a^{m+n} - a^n)$

f.  $\frac{a^{-1} - b^{-1}}{(a-b)^{-1}}$    g.  $\frac{a^{-1} + b^{-1}}{(ab)^{-1}}$

h.  $\frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} - b^{-1}}$

i.  $\frac{a+1}{a} - \frac{a^2+1}{a^2} - \frac{a^3-1}{a^4}$

j.  $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{a-b}{a^2b^3} + \frac{a^3-1}{ab^3}$

k.  $\frac{1}{a^{n-2}} + \frac{2-a}{a^{n-1}} - \frac{2a-2}{a^n}$

5.  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$  ve

$a^2 \mp 2ab + b^2 = (a \mp b)^2$  özdeşliklerinden de yararlanarak, aşağıdaki işlemleri yapınız.

a.  $\frac{a^{2x} - 2a^x + 1}{a^{2x} - 1} \cdot (a^x + 1)$

$$\begin{aligned} \text{b. } & \frac{4^x - 2^{x+1} + 1}{2^x - 1} - 2^x & \text{c. } & \frac{4^{12} - 4^8}{2^{15} - 2^{11}} \\ \text{d. } & \frac{2^{24} - 2^{22} - 2^{12} - 2^{11}}{2^{12} + 2^{11}} & \text{e. } & \frac{2^{18} - 2^{10} + 1}{2^{18} - 1} \\ \text{f. } & \frac{2^{2x+1} - 2^{x+2} + 2}{2^{x+1} - 2} & \text{g. } & \frac{18^x - 2^{3x}}{6^x - 2^{2x}} - 3^x \\ \text{h. } & \frac{9^x + 2 \cdot 6^x + 4^x}{9^x - 4^x} \cdot (3^x - 2^x) \end{aligned}$$

6. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

$$\begin{aligned} \text{a. } & \frac{(-6)^{3n} \cdot (-24)^{n-1}}{(-18)^{n-2} \cdot (-36)^{n+1}} \\ \text{b. } & \frac{(-12)^{2n} \cdot (-18)^{2n+2}}{(-4)^{2n+1} \cdot (-36)^n} \end{aligned}$$

7. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

$$\begin{aligned} \text{a. } & \frac{a^x}{1 - a^{y-x}} + \frac{a^y}{1 - a^{x-y}} & \text{b. } & \frac{a^n - b^{-n}}{a^{-n} - b^n} \\ \text{c. } & \frac{a^m - a^{-n}}{a^{-m} - a^n} & \text{d. } & \frac{1}{1 - 5^{10}} + \frac{1}{1 - 5^{-10}} \\ \text{e. } & \frac{7^7}{7^7 - 1} + \frac{7^{-7}}{7^{-7} - 1} & \text{f. } & \frac{4^8 - 8^{-8}}{4^{-8} - 8^8} \\ \text{g. } & \frac{a^x - a^{-2x}}{a^x + a^{-x} + 1} \\ \text{h. } & \frac{1}{a^{2n} + a^n + 1} + \frac{1}{a^n + 1 + a^{-n}} + \frac{1}{1 + a^{-n} + a^{-2n}} \end{aligned}$$

8.  $4^{n-1} = x$ ,  $3^{n+1} = y$  ve  $5^n = z$  olduğuna göre; aşağıdakileri  $x$ ,  $y$  veya  $z$  türünden yazınız.

$$\begin{aligned} \text{a. } & 2^{n+1} & \text{b. } & 9^{n-1} & \text{c. } & 5^{n+2} & \text{d. } & 25^n \\ \text{e. } & 12^{n+1} & \text{f. } & (0,75)^{n-1} & \text{g. } & 30^{n+1} & \text{h. } & 180^{n+1} \end{aligned}$$

9.  $x = 1 - 2^{n-1}$  ve  $y = 1 - 2^{2-n}$  olduğuna göre;  $y$ 'nin  $x$  türünden değerini bulunuz.

10.  $6^n = a$  olduğuna göre,  $3^{2n+1} \cdot (0,6)^{n-1}$  in  $a$  türünden değerini bulunuz.

11.  $15^n = a$  olduğuna göre,  $9^{n+1} \cdot (0,2)^{1-2n}$  in  $a$  türünden değerini bulunuz.

12.  $6^{x-1} = a \cdot 2^{x+1}$  olduğuna göre,  $3^{x+1}$  in  $a$  türünden değerini bulunuz.

13.  $2^{n-1} = a \cdot 3^{2-n}$  olduğuna göre,  $(0,25)^{2-n} \cdot 9^{n-1}$  in  $a$  türünden değerini bulunuz.

14. Aşağıdaki denklemlerin  $\mathbb{R}$ 'deki çözüm kümelerini bulunuz.

$$\begin{aligned} \text{a. } & (0,25)^{2x-1} = \frac{1}{4} & \text{b. } & 2^{x-1} \cdot 4^{x+1} = 16 \\ \text{c. } & (2x-3)^{-3} = 0 & \text{d. } & (3-4x)^5 = -1 \\ \text{e. } & (1-5x)^7 = (5+3x)^7 & \text{f. } & (2x-5)^4 = 81 \\ \text{g. } & \left(\frac{4-x}{2x+5}\right)^8 = 1 & \text{h. } & (3x-2)^6 = (x+4)^6 \\ \text{i. } & (2x-3)^{5x+1} = 1 & \text{j. } & (x-2)^{x^2-4} = -1 \\ \text{k. } & (x^2-x-7)^{x+1} = -1 & \text{l. } & (x^2-2x-3)^{x-1} = 0 \\ \text{m. } & (x+2)^{-4} = (x^2-4)^{-4} \\ \text{n. } & (x^2-3x-9)^2 = (x-3)^4 \end{aligned}$$

15. Aşağıdaki denklemlerin  $\mathbb{R}$ 'deki çözüm kümelerini bulunuz.

$$\begin{aligned} \text{a. } & 3^x - 3^{x-2} = 72 \\ \text{b. } & 3^{x+5} + 4 \cdot 3^{x+6} = 117 \\ \text{c. } & 81 \cdot 4^{x-1} - 6^{x+1} = 0 \\ \text{d. } & 6 \cdot 2^{x-2} = 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^x \\ \text{e. } & 8 \cdot 6^x - 6^{x+1} = 16 \cdot 3^x \end{aligned}$$

$$f. \left(\frac{9}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} = 2^{x-4}$$

$$g. \frac{9^x - 3^{x+2}}{3^{x+1} - 27} = 27$$

$$h. \frac{3 \cdot 2^x - 10^x}{2^{x+1} - 2^{x+2}} = 11 \cdot 5^{x-2}$$

$$i. 4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$$

$$j. 3^x (2^x + 8 \cdot 10^{x-3}) = 2^x (3^{2x-3} + 3^x)$$

16. Aşağıdaki denklemlerin  $R$ 'deki çözüm kümelerini bulunuz.

$$a. 9^x - 3^x = 6^{x+1} (3^{x-1} - 3^{-1})$$

$$b. \frac{4^{x+1} - 4}{2^{x+2} + 4} = 7$$

$$c. \frac{1}{1-3^x} + \frac{3^x}{1-3^{-x}} = \frac{4}{3}$$

$$d. \frac{10^{-x} - 5^x}{5^{-x} - 10^x} = 8$$

$$e. \frac{18^x - 2^x}{1-3^{-x}} = \frac{1}{18} + 6^x$$

$$f. \frac{9^x - 2 \cdot 3^x + 1}{9^x - 1} = \frac{-4}{5}$$

$$g. \frac{3^x - 3^{-x}}{3^{-2x} - 3^{2x}} = \frac{-3}{10}$$

$$h. (4^x - 1)^4 = (4^x + 2^{x+1} + 1)^2$$

17. Aşağıdaki denklem sistemlerini sağlayan  $(x, y)$  ikililerinin kümelerini bulunuz.

$$a. \begin{cases} 2 \cdot 3^{x+2} + 5^{y-1} = 31 \\ 6 \cdot 3^{x+1} - 5^{y-2} = 1 \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} 3 \cdot 2^x + 4^{-y} = 28 \\ 5 \cdot 2^{x-1} - 4^{1-y} = -54 \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} 2^x \cdot 4^{y+1} = 8^{x+2y} \\ 5^{x+y} \cdot 125^x = 25^{x-2y} \end{cases}$$

18.  $x, y \in Z$  olduğuna göre, aşağıdaki denklemleri sağlayan  $(x, y)$  ikililerinin kümelerini bulunuz.

$$a. 2^{x-y-1} + 3^{x+y} = 43$$

$$b. 3^{2x-y+3} = 7^{x+y-6}$$

$$c. 25^{x-y+5} = 125^{x+y}$$

$$d. 18 \cdot 3^x + 81 = 3^{x+y}$$

19. a.  $x, y \in Z^+$  olmak üzere,  $5^{n+2} = x^2$  ve  $5^{n-1} = y$  ise  $x + y$  nin en küçük değeri kaçtır?

b.  $x, y \in Z$  için aynı soruyu yanıtlayınız.

20. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan  $(a, x)$  ikililerinin kümelerini bulunuz.

$$a. \begin{cases} a^{x+4} = 27^{x+3} \\ a^x = 3^{3x+1} \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} a^{1-2x} = (2a)^{1-x} \\ a^{x+5} = 2^{x+9} \end{cases}$$

$$c. \begin{cases} a^{x+1} = (2a)^x \\ a^{2x} = (4a)^{2x-2} \end{cases}$$

$$d. \begin{cases} a^{x+1} = \left(\frac{a}{5}\right)^{3x} \\ a^{2x-1} = (5a)^x \end{cases}$$

21. Aşağıdaki sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

$$a. 2^{42}, 3^{30}, 5^{18}$$

$$b. 2^{-36}, 3^{-24}, 6^{-12}$$

$$c. \left(\frac{2}{3}\right)^{-21}, \left(\frac{4}{9}\right)^{-10}, \left(\frac{27}{8}\right)^8$$

$$d. (-2)^{-49}, (-3)^{-35}, (-5)^{-21}$$

22. Aşağıdaki eşitsizliklerin  $R$ 'deki çözüm kümelerini bulunuz.

$$a. (x-2)^3 (x+2)^2 < 0$$

$$b. (x+1)^{-5} (x-3)^{-4} \geq 0$$

$$c. (2x+3)^3 < 27$$

**d.**  $(x - 2)^6 < 1$

**e.**  $(x - 3)^5 \leq -32$

**f.**  $(3x + 1)^{-4} \leq 16^{-2}$

**g.**  $(3x - 1)^5 \geq (4x - 6)^5$

**h.**  $(x + 1)^{-3} \geq (2x - 1)^{-3}$

**i.**  $(2x + 1)^6 \leq (x + 4)^6$

**j.**  $(x - 1)^{-6} \geq (3x + 5)^{-6}$

**23.** Aşağıdaki eşitsizliklerin  $Z$ 'deki çözüm kümelerini bulunuz.

**a.**  $2^{x+1} < 4^{x-2}$

**b.**  $9^{2x-1} \leq 27^{x+1}$

**c.**  $(0,4)^{x+1} \geq (2,5)^{x-2}$

**d.**  $2^{3-x} \cdot 3^x < 2^{x-3} \cdot 6^x$

**e.**  $4 \cdot 6^{x-2} \leq 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$

**f.**  $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 \leq 0$

**24.** Aşağıdaki eşitsizliklerin  $Z$ 'deki çözüm kümelerini bulunuz.

**a.**  $(-5)^x < 25^{x+1}$

**b.**  $\left(-\frac{2}{5}\right)^{x+1} \leq (-0,2)^{x-1}$