3.1 – Kümelerin Çarpımı

3.1.1 – Sıralı İkili; Sıralı n'li

Etkinlik – 3.1

a. Bir listede kişilerin adları ve soyadları **(Ad, soyad)** sırasıyla yazılmış olsun. Bu durumda, **(İnci, Erol)** ve **(Erol, İnci)** ifadelerini açıklayınız.

(İnci, Erol) ifadesi, aynı anlama gelmek üzere küme ayıracı ile **{İnci, Erol}** biçiminde yazılabilir mi? Yazılırsa, anlam nasıl değişir?

b. Bir koşuya katılan yarışmacıların sırt numaraları 1, 2, 3, 4, 5 olsun. Koşunun sonuçları (Yarışmacının numarası, Sıralamadaki yeri) ifadeleri ile verilmiş ise; (2, 4) ve (4, 2) ifadelerini açıklayınız.

c. Bir zarfın üzerindeki "*Levent, 5. sokak, 7/3*" adresinin "*Levent, (5, 7, 3)*" biçiminde yazıldığını düşününüz. Adresteki sayılar değişik sıralamalarla yazılırsa, zarf kaç değişik adrese gidebilir?

Tanım – 3.1

*a ve b gibi iki elemanın belirli bir sırada dizilmesiyle oluşturulan yeni (a, b) nesnesine **sıralı ikili** –ya da kısaca **ikili**– denir.*

(a, b) ikilisinde a'ya **birinci bileşen**, b'ye **ikinci bileşen** denir. **Bileşen** yerine **koordinat** terimi de kullanılır.

Bu tanıma dayanılarak **sıralı üçlü, sıralı dörtlü, ..., sıralı n'li** ($n\in N^+$) tanımları yapılabilir. Şöyle ki;

a, b, c elemanları verilmiş olsun. (a, b) sıralı ikilisi ile c'nin oluşturduğu sıralı ikiliye **sıralı üçlü** denir. (a, b) ile c'den elde edilen bu yeni nesne (a, b, c) biçiminde gösterilir.

$(\mathbf{a,b,c})=((\mathbf{a,b}),\mathbf{c})$ dir.

Aynı yolla bir **sıralı dörtlü**

$(\mathbf{a,b,c,d})=((\mathbf{a,b,c}),\mathbf{d})$ olarak;

bir **sıralı n'li** de ($n\in N^+$)

$(\mathbf{a_1,a_2,\dots,a_{n-1},a_n})=((\mathbf{a_1,a_2,\dots,a_{n-1}}),\mathbf{a_n})$
olarak tanımlanabilir.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi; iki sıralı n'linin eşit olabilmesi için karşılıklı bileşenlerinin eşit olması gerekir.

$(a_1,a_2,a_3,\dots,a_n)=(b_1,b_2,b_3,\dots,b_n)$ ise

$a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3,\dots,\ a_n=b_n$ olmalıdır.

Örnek – 3.1

$(a,b)=(2x+1,x+y)=(x-2y,3x+4y)$ olduğuna göre, (a,b) ikilisini bulunuz.

Çözüm

$$\left.\begin{array}{l}2x+1=x-2y\\x+y=3x+4y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+2y=-1\\2x+3y=0\end{array}\right\}+$$

$y=-2;\ x=3$ olur.

$(a,b)=(2\cdot3+1,3-2)=(7,1)$ bulunur.

3.1.2 – Kümelerin Çarpımı

Etkinlik – 3.2

Bir sınıfta, numaraları $Ö=\{13,27,44\}$ kümesinden olan öğrencilerin matematik notlarının $N=\{A,B,C\}$ kümesinden olduğu bilinmektedir.

a. $(x,y)=$ (öğrencinin numarası, öğrencinin notu) olduğuna gore, olası (x, y) ikililerinin K kümesini liste yöntemi ile yazınız.

b. K kümesini oluşturan (x, y) ikililerinde $x\in Ö$ ve $y\in N$ olduğunu belirterek, K kümesini ortak özelik yöntemi ile yazınız.

Tanım – 3.2

*A ve B kümeleri verildiğinde, birinci bileşeni A kümesinden ve ikinci bileşeni B kümesinden alınarak oluşturulmuş tüm ikililerin kümesine, A ve B kümelerinin **kartezyen çarpımı** veya kısaca **çarpımı** denir.*

*Çarpım kümesini veren işleme de **kartezyen çarpma işlemi** veya **çarpma işlemi** adı verilir.*

A ve B kümelerinin çarpımı **AxB** biçiminde gösterilir; **A kartezyen çarpım B** veya **A çarpım B** diye okunur.

Tanıma göre,

$\mathbf{AxB}=\{(\mathbf{x,y})\,|\,\mathbf{x}\in\mathbf{A}\ \mathbf{ve}\ \mathbf{y}\in\mathbf{B}\}$ ve

$\mathbf{BxA}=\{(\mathbf{x,y})\,|\,\mathbf{x}\in\mathbf{B}\ \mathbf{ve}\ \mathbf{y}\in\mathbf{A}\}$ dir.

Tanımdaki **kartezyen** sözcüğü, Fransız matematikçisi **Rene Descartes**'in (1596-1650) adından gelir.

Örnek – 3.2

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{3, 5\}$ ise

$AxB = \{(a,3), (a,5), (b,3), (b,5), (c,3), (c,5)\}$;

$BxA = \{(3,a), (3,b), (3,c), (5,a), (5,b), (5,c)\}$;

$AxA = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$ olur.

Etkinlik – 3.3

$A = \{a, b\}$ ve $B = \{b, c, d, e\}$ kümeleri verilmiş olsun.

a. AxB ve BxA kümelerini yazınız.

$AxB \neq BxA$ olduğunu görünüz.

b. s(A), s(B), s(AxB) sayıları arasındaki bağıntıyı bulunuz.

A ve B kümeleri için, **$A \neq B$ ise $AxB \neq BxA$** dir.

AxB kümesinde A'nın her bir elemanı için B'nin elemanlarının sayısı kadar eleman bulunacağından,

$\mathbf{s(AxB)} = \mathbf{s(A)} \cdot \mathbf{s(B)}$ olur.

Tanım – 3.3

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ *kümeleri verildiğinde; birinci bileşeni* A_1 *kümesinden, ikinci bileşeni* A_2 *kümesinden, ..., n'yinci bileşeni* A_n *kümesinden alınarak oluşturulmuş tüm sıralı n'lilerin kümesine* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *kümelerinin* ***kartezyen çarpımı*** *denir.*

Tanım – 3.3'ün sembollerle ifadesi

$\mathbf{A_1xA_2x...xA_n}$

$= \{(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots \mathbf{x_n}) | \mathbf{x_1} \in \mathbf{A_1}, \mathbf{x_2} \in \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{x_n} \in \mathbf{A_n}\}$ dir.

Bu tanıma gore,

$\mathbf{AxBxC} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) | \mathbf{x} \in \mathbf{A} \text{ ve } \mathbf{y} \in \mathbf{B} \text{ ve } \mathbf{z} \in \mathbf{C}\}$ olur.

$A_1 = A_2 = \ldots = A_n$ olması durumunda

AxAx...A kümesi A^n biçiminde yazılabilir.

Özel olarak, **AxA** kümesi $\mathbf{A^2}$ ve **AxAxA** kümesi $\mathbf{A^3}$ ile gösterilir.

$A_1xA_2x...xA_n$ kümesinin elemanları yazılırken, A_1 kümesinin her bir elemanının yanına ikinci bileşen olarak A_2 kümesinin $s(A_2)$ değişik elemanı, onun yanına A_3 kümesinin $s(A_3)$ değişik elemanı, ..., onun yanına A_n kümesinin $s(A_n)$ değişik elemanı yazılabileceğinden

$\mathbf{s(A_1xA_2x...xA_n) = s(A_1) \cdot s(A_2) \ldots . s(A_n)}$ olur.

Özel olarak,

$\mathbf{s(AxBxC) = s(A) \cdot s(B) \cdot s(C)}$ dir.

3.1.3 – AxB Kümesinin Şema ve Grafikle Gösterilmesi

Venn Şemasıyla Gösterme

A ve B kümeleri –ortak elemanları olsa bile– ayrık Venn şemalarıyla gösterilirler. AxB kümesinin elemanı olan ikililer, birinci bileşenden ikinci bileşene yönlendirilmiş oklarla belirtilirler.

AxB nin bu gösteriliş biçimi pek kullanışlı değildir.

Örnek – 3.3

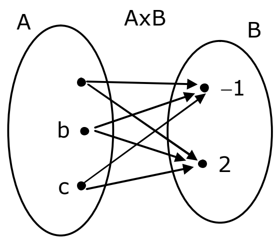
$A = \{a, b, c\}$ ve

$B = \{-1, 2\}$ ise

AxB kümesi

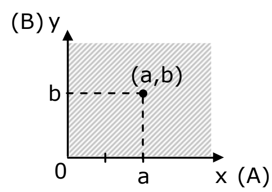
Venn şeması ile,

yandaki gibi gösterilir.



Kartezyen Koordinat Şemasıyla Gösterme

A kümesinin elemanları –genellikle– yatay olarak çizilen bir 0x ışını üzerinde; B kümesinin elemanları da buna dik olarak çizilen 0y ışını üzerinde <u>rastgele</u> alınan noktalarla gösterilirler. Bu noktalardan ışınlara çizilen paralel doğruların kesim noktaları, AxB kümesinin elemanlarına karşılık gelen noktalar olurlar. Bu noktaların kümesine AxB kümesinin



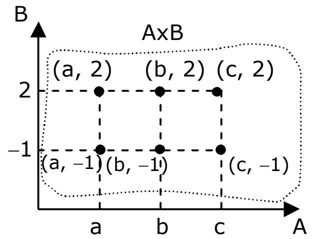
grafiği denir. Grafiği oluşturan noktalar bir Venn şeması ile çevrelenebilir.

Bu gösterimde AxB'nin elemanları çeyrek düzlemin noktalarına –bir ölçüde– rastgele eşlendikleri için, grafik Venn şeması niteliğindedir.

Kartezyen koordinat şeması –genellikle– bileşenlerinden en az biri gerçek sayı olmayan ikililerin kümelerinin gösterilmesinde kullanılır.

Örnek – 3.4

$A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{-1, 2\}$ ise AxB kümesinin grafiği yandaki gibi olur.



Analitik Düzlemde Gösterme

Önce, İlköğretimde öğrendiğiniz **koordinat sistemi** kavramını hatırlatalım. R (gerçek sayılar) kümesinin elemanlarının bir doğrunun noktaları ile; RxR kümesinin elemanlarının da bir düzlemin noktaları ile bire bir eşlenebileceğini gösterelim:

Sayı Doğrusu

Aksiyom –3.1

(Cetvel Aksiyomu)

Bir doğru üzerinde alınan her bir noktaya bir tek gerçek sayı ve karşıt olarak her gerçek sayıya bu doğru üzerinde bir tek nokta karşılık gelir.

Aksiyom – 3.1'de belirtilen türdeki eşlemelere **bire bir** ve **örten** eşlemeler denir.

Koordinat kavramı bu aksiyom üzerine kurulur.

Tanım – 3.4

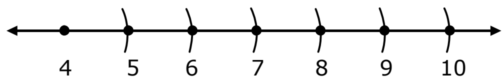
*Noktaları ile gerçek sayılar arasında bire bir ve örten eşleme kurulmuş bir doğruya **koordinat sistemi** ya da **sayı doğrusu** denir.*

*Bu eşlemede bir noktaya karşılık gelen gerçek sayıya o noktanın **koordinatı** adı verilir.*

Bir P noktası, x koordinatı ile birlikte P(x) biçiminde gösterilir.

Sezgimize dayanarak, gerçek sayılar ile bir doğrunun noktaları arasında **Cetvel Aksiyomu** ile kurulan eşlemenin, bir cetvelin kenarındaki sayıların düzeni içinde olması gerektiğini düşünürüz. Eşlemede sayılar büyüklük sırasına dizilmeli ve ardışık tam sayılar –belli bir ölçüde açılmış pergelle, pergelin açıklığı bozulmadan, bir doğru üzerinde elde edilen ardışık noktalar gibi– eşit aralıklı noktalara eşlenmelidir.

Şekli inceleyiniz.

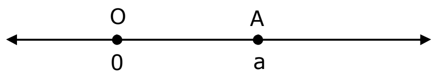


Rastgele yapılacak bir eşlemede koordinat kavramının bir işe yaramayacağı açıktır.

Aksiyom –3.2

(Sistem Seçme Aksiyomu)

Bir doğru üzerinde O ve A gibi iki nokta verildiğinde, O'nun koordinatı 0(sıfır) ve A'nınki pozitif bir gerçek sayı olacak biçimde bir ve yalnız bir koordinat sistemi seçilebilir.



Şekilde A noktasının koordinatı olan "a" sayısı istenildiği gibi seçilebilir. Ancak doğru üzerindeki belirli O ve A noktaları için, örneğin O(0) ve A(1) olarak seçilecek koordinat sistemi yalnız bir tanedir.

Tanım – 3.5

*Bir koordinat sisteminde, verilen iki noktanın koordinatlarının farkının mutlak değerine bu iki nokta arasındaki **uzaklık** denir.*

A ve B noktaları arasındaki uzaklık $|AB|$ biçiminde gösterilir. A(a) ve B(b) ise $|AB| = |b - a|$ dır. $|AB|$ ifadesi aynı zamanda, $[AB]$ doğru parçasının uzunluğu anlamına gelir.

Örneğin; $A(-2)$ ve $B(3)$ ise $|AB| = |3 - (-2)|$

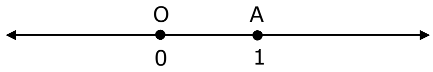
$\Rightarrow |AB| = 5$ birim olur.

✚ Yukarıdaki aksiyomlara ve tanımlara göre, tüm farklı gerçek sayı birlileri bir doğru üzerinde farklı birer noktaya karşılık gelir.

$A(3)$, $B(-14)$, $C(127)$, … gibi.

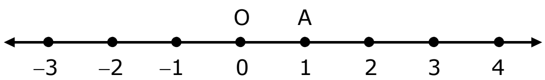
Diğer taraftan, bir doğru üzerindeki nokta kümelerinin en çok bir **boyut**u –uzunluk boyutu– olabilir. Bunlar dikkate alınarak; tüm gerçek sayı birlilerinin kümesine **bir boyutlu uzay** denir.

Şekildeki OA doğrusu bir boyutlu uzayın bir koordinat sistemidir.



Bu doğrunun her bir noktasına hangi gerçek sayının karşılık getirileceği bellidir. O noktasına koordinat sisteminin **başlangıç noktası** (ya da **orijin**i) denir. $|\mathbf{OA}|$ uzunluğu bu sistemdeki **birim** uzunluktur.

O(0) ve A(1) noktaları ile belirtilmiş olan koordinat sistemini **tam sayılar**la donatmak için, pergel $|OA|$ kadar açılır; A'dan başlayarak A'nın sağına doğru ve O'dan başlayarak O'nun soluna doğru, pergelin her adımına karşılık gelen noktalar işaretlenir; tam sayılar bu noktalara büyüklük sırasına gore dizilirler:



Ardışık iki tam sayıya karşılık gelen noktaların belirttiği her doğru parçası, gerekli sayıda eş parçalara bölünerek istenilen her **rasyonel sayı** da karşılık geldiği noktaya eşlenir.

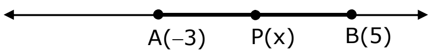
Koordinat sisteminde **irrasyonel sayılar**ın eşleneceği noktalar, bunların tanımlarına dayanılarak uygun yöntemlerle bulunur. Bir doğrunun noktaları ile gerçek sayılar arasında böyle bir eşlemenin kurulması, bir boyutlu geometrik şekillerle gerçek sayı kümeleri arasında da eşlemelerin kurulabilmesini olanaklı kılar.

Örnek – 3.5

Uçları $A(-3)$ ve $B(5)$ olan $[AB]$ doğru parçasına karşılık gelen gerçek sayılar kümesini bulalım:

$[AB]$ doğru parçası, A ve B ile bunların arasındaki noktaların kümesidir.

$A(-3)$ ve $B(5)$ noktaları arasındaki bütün P(x) noktalarının x koordinatları $-3 < x < 5$ koşuluna uyar.



Buna göre, $[\mathbf{AB}]$ geometrik ifadesi ile

$\{\mathbf{x} | -\mathbf{3} \le \mathbf{x} \le \mathbf{5}\}$ kümesi aynı bir geometrik şekle karşılık gelirler.

Öyleyse;

$[AB] = \{x | -3 \le x \le 5,\ x \in R\}$ eşitliği yazılabilir. Belirtilen küme, "$[-3,5]$" biçiminde de gösterilir.

Noktaların Sıralı n'lilerle Eşleştirilmesi

17. yüzyılda Fransız matematikçileri Rene Descartes ile Pierre de Fermat, bir doğrunun noktaları ile gerçek sayılar arasındaki eşlemelerden yararlanarak, bir düzlemin noktaları ile (x, y) gerçek sayı ikilileri arasında bire bir ve örten eşlemeler yapılabileceğini gösterdiler. Aynı yaklaşımla, üç boyutlu uzayın noktaları ile (x, y, z) gerçek sayı üçlüleri arasında da bire bir ve örten eşlemeler yapılabildi. Bu eşlemeler iki veya üç boyutlu geometrik şekillerle, gerçek sayı ikililerinin veya gerçek sayı üçlülerinin kümeleri arasında eşlemeler yapılabilmesini; bu da geometri problemlerinin cebir problemlerine dönüştürülmesini ya da tersini mümkün kıldı. Bu sayede cebir veya geometri problemlerinden birinin çözümünde diğerinin çözüm yöntemlerinin kullanılabilmesi sağlandı.

Şekillerle sayı kümeleri arasında yapılan bu eşlemelerin sonucu olarak matematiğin **analitik geometri** dalı ortaya çıktı.

Analitik geometriyi ayrı bir derste öğreneceksiniz. Biz, matematik konularımızda analitik geometri bilgilerinden, bağıntı ve fonksiyonların grafiklerini çizmede yararlanacağız. Grafiklerle, şekil-sayı kümesi eşlemelerinin sağladığı olanakları değerlendireceğiz.

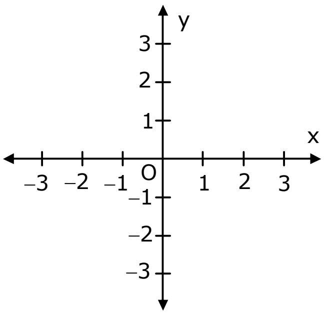
Analitik Düzlem

Bir E düzleminde birbiriyle başlangıç noktalarında dik kesişen iki sayı doğrusu alalım. Bunlardan birine **x ekseni**, diğerine **y ekseni** diyelim. Bu dik eksenlerin oluşturduğu sistemi, E düzleminin noktaları ile gerçek sayı ikililerini eşlemede kullanacağız.

Evrensel küme düzlem olduğunda bu düzlem, üzerinde çalışılan sayfanın düzlemi olarak seçilir. Genellikle, x ekseni sayfanın alt kenarına paralel çizilir. Bu yüzden x eksenine **yatay eksen**, y eksenine **düşey eksen** de denir.

Koordinatlar yatay eksende soldan sağa, düşey eksende aşağıdan yukarıya doğru artar.

Yandaki şekli inceleyiniz.



Kartezyen koordinat sistemi

Başlangıç noktalarında birbirine dik olan sayı doğrularının oluşturduğu bu sistem, düzlemin bir **koordinat sistemi**dir.

Gerçek sayı ikilileri ile düzlemin noktalarının eşlendiği başka koordinat sistemleri de tanımlanmıştır. Burada tanımladığımız koordinat sistemine, **Rene Descartes**'in anısına **kartezyen koordinat sistemi**; bu sistemde, düzlemin noktalarına eşlenen (x, y) gerçek sayı ikililerinin x ve y bileşenlerine de **kartezyen koordinatlar** denir. Özel olarak; birinci bileşen **apsis**, ikinci bileşen **ordinat** diye adlandırılır.

Tanım – 3.6

Üzerinde bir koordinat sistemi seçilmiş olan düzleme ***analitik düzlem*** *denir.*

Teorem – 3.1

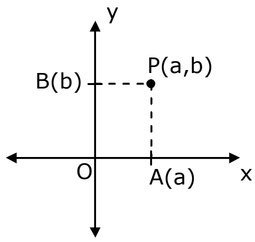
R gerçek sayılar kümesi olmak üzere; bir analitik düzlemin noktaları ile $RxR = \{(x,y) \mid x \in R,\ y \in R\}$ *kartezyen çarpımının (x, y) ikilileri arasında bire bir ve örten bir eşleme kurulabilir. Yani düzlemin her bir noktasına bir tek (x, y) ikilisi ve karşıt olarak, her bir (x, y) ikilisine düzlemin bir tek noktası karşılık getirilebilir.*

Analitik düzlemin bir P noktası ile bir (x, y) ikilisi arasındaki eşleme P(x, y) biçiminde gösterilir.

Bu teoremin ispatını, analitik geometri derslerinizde yaparsınız.

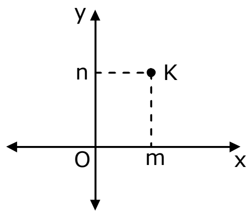
Biz, eşlemenin nasıl yapıldığını hatırlatalım:

Bir (a, b) ikilisine analitik düzlemde karşılık gelen noktayı bulmak için, x ekseni üzerindeki A(a) noktasından x eksenine; y ekseni üzerindeki B(b) noktasından y eksenine birer dikme çizilir.



Dikmelerin kesim noktası (a, b) ikilisine eşlenecek P noktası olur.

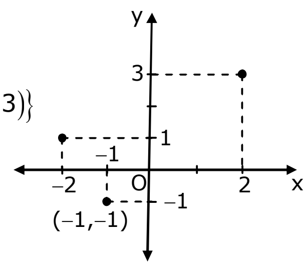
Analitik düzlemin bir K noktasına karşılık gelen ikiliyi bulmak için de; K noktasından eksenlere birer dikme çizilir. x eksenine çizilen dikmenin ayağı ikilinin birinci bileşeni; y eksenine çizilen dikmenin ayağı ikinci bileşeni olur.



Bir (x, y) ikilisine koordinat sisteminde karşılık gelen P noktasına {(x, y)} nin **grafiği** denir.

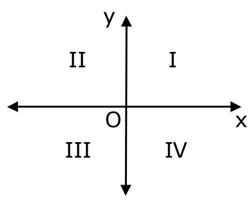
Örnek – 3.6

Analitik düzlemde
$A = \{(-2,1), (-1,-1), (2,3)\}$
kümesinin grafiği, yandaki koordinat sisteminde belirtilen üç nokta olur.



✚ Koordinat eksenleri analitik düzlemi dört bölgeye (dördüle) ayırır.

Koordinat eksenlerinin bu dört bölge ile ortak noktaları yoktur.



Bu bölgelerin ve eksenlerin eşlendiği kümeler şöyledir:

I. bölge $= \{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0,\ (x,y) \in RxR\}$

II. bölge $= \{(x,y) \mid x < 0,\ y > 0,\ (x,y) \in RxR\}$

III. bölge $= \{(x,y) \mid x < 0,\ y < 0,\ (x,y) \in RxR\}$

IV. bölge $= \{(x,y) | x > 0,\ y < 0,\ (x,y) \in RxR\}$

$Ox = \{(x,y) | x \in R,\ y = 0\}$

$Oy = \{(x,y) | x = 0,\ y \in R\}$

$\mathbf{Ox} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) | \mathbf{x} \in \mathbf{R},\ \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$ kümesine dikkat ediniz. Buradaki (x, y) ikililerinin y bileşeni için, $\mathbf{y = 0}$ koşulu getirilmiş; x bileşeninin ise evrensel kümedeki her değeri alabileceği belirtilmiştir. Bu durumda, $\mathbf{y = 0}$ denklemi **0x** kümesini belirtmek üzere kullanılabilir. x eksenine $\mathbf{y = 0}$ **doğrusu** da denir.

Aynı açıklamalar $\mathbf{Oy} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) | \mathbf{x} = \mathbf{0},\ \mathbf{y} \in \mathbf{R}\}$ kümesi için de geçerlidir. y ekseni kısaca $\mathbf{x = 0}$ denklemi ile belirtilir; $\mathbf{x = 0}$ **doğrusu** diye adlandırılır.

Genelleştirelim:

$\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) | \mathbf{x} \in \mathbf{R},\ \mathbf{a} \in \mathbf{R},\ \mathbf{y} = \mathbf{a}\}$ kümesi, analitik düzlemdeki $\mathbf{y = a}$ **doğrusu**na;

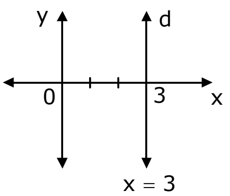
$\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) | \mathbf{x} = \mathbf{a},\ \mathbf{a} \in \mathbf{R},\ \mathbf{y} \in \mathbf{R}\}$ kümesi de, analitik düzlemdeki $\mathbf{x = a}$ **doğrusu**na karşılık gelir.

Bunu analitik geometri derslerinizde ispatlayacaksınız.

Örnek – 3.7

$d = \{(x,y) | x = 3,\ y \in R\}$ kümesi $x = 3$ doğrusunu gösterir. Analitik düzlemde apsisi 3 olan tüm noktalar (3, 0) noktasından x eksenine çizilen dik doğru üzerinde bulunurlar.

Yandaki şekilde d kümesinin grafiği verilmiştir.

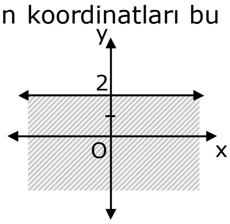


Örnek – 3.8

$K = \{(x,y) | x \in R,\ y \le 2\}$ kümesi kısaca "$y \le 2$" eşitsizliği ile belirtilebilir.

Analitik düzlemde $y = 2$ doğrusunun üzerindeki ve altındaki bütün noktaların koordinatları bu koşula uyar.

Yanda K kümesinin grafiği verilmiştir.



Etkinlik – 3.4

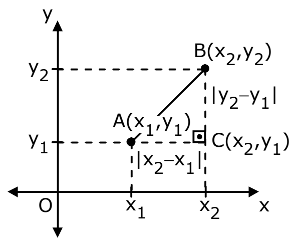
Aşağıda verilen kümelerin grafiklerini çiziniz.

a. $A = \{(x,y) | x = -2,\ y \in R\}$
b. $B = \{(x,y) | x \in R,\ y = 2\}$
c. $C = \{(x,y) | x \le 2,\ y \ge -1,\ (x,y) \in RxR\}$
d. $D = \{(x,y) | x \le 3,\ y = 1,\ x \in R\}$
e. $E = \{(x,y) | x = 2,\ -1 < y \le 3,\ y \in R\}$
f. $F = \{(x,y) |\ |x| \le 2,\ y = 3,\ x \in R\}$
g. $G = \{(x,y) | 1 \le x < 3,\ 1 \le y \le 2,\ (x,y) \in RxR\}$
h. $H = \{(x,y) | x < 2,\ x \in R,\ y \in Z\}$

Analitik Düzlemde İki Nokta Arasındaki Uzaklığın Bulunması

Analitik düzlemin herhangi iki noktası $A(x_1,y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$ olsun. $|AB|$ uzaklığını bulacağız.

Şekli inceleyiniz.



A ve B'den eksenlere çizilen paralel doğrularla belirtilen ABC dik üçgeninde,

$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$

$\Rightarrow |AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$\Rightarrow |\mathbf{AB}| = \sqrt{(\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})^2 + (\mathbf{y_2} - \mathbf{y_1})^2}$ bulunur.

Örneğin; $A(-2,1)$ ve $B(4,-2)$ ise

$|AB| = \sqrt{[4-(-2)]^2 + (-2-1)^2}$

$\Rightarrow |AB| = 3\sqrt{5}$ birim olur.

Doğrunun Denklemi

Teorem – 3.2

Analitik düzlemde, değişen P(x, y) noktalarının koordinatları arasında; a ve b gerçek sayılarından en az biri sıfırdan farklı olmak üzere,

$$\mathbf{ax + by + c = 0}$$

bağıntısı varsa bu noktalar aynı bir ***d*** *doğrusu üzerinde bulunurlar.*

Karşıt olarak; aynı bir d doğrusu üzerinde bulunan noktaların koordinatları arasında

$$\mathbf{ax + by + c = o}$$

bağıntısı vardır.

$ax + by + c = 0$ bağıntısına **doğrunun denklemi** denir. Doğru ile denklemi, $\mathbf{d: ax + by + c = 0}$ biçiminde gösterilir.

$ax + by + c = 0$ denklemi

$a = 0$ ise, $\mathbf{y = -\frac{c}{b}}$ doğrusunu;

$b = 0$ ise, $\mathbf{x = -\frac{c}{a}}$ doğrusunu;

$c = 0$ ise, orijinden geçen bir doğruyu gösterir.

$ax + by + c = 0$ denkleminde $b \neq 0$ ise denklem, $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ ya da $\mathbf{y = mx + n}$ biçiminde yazılabilir.

Teorem – 3.2,

$$\mathbf{d} = \{(\mathbf{x,y}) | \mathbf{ax + by + c = 0}, \ (\mathbf{x,y}) \in \mathbf{RxR}\}$$

kümesinin elemanları ile, analitik düzlemin belirli bir **d** doğrusunun noktaları arasında bire bir ve örten bir eşleme yapılabileceğini belirtir.

Bu teoremin ispatını analitik geometri derslerinizde yapacaksınız.

✚ Kartezyen koordinat sistemi konusundaki bilgilerimizi böylece tazeleyip geliştirdikten sonra, şimdi de, gerçek sayı kümelerinin kartezyen çarpımlarının grafiklerinin çizimine örnekler verelim:

Örnek – 3.9

Aşağıdaki denklemler koordinat sisteminde birer doğruya karşılık gelirler. Bu doğruların grafiklerini çiziniz.

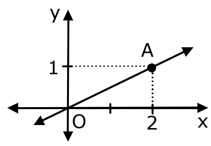
a. $x - 2y = 0$ **b.** $2x + 3y + 6 = 0$
c. $y = 3x - 1$

Çözüm

Bir doğruyu çizmek için iki noktasını belirtmek yeter.

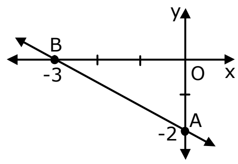
a. $x = 0$ için $y = 0$ ve $x = 2$ için $y = 1$ dir.

Grafik O(0,0) ve A(2,1) noktalarından geçen doğrudur.



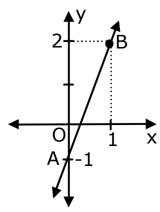
b. $x = 0$ için $y = -2$ ve $y = 0$ için $x = -3$ tür.

Grafik A(0,-2) ve B(-3,0) noktalarından geçen doğrudur.



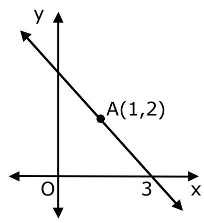
c.

Grafik A(0,-1) ve B(1,2) noktalarından geçen doğrudur.



Örnek – 3.10

Şekilde verilen doğrunun denklemini yazınız.



Çözüm

Doğrunun denklemi $y = mx + n$ olduğuna göre, m ve n kat sayılarını bulmalıyız.
Verilen doğru A(1,2) ve B(3,0) noktalarından geçmektedir. Öyleyse, (1,2) ve (3,0) ikilileri denklemi sağlamalıdır.

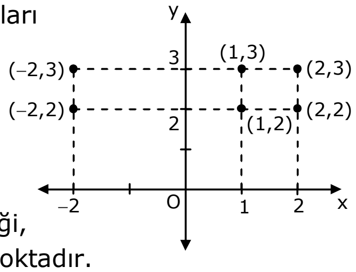
$$\left.\begin{aligned} 2 &= m \cdot 1 + n \\ 0 &= m \cdot 3 + n \end{aligned}\right\} \Rightarrow m = -1, n = 3 \text{ bulunur.}$$

Doğrunun denklemi $y = -x + 3$ olur.

Örnek – 3.11

$A=\{-2,1,2\}$ ve $B=\{2,3\}$ olduğuna göre, AxB kümesinin grafiğini çizelim:

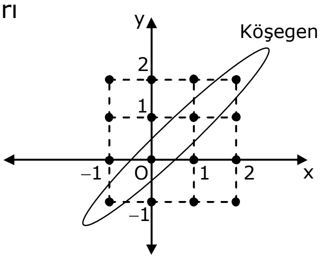
A kümesinin elemanları x ekseni üzerinde, B kümesinin elemanları y ekseni üzerinde gösterilmiştir.
AxB kümesinin grafiği, şekilde belirtilen 6 noktadır.



Örnek – 3.12

$A=\{-1,0,1,2\}$ olduğuna göre, AxA kümesinin grafiğini çizelim:

A kümesinin elemanları hem x ekseni hem y ekseni üzerinde gösterilmiştir.
Koordinatları $[-1,2]$ aralığındaki tam sayılar olan bütün noktalar grafiğe aittir.



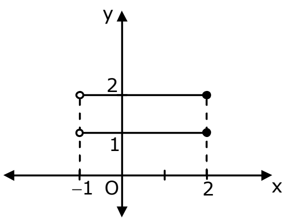
AxA kümesinin alt kümesi olan $\Delta=\{(\mathbf{x},\mathbf{x})|\mathbf{x}\in\mathbf{A}\}$ kümesine AxA kümesinin **köşegeni** denir.

$A=\{-1,0,1,2\}$ kümesi için AxA'nın köşegeni,
$\Delta=\{(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,2)\}$ dir.

Örnek – 3.13

$A=\{x|-1<x\le 2, x\in R\}$ ve $B=\{1,2\}$ olduğuna göre, AxB kümesinin grafiğini çizelim:

Grafik, apsisi $(-1,2]$ aralığında ve ordinatı 1 olan noktalarla, apsisi $(-1,2]$ aralığında ve ordinatı 2 olan noktalardan oluşur.



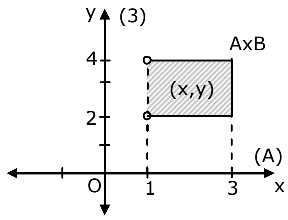
$(-1,1)$ ve $(-1,2)$ noktaları AxB kümesine ait olmadığından, içi boş çemberciklerle; $(2,1)$ ve $(2,2)$ noktaları kümeye ait olduğundan içi dolu çemberciklerle gösterilmiştir.

Örnek – 3.14

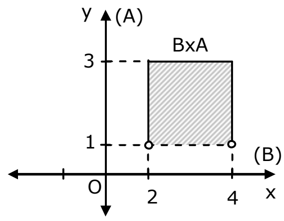
$A=\{x|\ 1<x\le 3, x\in R\}$ ve

$B=\{x|\ 2\le x\le 4, x\in R\}$ olduğuna göre, AxB ve BxA kümelerinin grafiklerini çizelim:

AxB kümesinin grafiği yandaki koordinat sistemindeki taralı bölgedir. x, y ∈ R olmak üzere
1< x ≤ 3 ve
2 ≤ y ≤ 4 koşuluna uyan her nokta grafiğe aittir.

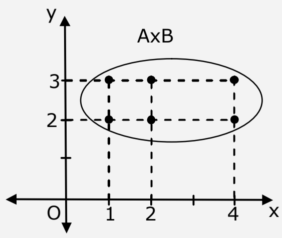


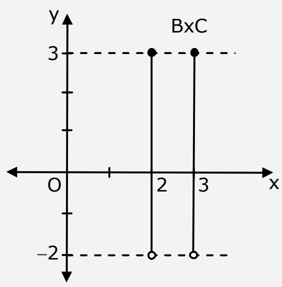
BxA kümesinin grafiği, yandaki koordinat sistemindeki taralı bölgedir. İnceleyiniz.



Etkinlik – 3.5

AxB ve BxC kümelerinin grafikleri yanda verilmiştir.





a. AxC kümesinin grafiğini çiziniz.

b. CxA kümesinin grafiğini çiziniz.

c. CxC kümesinin grafiğini çiziniz.

3.1.4 – Kümelerde Çarpma İşleminin Özelikleri

Etkinlik – 3.6

$A=\{-2,1,3\}$, $B=\{-1,2\}$, $C=\{2,3\}$ olduğuna göre;

a. AxB ve (AxB)xC kümelerini yazınız.

b. BxC ve Ax(BxC) kümelerini yazınız. (AxB)xC ve Ax(BxC) kümeleri arasındaki bağıntıyı bulunuz.

c. $Ax(B\cup C)$, AxB ve AxC kümelerini yazarak aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

d. $(B\cap C)xA$, BxA ve CxA kümelerini yazarak aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

e. $Ax(C-B)$, AxC ve AxB kümelerini yazarak aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

f. $(A\Delta B)xC$, AxC ve BxC kümelerini yazarak aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

Teorem – 3.3

a. $\mathbf{A}\times\varnothing=\varnothing=\varnothing\times\mathbf{A}$ *dır.*

b. *Kümelerde çarpma işleminin **değişme** özeliği yoktur.*

c. *Kümelerde çarpma işleminin **birleşme** özeliği vardır.*

<u>İspat</u>

$Ax\varnothing=\{(x,y)\,|\,x\in A\wedge y\in\varnothing\}$ dir. $Ax\varnothing$ kümesini oluşturacak (x, y) ikililerinin y bileşenleri bulunmadığından böyle (x, y) ikilileri de yoktur.

O halde, $Ax\varnothing=\varnothing$ dır. Bunu matematiksel bir dille söyleyelim :

a. $Ax\varnothing=\{(x,y)\,|\,x\in A\wedge y\in\varnothing\}$

$\Rightarrow Ax\varnothing=\{(x,y)\,|\,(x\in A\wedge y\in\varnothing)\vee(x,y)\in\varnothing\}$

$((x,y)\in\varnothing\equiv 0$ ve $p\vee 0\equiv p$ olduğundan$)$

$\Rightarrow Ax\varnothing=\{(x,y)\,|\,[(x\in A)\wedge 0]\vee(x,y)\in\varnothing\}$

$\Rightarrow Ax\varnothing=\{(x,y)\,|\,0\vee(x,y)\in\varnothing\}$

$\Rightarrow Ax\varnothing=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in\varnothing\}$

$\Rightarrow \mathbf{A}\times\varnothing=\varnothing$ bulunur.

$\varnothing\times\mathbf{A}=\varnothing$ olduğu da aynı yolla gösterilir.

b. $(\forall A,\ B$ için $A\neq B\Rightarrow AxB=BxA)$ önermesinin doğru <u>olmadığını</u> göstereceğiz.

"$\forall(x,y),\ p(x,y)$" türündeki bir önermenin yanlış olduğunu göstermek için p(x, y)'nin yanlış olduğu bir örnek vermek yeterlidir.

$A=\{a,b\}$ ve $B=\{b,c\}$ için,
$AxB=\{(a,b),(a,c),(b,b),(b,c)\}$ ve
$BxA=\{(b,a),(b,b),(c,a),(c,b)\}$ olup
$AxB\neq BxA$ dır.

c. $(AxB)xC=Ax(BxC)$ olduğunu göstereceğiz.

$(AxB)xC=\{((x,y),z)\,|\,(x,y)\in(AxB)\wedge(z\in C)\}$
$=\{(x,y,z)\,|\,(x\in A)\wedge(y\in B)\wedge(z\in C)\}$
$=\{(x,y,z)\,|\,(x\in A)\wedge[(y\in B)\wedge(z\in C)]\}$
$=\{(x,(y,z))\,|\,(x\in A)\wedge(y,z)\in(BxC)\}$
$=Ax(BxC)$

Teorem – 3.4

Kümelerde çarpma işleminin

a. *birleşme işlemi üzerine,*
b. *kesişme işlemi üzerine,*
c. *fark işlemi üzerine,*
d. *simetrik fark işlemi üzerine*

*sağdan ve soldan **dağılma özeliği** vardır.*

Teorem – 3.4'ü sembollerle ifade edelim:

a. $Ax(B\cup C)=(AxB)\cup(AxC)$ ve
$(A\cup B)xC=(AxC)\cup(BxC)$;

b. $Ax(B\cap C)=(AxB)\cap(AxC)$ ve
$(A\cap B)xC=(AxC)\cap(BxC)$

c. $Ax(B-C)=(AxB)-(AxC)$ ve
$(A-B)xC=(AxC)-(BxC)$

d. $Ax(B\Delta C)=(AxB)\Delta(AxC)$ ve
$(A\Delta B)xC=(AxC)\Delta(BxC)$ dir.

Etkinlik – 3.7

Teorem – 3.4'ü önerme işlemlerinden yararlanarak ispatlayınız.

Etkinlik – 3.8

$A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, $C=\{3,4,5\}$ olduğuna göre; aşağıdaki kümeleri en kısa yoldan yazınız.

a. $(A\times C)\cup(B\times C)$

b. $(A\times B)\cap(A\times C)$

c. $(A \times C) - (B \times C)$

d. $(A \times B) \Delta (A \times C)$

Teorem – 3.5

A, B, C, D birer küme olmak üzere;

a. $(\mathbf{A \subset B \wedge C \subset D}) \Rightarrow (\mathbf{AxC \subset BxD})$ *dir.*
b. $(\mathbf{A \subset B}) \Rightarrow (\mathbf{AxC \subset BxC})$ *dir.*
c. $(\mathbf{A \subset B}) \Rightarrow (\mathbf{AxA \subset AxB})$ *dir.*
d. $(\mathbf{A \subset B}) \Rightarrow (\mathbf{AxB \subset BxB})$ *dir.*

Etkinlik – 3.9

Teorem – 3.5 i **alt küme** ve **kartezyen çarpım kümesi** tanımlarından yararlanarak ispatlayınız.

Alıştırmalar ve Problemler – 3.1

1. 30 kişilik bir sınıfta öğrenciler 1'den 30'a kadar; öğrencilerin aldıkları dersler 1'den 8'e kadar; öğrencilerin bu derslerden ilk sınavlarda aldıkları notlar 1'den 100'e kadar doğal sayılarla numaralanmıştır. Öğrenciler, dersler ve öğrencilerin aldıkları notlar sıralı üçlülerle gösterilmiştir. Ancak sıralı üçlülerdeki bileşenlerden hangisinin hangi çokluğa karşılık geldiği belirtilmemiştir.

Buna göre; aşağıda verilen sıralı üçlülerin hangi anlamlara gelebileceğini açıklayınız.

a. (23, 4, 87) **b.** (44, 16, 5)
c. (12, 7, 3) **d.** (5, 36, 4)
e. (4, 5, 6) **f.** (14, 14, 4)
g. (24, 6, 18) **h.** (48, 36, 9)

2. Aşağıda belirtilen ikili ve üçlüleri bulunuz.

a. $(2x-3,\ 5) = (x+4,\ y+3)$
b. $(3x-4,\ 2y+5) = (x-y,\ x+y)$
c. $(2x-y, z+3, y+z) = (y-z, x+y, x-3)$
d. $(x-y,\ y-z,\ x+t) = (y-z,\ x-t,\ y+z)$

3. Ali, Can ve Mert'in her birinin doğum yeri Bolu, Bursa ve İzmir'den biridir.

(x, y) = (Kişinin adı, Doğum yeri)

olduğuna göre, tüm olası ikililerin kümesini yazınız.

4. AxB = {(1,3), (3,5), (3,4), (2,4), (1,5), (3,3), (1,4), (2,3), (2,5)}

olduğuna göre,

$A - B$ kümesini yazınız.

5. AxBxC = {(1,5,1),(1,2,3),(2,2,1),(2,2,3), (1,2,1),(2,5,1),(1,5,3),(2,5,3)}

olduğuna göre,

a. $(AxB) \cup (BxC)$ kümesini yazınız.

b. BxCxA kümesini yazınız.

6. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4\}$, $C = \{3,5\}$ olduğuna göre;

a. AxB, BxC ve CxA kümelerini yazınız.

b. $(A \cup B)xC$ ve $Bx(A \cap C)$ kümelerini yazınız.

c. $(AxB) \cup (AxC)$ kümesini yazınız.

d. $(BxA) \cap (BxC)$ kümesini yazınız.

e. $(CxA) - (CxB)$ kümesini yazınız.

f. $(BxA) \Delta (BxC)$ kümesini yazınız.

7. $s(AxB) = 24$ olduğuna göre,

a. $s(A \cup B)$ en az kaçtır?

b. $s(A \cup B)$ en çok kaçtır?

c. $s(A \cap B)$ en çok kaçtır?

d. $s(A \cap B)$ en az kaçtır?

8. $A = \{-2,1,2\}$, $B = \{x \mid 1 \le x \le 3,\ x \in R\}$ ve $C = \{x \mid -1 < x \le 2,\ x \in R\}$ olduğuna göre;

a. AxB, BxC ve CxA kümelerinin grafiklerini çiziniz.

b. $(A \cup B)xC$ kümesinin grafiğini çiziniz. Verilen kümeye karşılık gelen alan kaç br^2 dir?

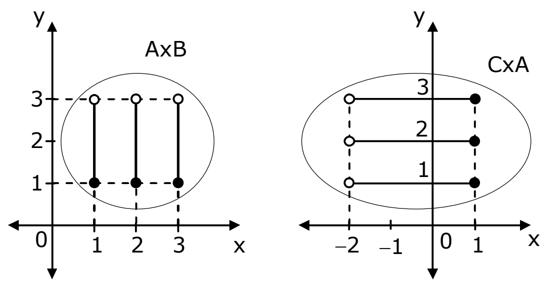
c. $(AxB) \cap (AxC)$ kümesinin grafiğini çiziniz.

d. $(CxA) - (CxB)$ kümesinin grafiğini çiziniz.

e. AxA, BxB, CxC kümelerinin grafiklerini çiziniz.

f. AxA, BxB, CxC kümelerinin köşegenlerinin grafiklerini çiziniz.

9. AxB ve CxA kümelerinin grafikleri aşağıda verilmiştir.



BxC kümesinin grafiğini çiziniz.

10. $A = \{x | -2 \le x < 3,\ x \in R\}$ ve
$B = \{x | -1 < x \le 4,\ x \in R\}$ olduğuna göre;

a. $(AxB) \cap (BxA)$ kümesinin grafiğinin belirttiği alan kaç br^2 dir?

b. $(AxB) \cup (BxA)$ kümesinin grafiğinin belirttiği alan kaç br^2 dir?

11. $(AxB) \cap (BxA) \subset (AxA)$ teoremini ispatlayınız.

12. $(AxA) \subset (AxB) \cup (BxA)$
önermesinin geçerli olmadığını gösteriniz.

13. a. $(A = B \cap C) \Rightarrow (AxA) = (BxB) \cap (CxC)$ teoremini ispatlayınız.

b. "$A = B \cup C$" önermesi $(AxA) = (BxB) \cup (CxC)$ önermesini gerektirir mi?

14. $(A \cup B)x(A \cup B)$ kümesini AxA, AxB, BxA ve BxB kümeleri ile ifade ediniz.

15. $A \ne \varnothing$ olmak üzere,
$AxB = AxC$ ise $B = C$ olduğunu ispatlayınız.

16. $(AxB)'$ kümesini
AxB', $A'xB$ ve $A'xB'$ kümeleri ile ifade ediniz.

3.2 – Bağıntı

3.2.1 – Bağıntı Kavramı

Etkinlik – 3.10

(2, 5) ikilisinde birinci bileşenle ikinci bileşen arasında,

"2, 5'ten küçüktür."

"2 çift, 5 tektir."

"2'nin karesinin 1 fazlası 5'tir."

"2 numaralı oyuncu 5 sayı yapmıştır."

⋮

gibi çok sayıda bağıntı kurulabilir.

Siz de aşağıdaki ikililerin bileşenleri arasında bağıntılar kurunuz.

a. (21, 3) **b.** (Ali, 7)
c. (Cem, Pekin) **d.** (Ayşe, Nazlı)
e. (Kedi, Eşek) **f.** (2006, 13)

Etkinlik – 3.11

Aşağıdaki kümelerin her biri için, tüm ikililerin sağladığı bağıntılar kurunuz.

a. $A = \{(2,\ 3),\ (3,\ 5),\ (4,\ 7)\}$

b. $B = \{(\text{Ali,Ünye}),\ (\text{Can,Bolu}),\ (\text{Nur,Bodrum})\}$

c. C = {(Burak, Bıyık), (Burak, Sakal), (Zeynep, Saç)}

d. $D = \{(5,\ 3),\ (7,\ 5),\ (8,\ 6),\ (3,\ 1)\}$

Etkinlik – 3.12

AxA kümesinin, bileşenleri arasında belli bir bağıntı bulunan ikililerinin kümesi,

$\beta = \{(3,3),\ (4,5),\ (5,7)\}$ olarak verilmiştir.

a. β kümesi ortak özelik yöntemi ile $\beta = \{(x,y) | x \le y,\ (x,y) \in AxA\}$ biçiminde yazılabilir mi?

b. β kümesinde verilen elemanlara göre, $\alpha = \{(x,y) | x \le y,\ (x,y) \in AxA\}$ kümesi en az kaç elemanlıdır?

Etkinlik – 3.13

Dört arkadaştan oluşan küme

$A = \{(\text{Alper, Burak, Nazlı, Sezen})\}$ ve bunların evlerinde besledikleri hayvanların kümesi,

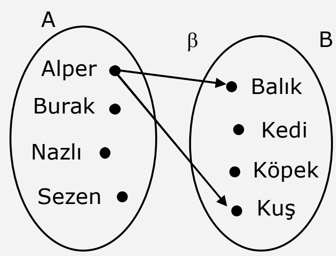
$A = \{(\text{Balık, Kedi, Köpek, Kuş})\}$ olsun.

a. $(x,y) = (\text{Kişinin adı, Beslediği hayvan})$ olmak üzere, olası tüm (x, y) **eşleme**lerinin kümesini -AxB kümesini- şema ile gösteriniz.

b. Alper'in balık ve kuş,
Burak'ın köpek ve kuş,
Nazlı'nın kedi beslediği;
Sezen'in ise hiçbir hayvan beslemediği bilindiğine göre, $\beta = \{(x,y) | x,\ y\text{'yi besler}\}$ kümesini liste yöntemi ile yazınız. β kümesini AxB kümesinin şeması üzerinde Venn şeması ile ayırınız.

c. $\beta \subset (AxB)$ olduğunu görüyorsunuz. A ve B kümelerinin elemanları arasında, β kümesinde belirtilen bağıntının dışında, değişik bağıntıları sağlayan ikililerin $\beta_1,\ \beta_2,\ ...$ kümelerini yazınız. $\beta,\ \beta_1,\ \beta_2,\ ...$ kümeleri en fazla kaç tane olur?

d. β kümesinin ikilileri, yandaki gibi bir Venn şemasında, birinci bileşeni ikinci bileşene eşleyen oklarla belirtilebilir. Buna göre, şemadaki eşlemeleri tamamlayınız.



e. **b**'de verilen bilgilere göre, $\alpha = \{(x,y) | x\text{'i } y \text{ besler}\}$ kümesini liste yöntemi ile yazınız.
"$\alpha \subset A \times B$" önermesi doğru mudur?

Etkinlik – 3.14

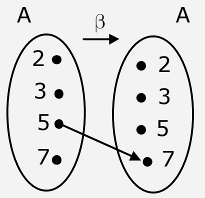
$A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ olduğuna göre;

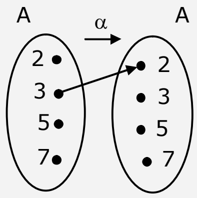
a. AxA kümesini şema ile gösteriniz.

b. $\beta = \{(x,y) | x < y,\ x \in A,\ y \in A\}$ kümesini liste yöntemi ile yazınız. Şema ile gösteriniz.

c. $\alpha = \{(x, y) | x > y,\ x \in A,\ y \in A\}$ kümesini liste yöntemi ile yazınız. Şema ile gösteriniz.

d. β ve α kümelerinde belirtilen bağıntılara göre eşleşen ikilileri, aşağıdaki Venn şemalarında oklarla gösteriniz.





e. $\gamma = \{(x, y) | y = x + 6,\ x \in A,\ y \in A\}$ kümesini liste yöntemi ile yazınız.

Bağıntı sözcüğü, **bir nesneyi başka bir nesne ile uyarlı kılan bağ** anlamına gelir. Matematikteki **bağıntı** kavramı da bu anlamdadır.

Tanım - 3.7

A ve B boş olmayan birer küme olmak üzere, AxB kümesinin herhangi bir alt ***kümesine A'dan B'ye bir bağıntı*** *denir.*

Özel olarak, AxA'nın herhangi bir alt kümesine de ***A'dan A'ya bir bağıntı*** *ya da* ***A'da bir bağıntı*** *adı verilir.*

A'dan B'ye bir β bağıntısı verilmiş olsun.

(x, y) $\in \beta$ demekle,

A'nın x elemanı, β bağıntısı ile B'nin y elemanına eşlenir. ya da,

B'nin y elemanı, β bağıntısı ile A'nın x elemanına bağlıdır. demek aynı anlama gelir.

y'nin, β ile x'e bağlı olması sembolik olarak **yβx** ya da $\mathbf{y} = \beta(\mathbf{x})$ biçiminde gösterilir.

y bağlıdır x'e diye okunur.

A'dan B'ye bir bağıntıda A'ya **tanım kümesi**, B'ye **değer kümesi** denir.

Örnek – 3.15

Bir okulun matematik, fizik ve kimya dallarındaki 3'er kişilik yarışma takımları Miray, Mert, Utku, Sinem ve Kerim adlı öğrencilerden kuruludur.

Miray, matematik ve fizik;
Mert, yalnız fizik;
Utku, matematik ve kimya;

Sinem, matematik ve kimya;
Kerim, fizik ve kimya
dallarında yarışacaktır.

Yarışma dallarının kümesi
$D = \{M,\ F,\ K\}$;
yarışmacıların kümesi
T = {Miray, Mert, Utku, Sinem, Kerim}
olduğuna göre; T kümesinden D kümesine
$\beta = \{(x, y) | x,\ y \text{ dalında yarışır.}\}$ bağıntısı liste yöntemi ile yazılırsa;

β = {(Miray, M), (Miray, F), (Mert, F), (Utku, M), (Utku, K), (Sinem, M), (Sinem, K), (Kerim, F), (Kerim, K)} olur.

$\beta \subset (TxD)$ olduğu açıktır.

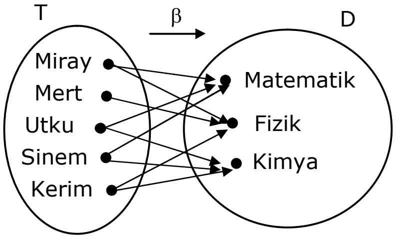
Bağıntının Grafikle Gösterilmesi

Herhangi bir bağıntı Venn şeması ya da kartezyen koordinat şeması ile; R'de bağıntılar ise daha çok analitik düzlemdeki grafikleri ile gösterilirler.

Venn Şeması İle Gösterme

Örnek - 3.15'teki β bağıntısını Venn şeması ile gösterelim:

T ve D kümeleri –ortak elemanları olsa bile– ayrık Venn şemalarıyla gösterilir. Bağıntının elemanı olan ikililer, birinci bileşenden ikinci bileşene yönlendirilmiş oklarla aşağıdaki gibi belirtilir.

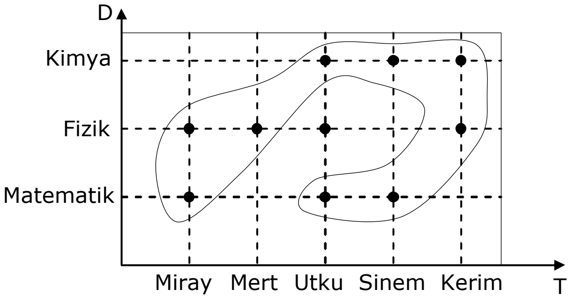


Kartezyen Koordinat Şeması İle Gösterme

Kartezyen koordinat şeması, kartezyen çarpım kümesinin şeması gibidir.

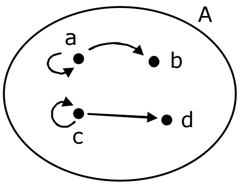
Fazladan, bağıntının elemanları bir Venn şeması ile çevrelenir.

Örnek – 3.15'teki β bağıntısının şeması aşağıda verilmiştir.



✚ A'da bir bağıntı da şemalarla A'dan B'ye bağıntılar gibi gösterilir. Bunların yanında, A'da bağıntıyı göstermek için A kümesine ait Venn şeması da kullanılabilir.

Örneğin;
$A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$
kümesinde tanımlı
$\beta = \{(a,a),(a,b),(c,c),(c,d)\}$
bağıntısı şema ile yandaki gibi gösterilebilir.



a'dan a'ya yönelmiş ok (a, a) $\in\beta$ olduğunu; a'dan b'ye yönelmiş ok (a, b) $\in\beta$ olduğunu belirtir.

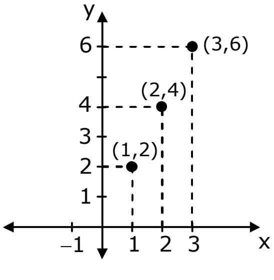
Analitik Düzlemde Gösterme

R'de bir bağıntının analitik düzlemde grafiği, kartezyen çarpım kümesinin grafiği gibi çizilir.

Örnek – 3.16

$A = \{-1,1,2,3\}$ ve $B = \{1,2,3,4,6\}$ olmak üzere, A'dan B'ye $\beta = \{(x,y) \mid y = 2x\}$ bağıntısının grafiğini çizelim:

$\beta = \{(1,2),(2,4),(3,6)\}$ olup grafik, şekilde belirtilen üç noktadan ibarettir.

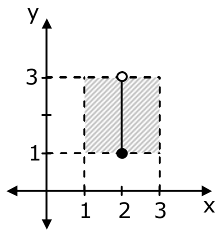


Örnek – 3.17

$A = \{x \mid 1 \le x < 3,\ x \in R\}$ kümesinde

$\beta = \{(x,y) \mid x = 2,\ (x,y) \in (AxA)\}$ bağıntısının grafiğini çizelim:

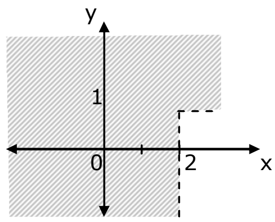
Grafik, $x = 2$ doğrusunun AxA bölgesinin içinde kalan kısmıdır.



Örnek – 3.18

Gerçek sayılar kümesinde,
$\beta = \{(x,y) \mid (x < 2) \vee (y > 1)\}$ bağıntısının grafiğini çizelim:

Grafik, analitik düzlemde x < 2 bölgesi ile y > 1 bölgesinin birleşimidir.



Örnek – 3.19

Etkinlik – 3.4'te grafiğini çizdiğiniz kümelerin her biri R'de bağıntıya birer örnektir.

Çizdiğiniz grafikleri, bağıntı kavramı ışığında yeniden inceleyiniz.

Bir Bağıntının Tersi

Tanım - 3.8

*A'dan B'ye β bağıntısı verilmiş olsun. β bağıntısındaki bütün ikililerin bileşenlerinin yerleri değiştirilerek elde edilen B'den A'ya bağıntıya β bağıntısının **tersi** denir.*

"β^{-1}" ile gösterilir.

Tanım – 3.8'i sembollerle ifade edelim:

$\beta = \{(x,y) \mid p(x,y),(x,y) \in AxB\}$ ise

$\beta^{-1} = \{(y,x) \mid\ (x,y) \in \beta\}$ dir.

Örneğin; A'dan B'ye bir β bağıntısı

$\beta = \{(a,a),\ (a,b),\ (b,c),\ (a,d)\}$ ise

$\beta^{-1} = \{(a,a),\ (b,a),\ (c,b),\ (d,a)\}$ olur.

3.2.2 – A'da Bağıntının Özelikleri

A'da bir bağıntı,

yansıyan olabilir;
simetrik olabilir;
ters-simetrik olabilir;
geçişken olabilir.

Yansıma Özeliği

Tanım - 3.9

A kümesinde tanımlı bir bağıntı β olsun. Her x∈A için, (x, x) ∈ β oluyorsa; "β bağıntısının A kümesinde **yansıma özeliği** vardır." *veya* "β, A'da **yansıyan** bağıntıdır." *denir.*

*AxA'da, yalnız köşegen üzerindeki elemanların kümesine **birim bağıntı** denir. I_A ile gösterilir.*

$I_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$ *dir.*

Tanıma göre; AxA'nın köşegenini kapsayan her bağıntı, A'da yansıyan bağıntıdır.

Tanım – 3.9 sembolik dille şöyle ifade edilir:

(β, A'da yansıyan bağıntıdır.) $\Leftrightarrow$

$$\left[\forall x, (x \in A) \Rightarrow (x,x) \in \beta\right]$$

Örnek – 3.20

$A = \{a,b,c\}$ kümesinde,

$\beta_1 = \{(a,a),(b,b)\}$ yansıyan değildir.

$\beta_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b)\}$ yansıyandır.

Örnek – 3.21

Z tam sayılar kümesi,

Z^+ pozitif tam sayılar kümesi,

$\beta = \{(x,y) \mid x,\ y\text{'yi tam böler.}\}$ olsun. β'nın yansıyan olup olmadığını araştıracağız.

Sıfır, sıfırı bölmez. (0, 0) $\notin\beta$ dır.

$\forall x,\ x \neq 0$ için $\frac{x}{x} = 1$ olup

$\forall x,\ x \neq 0$ için $(x,x) \in \beta$ dır.

O hâlde, β bağıntısı Z^+ kümesinde yansıyandır; Z kümesinde yansıyan değildir.

Simetri Özeliği

Tanım - 3.10

A kümesinde tanımlı bir bağıntı β olsun. Her (x, y)∈β için (y, x) ∈β oluyorsa; "β bağıntısının A kümesinde **simetri özeliği** vardır." *veya* "β bağıntısı A'da **simetrik** bağıntıdır." *denir.*

Tanım – 3.10 sembolik dille şöyle ifade edilir:

(β, A'da simetrik bağıntıdır.) $\Leftrightarrow$

$$\left[\forall (x,y),\ (x,y) \in \beta \Rightarrow (y,x) \in \beta\right]$$

Örnek – 3.22

$A = \{a,b,c\}$ kümesinde,

$\beta_1 = \{(a,a),(b,b)\}$ simetriktir.

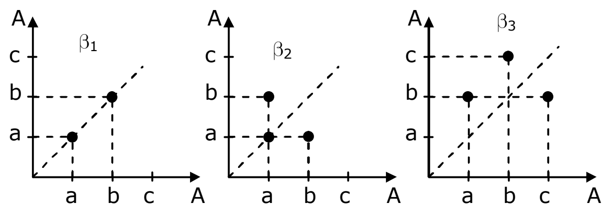
$\left[(a,a)\text{'nın tersi yine } (a,a) \text{ dır.}\right]$

$\beta_2 = \{(a,a),(a,b),(b,a)\}$ simetriktir.

$\beta_3 = \{(a,b),(b,c),(c,b)\}$ simetrik değildir.

$\left[(a,b) \in \beta_3 \text{ ve } (b,a) \notin \beta_3\right]$

Aşağıda bağıntıların grafikleri verilmiştir.



A'da simetrik bir bağıntının grafiğinin, AxA'nın köşegenine göre simetrik olduğuna dikkat ediniz.

Örnek – 3.23

İnsanlar kümesinde,

$\beta_1 = \{(x,y) \mid x,\ y\text{'nin dayısının çocuğudur.}\}$

bağıntısı simetrik değildir.

[x, y'nin dayısının çocuğu ise; y, x'in halasının çocuğu olur. Dolayısıyla, $(x,y) \in \beta$ iken $(y,x) \notin \beta$ dır.]

$\beta_2 = \{(x,y) | x, \text{ y'nin amcasının çocuğudur.}\}$ bağıntısı simetriktir.

Teorem - 3.6

A kümesinde tanımlı bir bağıntı β olsun. β bağıntısının simetrik olması için gerekli ve yeterli koşul $\beta = \beta^{-1}$ olmasıdır.

Etkinlik – 3.15

Teorem – 3.6'yı,

$(\beta \subset AxA \text{ ve } \beta \text{ simetrik}) \Leftrightarrow (\beta = \beta^{-1})$

biçiminde ifade ederek, ispatlayınız.

Ters Simetri Özeliği

Tanım - 3.11

A kümesinde tanımlı bir bağıntı β olsun. Hem (x, y)∈β hem de (y, x) ∈β olması $x = y$ olmasını gerektiriyorsa, "β bağıntısının A kümesinde **ters simetri özeliği** vardır." *veya* "β bağıntısı A'da **ters simetrik** bağıntıdır." *denir.*

Tanım – 3.11 sembolik dille şöyle ifade edilir:

(β, A'da ters simetrik bağıntıdır.) ⇔

$[\forall (x,y),\ (x,y) \in \beta \wedge (y,x) \in \beta \Rightarrow (x = y)]$

Bu tanıma göre, $x \neq y$ iken $(x,y) \in \beta$ ise $(y,x) \notin \beta$ dır.

Örnek – 3.24

$A = \{a,b,c\}$ kümesinde,

$\beta_1 = \{(a,a)\}$ hem simetriktir hem ters simetriktir.

$\beta_2 = \{(a,b),(b,c)\}$ ters simetriktir.
simetrik değildir.

$\beta_3 = \{(b,b),(a,b),(b,a),(b,c)\}$ simetrik değildir; ters simetrik değildir.

[(a,b) ∈β ve (b, a) ∈β olduğu için ters simetrik değil; (b, c) ∈β ve (c, b) ∉β olduğu için simetrik değil.]

Örnek – 3.25

Tam sayılar kümesinde,

$\beta = \{(x,y) | x \leq y\}$ bağıntısı ters simetriktir.

[x < y iken, y $\nless$ x tir.

x ≠ y iken (x, y) ∈β ise (y, x) ∉β dır.]

Teorem - 3.7

A kümesinde tanımlı bir bağıntı β olsun. β bağıntısının ters simetrik olması için gerekli ve yeterli koşul $\beta \cap \beta^{-1}$ kümesinin AxA'nın köşegeninin alt kümesi olmasıdır.

Etkinlik – 3.16

Teorem – 3.7'yi,

$(\beta \subset AxA \text{ ve } \beta \text{ ters simetrik}) \Leftrightarrow (\beta \cap \beta^{-1} \subset I_A)$ biçiminde ifade ederek, ispatlayınız.

Geçişme Özeliği

Tanım - 3.12

A kümesinde tanımlı bir bağıntı β olsun. Her (x, y)∈β ve (y, z) ∈β için (x, z) ∈β oluyorsa "β bağıntısının A kümesinde **geçişme özeliği** vardır." *veya* "β bağıntısı A'da **geçişken** bağıntıdır." *denir.*

Tanım – 3.12 sembolik dille şöyle ifade edilir:

(β, A'da geçişken bağıntıdır.) ⇔

$[\forall (x,y),\ (x,y) \in \beta \wedge (y,z) \in \beta \Rightarrow (x,z) \in \beta]$

Örnek – 3.26

$A = \{1,2,3,4\}$ kümesinde tanımlanan

a. $\beta_1 = \{(2,3)\}$

b. $\beta_2 = \{(1,2),(1,4),(3,4)\}$

c. $\beta_3 = \{(1,2),(2,3),(1,3),(3,1)\}$

d. $\beta_4 = \{(2,2),(2,3),(2,4)\}$

bağıntılarının geçişken olup olmadıklarını araştıralım:

a. $\beta_1 = \{(2,3)\}$ geçişkendir.
Geçişkenlik tanımı ile düşünelim.

(β_1 , A'da geçişken bağıntıdır.) $\Leftrightarrow$
$\left[\forall (x,y),\ (x,y) \in \beta_1 \wedge (y,z) \in \beta_1 \Rightarrow (x,z) \in \beta_1\right]$

$\Rightarrow$ (β_1 , A'da geçişken bağıntıdır.) $\Leftrightarrow$
$\left[\underbrace{(2,3) \in \beta}_{1} \wedge \underbrace{(3,?) \in \beta_1}_{0} \Rightarrow \underbrace{(2,?) \in \beta_1}_{0}\right]$

$\Rightarrow$ (β_1 , A'da geçişken bağıntıdır.)$\Leftrightarrow$ $\left[(1 \wedge 0) \Rightarrow 0\right]$

$\Rightarrow$ (β_1 , A'da geçişken bağıntıdır.) $\Leftrightarrow$ (1)

O hâlde; β_1 , A'da geçişkendir.

Kısaca açıklayalım:

(2, 3) $\in \beta_1$ dir. Ancak bağıntının birinci bileşeni 3 olan (3,?) gibi bir elemanı olmadığı için, (2,3) $\in \beta_1$ olması bağıntının geçişkenliğini bozmaz.

b. $\beta_2 = \{(1,2),(1,4),(3,4)\}$ geçişkendir.
(a'da gösterildiği gibi.)

c. $\beta_3 = \{(1,2),(2,3),(1,3),(3,1)\}$
$(1,2) \in \beta_3$ ve $(2,3) \in \beta_3$ iken $(1,3) \in \beta_3$ tür.
Ancak, $(2,3) \in \beta_3$ ve $(3,1) \in \beta_3$ iken $(2,1) \notin \beta_3$ olduğundan β_3 geçişken değildir.

d. $\beta_4 = \{(2,2),(2,3),(2,4)\}$ geçişkendir.
Liste yöntemi ile yazılmış bağıntılarda (a, a) biçimindeki elemanlar geçişkenliği bozmaz.
Bunlar incelenmese de olur.
Örneğin,
$(2,2) \in \beta_4$ ve $(2,3) \in \beta_4$ iken $(2,3) \in \beta_4$ olması gerekmektedir ki, bu da zaten verilenlerden biridir.

Örnek – 3.27

Tam sayılar kümesinde,
$\beta = \{(x,y) | x,\ y\text{'nin tam katıdır.}\}$ bağıntısının geçişken olup olmadığını araştıralım:

$(x,y) \in \beta$ ① ve $(y,z) \in \beta$ ② olsun.

① den $x = k \cdot y$ $(k \in Z)$ ③ ve
② den $y = p \cdot z$ $(p \in Z)$; ④
③ ve ④'ten $x = k \cdot p \cdot z$ ⑤ elde edilir.
⑤'e göre x, z'nin katıdır.
O hâlde,
(x, z) $\in \beta$ olup β geçişkendir.

Etkinlik – 3.17

n elemanlı bir kümede tanımlanabilecek,

a. yansıyan bağıntı sayısının $\mathbf{2^{n^2-n}}$ olduğunu;

b. simetrik bağıntı sayısının $\mathbf{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$ olduğunu gösteriniz.

Etkinlik – 3.18

$A = \{1,2,3,4,5\}$ kümesinde tanımlanan aşağıdaki bağıntıların yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme özeliklerini inceleyiniz.

a. $\beta_1 = \{(1,2),(2,3),(3,3)\}$
b. $\beta_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(2,3)\}$
c. $\beta_3 = \{(2,2),(2,3),(3,4),(3,2),(4,3)\}$
d. $\beta_4 = \{(2,4),(2,3),(4,3),(1,5)\}$

Etkinlik – 3.19

Tam sayılar kümesinde,
$\beta = \{(x,y) | x - y,\ 4 \text{ ile bölünür.}\}$ bağıntısının yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme özeliklerini inceleyiniz.

Etkinlik – 3.20

$A = \{a,b,c,d\}$ kümesinde en çok 8 elemanlı,

a. yansıyan, simetrik ve geçişken;
b. yansıyan, ters simetrik ve geçişken;
c. yansıyan, simetrik olmayan, geçişken;
d. simetrik olmayan, ters simetrik olmayan, geçişken

bağıntılar yazınız.

3.2.3 – Denklik ve Sıralama Bağıntıları

Denklik Bağıntısı

Etkinlik – 3.21

Bir fen bilimleri dersanesinde 7 matematik, 5 fizik ve 4 kimya öğretmeni vardır.

Öğretmenlerin oluşturduğu H kümesinde,
$\beta = \{(x,y) | y,\ x \text{ ile aynı branştandır.}\}$
bağıntısının yansıma, simetri ve geçişme özeliklerini inceleyiniz.

Tanım - 3.13

Bir A kümesinde tanımlı; yansıma, simetri ve geçişme özelikleri olan bir β bağıntısına A kümesinde ***denklik bağıntısı*** *denir.*

Bir denklik bağıntısı ile birbirine bağlı iki elemana ***denk elemanlar*** *adı verilir.*

β, A'da bir denklik bağıntısı ve (a, b)∈ β ise **a, b'ye denktir.** denir. Bu denklik **a ≡ b** biçiminde gösterilir ve "*a denk b*" diye okunur.

Etkinlik -3.21'de verdiğimiz β bağıntısının yansıma, simetri ve geçişme özeliklerinin olduğunu gösterdiniz. Öyleyse, H'de β bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Matematik öğretmenlerini $m_1, m_2, \ldots, m_7$ ile; fizik öğretmenlerini $f_1, f_2, \ldots, f_5$ ile; kimya öğretmenlerini k_1, k_2, k_3, k_4 ile gösterelim.

$(m_1,m_1) \in \beta, (m_1,m_2) \in \beta, \ldots;$

$(f_1,f_2) \in \beta, (f_2,f_3) \in \beta, \ldots;$

$(k_1,k_2) \in \beta, (k_1,k_3) \in \beta, \ldots$ olacağından

$m_1 \equiv m_1,\ m_1 \equiv m_2,\ m_2 \equiv m_3,\ \ldots;$

$f_1 \equiv f_2,\ f_2 \equiv f_3,\ \ldots;$

$k_1 \equiv k_2,\ k_1 \equiv k_3,\ \ldots$ olacaktır.

Matematik öğretmenlerinden ikisi Burak Bey ile Murat bey olsunlar. Burak Bey ile Murat Bey birbirlerine hiç benzemeyebilirler. Ancak, β bağıntısında göz önüne alınan işlevleri nedeniyle

"Burak Bey ≡ Murat Bey" yazılır.

Haftalık ders programlarını yapan yönetici, bu denkliğe dayanarak, gerektiğinde Burak Bey'in yerine Murat Bey'i koyabilir.

Tanım - 3.14

β A'da bir denklik bağıntısı olsun. A'nın bir ***a*** *elemanına denk olan* ***x***∈*A ların kümesine* ***a'nın denklik sınıfı*** *denir. Bu küme* $\overline{\mathbf{a}}$ *biçiminde gösterilir.*

Etkinlik-3.21'de H'deki β bağıntısına göre;

$m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \equiv m_4 \equiv m_5 \equiv m_6 \equiv m_7;$

$f_1 \equiv f_2 \equiv f_3 \equiv f_4 \equiv f_5;$

$k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \equiv k_4$ olduğundan,

H kümesinin denklik sınıfları

$\overline{m_1} = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7\};$

$\overline{f_1} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\};$

$\overline{k_1} = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ olur.

$\overline{m_1} = \overline{m_2} = \overline{m_3} = \overline{m_4} = \overline{m_5} = \overline{m_6} = \overline{m_7};$

$\overline{f_1} = \overline{f_2} = \overline{f_3} = \overline{f_4} = \overline{f_5};$

$\overline{k_1} = \overline{k_2} = \overline{k_3} = \overline{k_4}$ olduğu açıktır.

$\overline{m_1} \cap \overline{f_1} = \varnothing,\ \overline{f_1} \cap \overline{k_1} = \varnothing,\ \overline{m_1} \cap \overline{k_1} = \varnothing$ ve

$\overline{m_1} \cup \overline{f_1} \cup \overline{k_1} = H$ olduğuna dikkat ediniz.

Tanımlara dayanarak, H kümesinde β denklik bağıntısı için yazdığımız bu özelikleri teorem olarak ifade edelim:

Teorem -3.8

β, A'da bir denklik bağıntısı olsun.

a. *Bir denklik sınıfının bütün elemanları aralarında denktirler.*

b. *A kümesinin bir* ***a*** *elemanı, bir denklik sınıfının bir elemanına denk ise,* ***a****'da bu denklik sınıfındadır.*

c. *Birbirine denk iki elemanın denklik sınıfları birbirine eşittir.*

d. *Farklı iki denklik sınıfı ayrıktır.*

e. *A'nın her bir elemanı, ayrık denklik sınıflarından yalnız birindedir.*

f. *A'nın tüm denklik sınıflarının birleşimi A kümesine eşittir.*

Etkinlik – 3.22

Teorem -3.8'i ispatlayınız.

Etkinlik – 3.23

$A = \{1,2,3\}$ kümesi veriliyor.

a. $\beta_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ A'da bir denklik bağıntısı mıdır?
Öyle ise, denklik sınıflarını belirtiniz.

b. $\beta_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$, A'da bir denklik bağıntısı mıdır?
Öyle ise, denklik sınıflarını belirtiniz.

Etkinlik – 3.24

Tam sayılar kümesinde,

$\beta = \{(x, y) \mid x - y,\ 3 \text{ ile bölünür.}\}$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Denklik sınıflarını belirtiniz.

Etkinlik – 3.25

Tam sayılar kümesinde,

$\beta = \{(x, y) \mid x^3 + x = y^3 + y\}$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

$\bar{1}$ kümesini bulunuz.

Sıralama Bağıntısı

Etkinlik – 3.26

Bir E kümesinin kuvvet kümesinde,

$\beta = \{(X, Y) \mid X \subset Y\}$ bağıntısının yansıma, ters simetri ve geçişme özeliklerinin olduğunu gösteriniz.

Tanım - 3.15

Bir A kümesinde tanımlı; yansıma, ters simetri ve geçişme özelikleri olan bir β bağıntısına ***sıralama bağıntısı*** *denir.*

β, A'da bir sıralama bağıntısı ve (x, y)∈β ise, x ile y'ye **karşılaştırılabilen elemanlar** denir.

(x, y)∈β ikilisi **x, y'den önce gelir.** diye okunur.

Etkinlik-3.26'da verdiğimiz "*alt küme olma*" bağıntısında $(A_1, A_2) \in \beta$ ve $(A_2, A_3) \in \beta$ ise A_1, A_2 den; A_2, A_3 den önce gelir.

Sıralama, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \ldots$ biçiminde olur.

Örnek – 3.28

$A = \{0, 1, 2\}$ kümesinin kuvvet kümesinde,

$\beta = \{(X, Y) \mid X \subset Y\}$ bağıntısını elemanları ile yazalım:

$P(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$;

$\beta = \{(\varnothing, \varnothing), (\varnothing, \{0\}), (\varnothing, \{1\}), \ldots\}$

Yazmadığımız elemanlar da dikkate alınırsa, β nın yansıyan ters simetrik ve geçişken bir bağıntı olduğu görülür. O hâlde β sıralama bağıntısıdır.

Buna göre,

$\varnothing \subset \{0\} \subset \{0,1\} \subset \{0,1,2\}$;

$\varnothing \subset \{0\} \subset \{0,2\} \subset \{0,1,2\}$;

$\varnothing \subset \{1\} \subset \{0,1\} \subset \{0,1,2\}$;

$\varnothing \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{0,1,2\}$;

$\varnothing \subset \{2\} \subset \{0,2\} \subset \{0,1,2\}$;

$\varnothing \subset \{2\} \subset \{1,2\} \subset \{0,1,2\}$

sıralama zincirleri yazılabilir.

(Tam bir zincir, $\varnothing \subset \varnothing \subset \{0\} \subset \{0\} \ldots$ biçiminde olacaktır. Yerden kazanmak için $\{0,1\} \subset \{0,1\}$ biçimindeki ikilemeleri yazmadık.)

Dikkat edilirse; β'nın örneğin $(\{0\}, \{1\})$ gibi elemanları bulunmadığından, β bağıntısı ile P(A) kümesinin tüm elemanları sıralanamamaktadır. P(A)'nın elemanları **parça parça** ya da **kısım kısım** sıralanmaktadır.

Örnek – 3.29

$A = \{0, 1, 2\}$ kümesinde,

$\beta = \{(x, y) \mid x \leq y\}$ bağıntısını elemanları ile yazarsak,

$\beta = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,2)\}$ olur.

β yansıyan, ters simetrik ve geçişken olduğundan, bir sıralama bağıntısıdır.

Buna göre,

$0 \leq 0 \leq 1 \leq 1 \leq 2 \leq 2$ sıralama zinciri yazılabilir.

Dikkat edilirse; β bağıntısına göre A'nın tüm elemanları ikişer ikişer karşılaştırılabilen elemanlar olduğundan, A'nın tüm elemanları sıralanabilmiştir.

Tanım - 3.16

β A'da bir sıralama bağıntısı olsun.

A kümesinin bütün elemanları ikişer ikişer karşılaştırılabilirse, β bağıntısına ***tam sıralama bağıntısı*** *denir.*

A'nın elemanlarından en az bir çifti karşılaştırılamayan elemanlar ise –başka bir deyişle, $\exists (x, y) \in AxA$ *için* $(x, y) \notin \beta$ *ve* $(y, x) \notin \beta$ *ise– β'ya* ***kısmi sıralama bağıntısı*** *ya da* ***parçalı sıralama bağıntısı*** *adı verilir.*

Bir E kümesinin kuvvet kümesinde, "*alt küme olma*" bağıntısı bir **kısmi sıralama bağıntısı**; gerçek sayılar kümesinde, "*küçük veya eşit olma*" bağıntısı bir **tam sıralama bağıntısı**dır.

Etkinlik – 3.27

$A = \{-2,-1,0,1,2\}$ kümesinde tanımlı $\beta = \{(x,y) | x^2 \le xy\}$ bağıntısının bir sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz.

β'nın tam sıralama bağıntısı mı, kısmi sıralama bağıntısı mı olduğunu belirtiniz.

+ Bazen, yansıma özeliği bulunmayan bir bağıntı ile de bir kümenin elemanları sıralanabilir.

Örneğin; tam sayılar kümesinde

$\beta = \{(x,y) | x < y\}$ bağıntısına göre

$\ldots -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \ldots$

sıralaması yazılabilir. Yansıma özeliği olmadığından β bir sıralama bağıntısı değildir. Ancak, bu bağıntıya göre de verilen kümenin elemanları sıralanabilmektedir. Bu tür bağıntılara da bir isim vermek gerekir.

Tanım - 3.17

β, A kümesinde tanımlı bir bağıntı olsun. $\forall x \in A$ *için* $(x,x) \notin \beta$ *koşuluna uyan, ters simetrik ve geçişken olan β bağıntısına* ***kesin sıralama bağıntısı*** *denir.*

Örneğin; $\beta = \{(1,2),(2,3),(2,4),(1,3),(1,4)\}$ bağıntısı **kesin sıralama bağıntısı**dır. β'ya göre sıralama zincirleri $1 \to 2 \to 3$ ve $1 \to 2 \to 4$ tür. $(3,4) \notin \beta$ olduğundan 3 ile 4 sıralanamamıştır.

Alıştırmalar ve Problemler – 3.2

1. $A = \{0,1,2,3\}$ ve $B = \{0,2,4,6\}$ olduğuna göre; A'dan B'ye, $\beta = \{(x,y) | y > 2^x\}$ bağıntısını liste yöntemi ile yazınız. Şema ile gösteriniz. Grafiğini çiziniz.

2. $A = \{-2,-1,0,1,2,3\}$ kümesinde $\beta = \{(x,y) | y^x \ge 2\}$ bağıntısını liste yöntemi ile yazınız. Şemalarla gösteriniz. Grafiğini çiziniz.

3. $\beta = \{(x,y) | y \ge x^2,\ (x,y) \in AxA\}$ bağıntısının dört elemanı (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16) olarak verilmiştir.

Buna göre, β bağıntısı en az kaç elemanlıdır?

4. Bir A kümesinde tanımlı $\beta = \{(3,4),(4,6),(5,8)\}$ bağıntısı aşağıdakilerden hangilerine eşit olabilir?

a. $\beta_1 = \{(x,y) | x < y,\ (x,y) \in AxA\}$

b. $\beta_2 = \{(x,y) | y = 2x - 2,\ (x,y) \in AxA\}$

c. $\beta_3 = \{(x,y) | x < y < 2x,\ (x,y) \in AxA\}$

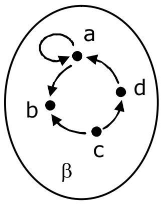
d. $\beta_4 = \{(x,y) | 2x - 3 < y < 2x - 1,\ (x,y) \in AxA\}$

5. A'dan B'ye, $\beta = \{(x,y) | x^y > y^x\}$ bağıntısının dört elemanı (1, 0), (4, 0), (2, 1), (3, 2) olarak verilmiştir.

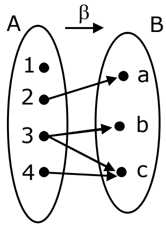
Buna göre, β bağıntısı en az kaç elemanlıdır?

6. Aşağıda, şemalarla gösterilmiş bağıntıları liste yöntemi ile yazınız.

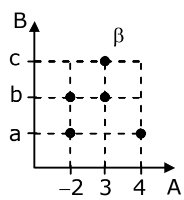
a.



b.



c.



7. Aşağıdaki bağıntıları şemalarla gösteriniz. Grafiklerini çiziniz.

a. $A=\{0,2,4,6\}$ ve $B=\{a,b,c,d\}$ olmak üzere; A'dan B'ye $\beta=\{(2,a),(2,b),(4,c),(6,c)\}$

b. $A=\{a,b,c,d\}$ kümesinde, $\beta=\{(a,c),(b,d),(d,c),(a,d),(c,c)\}$

8. Aşağıda tanımlanan bağıntıların grafiklerini çiziniz.

a. $\beta=\{(x,y)|x<2,\ x\in R,\ y\in R\}$

b. $\beta=\{(x,y)|y=3,\ x\in R\}$

c. $\beta=\{(x,y)|x=3,\ y\le 2,\ y\in R\}$

d. $\beta=\{(x,y)|x>1,\ y\le 3,\ x\in R,\ y\in R\}$

e. $\beta=\{(x,y)|x=2,\ -1\le y\le 3,\ y\in R\}$

f. $\beta=\{(x,y)|x\ge 2 \text{ veya } y\le 2,\ x\in R,\ y\in R\}$

g. $\beta=\{(x,y)|-2\le x\le 2,\ y\ge 1,\ x\in R,\ y\in R\}$

h. $\beta=\{(x,y)|-1<x\le 4,\ y=2,\ x\in R\}$

9. 8. alıştırmada verilen bağıntıların terslerini ortak özelik yöntemi ile yazınız. Grafiklerini çiziniz.

10. Doğal sayılar kümesinde $\beta=\{(x,y)|3x+ky=10\}$ bağıntısı tanımlanıyor.
$(2,1)\in\beta$ olduğuna göre, β^{-1} bağıntısının grafiğini çiziniz.

11. Gerçek sayılar kümesinde $\beta=\{(x,y)|ax+by=11\}$ bağıntısı tanımlanıyor.
$(2,3)\in\beta$ ve $(-1,3)\in\beta^{-1}$ olduğuna göre, β^{-1} bağıntısını ortak özelik yöntemi ile yazınız.

12. $\alpha=\{(x,y)|3x+ay=8,\ (x,y)\in RxR\}$ ve $\beta=\{(x,y)|bx+3y=1,\ (x,y)\in RxR\}$ bağıntıları için $(\alpha\cap\beta)^{-1}=\{(-1,2)\}$ olduğuna göre, a ve b kat sayılarını bulunuz.

13. $A=\{a,b,c,d\}$ kümesinde aşağıda verilen bağıntıların yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme özeliklerini inceleyiniz.

a. $\beta_1=\{(a,b)\}$

b. $\beta_2=\{(a,a),(a,c),(b,c),(c,a),(c,c)\}$

c. $\beta_3=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(c,d)\}$

d. $\beta_4=\{(a,a),(b,b),(c,d),(d,c),(d,d)\}$

14. $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinde tanımlı aşağı-daki bağıntıların özeliklerini inceleyiniz. Ele-man sayılarını bulunuz.

a. $\beta_1=\{(x,y)|x+y=10\}$

b. $\beta_2=\{(x,y)|x^2<y\}$

c. $\beta_3=\{(x,y)|x\cdot y=12\}$

d. $\beta_4=\{(x,y)|x-y \text{ çifttir.}\}$

15. Tam sayılar kümesinde tanımlanan aşağıdaki bağıntıların özeliklerini inceleyiniz.

a. $\beta_1=\{(x,y)|x\le y\}$

b. $\beta_2=\{(x,y)|x^2+y^2<10\}$

c. $\beta_3=\{(x,y)|x^2+x=y^2+y\}$

d. $\beta_4=\{(x,y)|x^3-x=y^3-y\}$

e. $\beta_5=\{(x,y)|x+y=8\}$

f. $\beta_6=\{(x,y)|x\cdot y \text{ asal değildir.}\}$

16. 15. alıştırmadaki bağıntıların $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinde tanımlandıklarını varsayarak, bunların özeliklerini inceleyiniz. Eleman sayılarını bulunuz.

17. Bir E düzlemindeki doğrular kümesinde tanımlanan, aşağıdaki bağıntıların özeliklerini inceleyiniz.

a. $\beta_1=\{(x,y)|x\,//\,y \text{ veya } x \text{ çakışık } y\}$

b. $\beta_2=\{(x,y)|x\perp y\}$

18. İnsanlar kümesinde aşağıda belirtilen bağıntıları ortak özelik yöntemi ile yazınız. Özeliklerini inceleyiniz.

a. Öz kardeşlik

b. Arkadaşlık

c. Daha kısa boylu olma

d. Aynı ülkeden olma

19. $A=\{a,b,c,d,e\}$ kümesinin kuvvet kümesinde aşağıda belirtilen bağıntıları ortak özelik yöntemi ile yazınız. Özeliklerini inceleyiniz.

a. Eşit olma
b. Ayrık olma
c. Alt kümesi olma
d. Öz alt kümesi olma

20. $A=\{1,2,3,4\}$ kümesinde, aşağıdaki özelikleri sağlayan bağıntılar yazınız.

a. Yansıyan, simetrik
b. Yansıyan, ters simetrik
c. Simetrik, ters simetrik değil
d. Simetrik değil, ters simetrik, geçişken
e. Yansıyan, simetrik, geçişken
f. Simetrik değil, ters simetrik, geçişken değil
g. Simetrik değil, ters simetrik değil, geçişken değil
h. Ters simetrik, geçişken değil

21. $A=\{1,2,3,4,5\}$ kümesinde tanımlı $\beta=\{(1,1),(2,3),(3,4),...\}$ bağıntısının üç elemanı yazılmıştır.
Aşağıda belirtilen özelikleri taşıması için, bağıntıya hangi elemanların kesinlikle katılması gerekir?

a. Yansıyan, ters simetrik
b. Yansıyan, simetrik
c. Ters simetrik, geçişken
d. Simetrik, geçişken

22. β, A'da bir bağıntıdır.

a. β yansıyan ise β^{-1} in de yansıyan olduğunu;
b. β simetrik ise β^{-1} in de simetrik olduğunu;
c. β ters simetrik ise β^{-1} in de ters simetrik olduğunu;
d. β geçişken ise β^{-1} in de geçişken olduğunu gösteriniz.

23. β_1 ve β_2, A'da yansıyan iki bağıntıdır.

a. $\beta_1 \cap \beta_2$ nin yansıyan olduğunu;
b. $\beta_1 \cup \beta_2$ nin yansıyan olduğunu gösteriniz.

24. β_1 ve β_2, A'da simetrik iki bağıntıdır.

a. $\beta_1 \cap \beta_2$ nin simetrik olduğunu;
b. $\beta_1 \cup \beta_2$ nin simetrik olduğunu gösteriniz.

25. β_1 ve β_2, A'da ters simetrik iki bağıntıdır.

a. $\beta_1 \cap \beta_2$ nin ters simetrik olduğunu;
b. $\beta_1 \cup \beta_2$ nin ters simetrik olması gerekmediğini gösteriniz.

26. β_1 ve β_2, A'da geçişken iki bağıntıdır.

a. $\beta_1 \cap \beta_2$ nin geçişken olduğunu;
b. $\beta_1 \cup \beta_2$ nin geçişken olması gerekmediğini gösteriniz.

27. β, A'da yansıyan, simetrik ve geçişken bağıntıdır.
$AxA-\beta$ bağıntısının özeliklerini inceleyiniz.

28. $A=\{1,2,3,4\}$ kümesinde, aşağıda özelikleri belirtilen bağıntılardan kaç tane yazılabilir?

a. yansıyan
b. simetrik
c. yansıyan, simetrik
d. yansıyan, simetrik değil
e. simetrik, yansıyan değil
f. 6 elemanlı, yansıyan
g. 6 elemanlı, simetrik
h. 6 elemanlı, yansıyan, simetrik
i. 6 elemanlı, yansıyan, simetrik değil
j. 6 elemanlı, simetrik, yansıyan değil
k. 3 elemanlı, ters simetrik
l. 6 elemanlı, yansıyan, ters simetrik
m. 3 elemanlı, simetrik değil, ters simetrik değil

29. $A=\{1,2,3,4\}$ kümesinde tanımlı aşağıdaki bağıntılardan hangileri denklik bağıntısıdır? Denklik bağıntısı olanlarının denklik sınıflarını belirtiniz.

a. $\beta_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1)\}$
b. $\beta_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$
c. $\beta_3=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\}$
d. $\beta_4=\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$

e. $\beta_5 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3),(2,3),(2,1),(3,1),(3,2)\}$

f. $\beta_6 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

30. $A = \{a,b,c\}$ kümesinde tanımlı aşağıdaki bağıntılardan hangileri sıralama bağıntısıdır? Sıralama bağıntısı olanlarının sıralama zincirlerini yazınız.

a. $\beta_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b)\}$

b. $\beta_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c)\}$

c. $\beta_3 = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$

d. $\beta_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c)(b,c)\}$

31. Bir A kümesinde tanımlı β denklik bağıntısına göre denklik sınıfları $\{a\}$, $\{b,c\}$, $\{d,e,f\}$ kümeleridir.

β'nın eleman sayısı kaçtır?

32. Aşağıda verilen bağıntıların denklik ya da sıralama bağıntısı olup olmadığını belirtiniz Denklik bağıntısı olanlarının denklik sınıflarını, sıralama bağıntısı olanlarının sıralama zincirlerini yazınız.

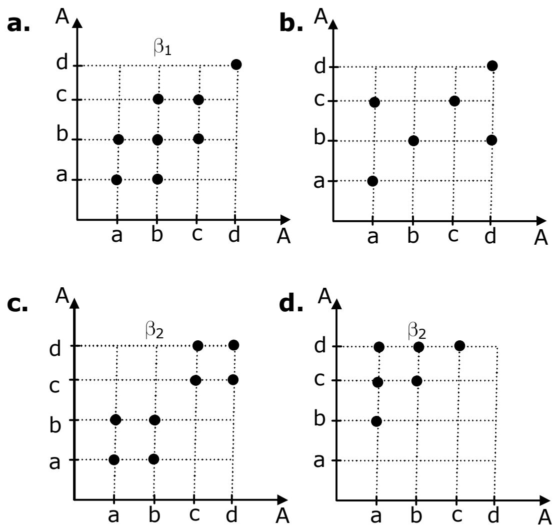
a. Z'de, $\beta_1 = \{(x,y) | x + y \text{ çifttir.}\}$

b. Z'de, $\beta_2 = \{(x,y) | x, y\text{'yi böler.}\}$

c. Z^+'da, $\beta_3 = \{(x,y) | x, y\text{'yi böler.}\}$

d. Z'de, $\beta_4 = \{(x,y) | x^2 + 4y = y^2 + 4x\}$

33. Aşağıda grafikleri ile verilen bağıntıların denklik ya da sıralama bağıntısı olup olmadığını belirtiniz. Denklik bağıntısı olanlarının denklik sınıflarını, sıralama bağıntısı olanlarının sıralama zincirlerini yazınız.



34. Bir A kümesinde tanımlı β sıralama bağıntısına göre tüm sıralama zincirleri $a \to b$, $a \to c \to d$ olarak verilmiştir.

β'nın eleman sayısı kaçtır?

35. $A = \{x | -1 \le x \le 1\}$ ve $(a,b) \in AxA$ olmak üzere; R'de, aşağıda verilen bağıntıların grafiklerini koordinat sistemınde çiziniz.

a. $\beta_1 = \{(x,y) | x = a + b, y = a - b\}$

b. $\beta_2 = \{(x,y) | x = 2a + b, y = b\}$

c. $\beta_3 = \{(x,y) | x = a - 2b, y = 2a - b\}$

36. a. $A = \{a,b\}$ kümesinde ters simetrik kaç bağıntı yazılabilir?

b. $A = \{a,b,c\}$ kümesinde ters simetrik kaç bağıntı yazılabilir?

c. n elemanlı bir A kümesinde yazılabilecek ters simetrik bağıntı sayısını bulunuz.

d. n elemanlı bir A kümesinde yazılabilecek 3 elemanlı, ters simetrik bağıntı sayısını bulunuz.

3.3 – Fonksiyon

Önceki kısımda iki kümenin elemanları arasında çeşitli eşlemeler yapmış ve bu eşlemelerle oluşturduğumuz ikililerin kümesine **bağıntı** adını vermiştik.

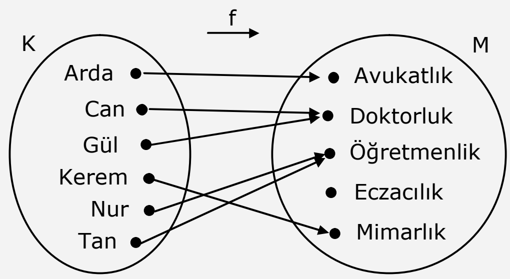
Bu kısımda, belirli koşulları sağlayan özel bağıntıları –**fonksiyon**ları– inceleyeceğiz.

3.3.1 – Fonksiyon Kavramı

Etkinlik – 3.28

Bir gruptaki 6 arkadaştan oluşan,
$K = \{Arda,\ Can,\ Gül,\ Kerem,\ Nur,\ Tan\}$ kümesi ile bunların mesleklerinin de içinde bulunduğu,

M = {Avukatlık, Doktorluk, Mimarlık, Öğretmenlik, Eczacılık} kümesi arasında, kişilerin mesleklerine eşlendiği eşlemeler aşağıdaki Venn şemasında verilmiştir.



a. Gruptakilerden her birinin bir mesleği var mıdır?

b. Gruptakilerden herhangi birinin birden fazla mesleği var mıdır?

c. Grupta, M kümesindeki mesleklerin her birinden en az bir kişi var mıdır?

d. K'dan M'ye "f" bağıntısını liste yöntemi ile yazınız.

e. "*Can*" ile "*Doktorluk*" arasında f bağıntısı ile kurulan eşlemeyi **Doktorluk f Can** ya da **f(Can)** = **Doktorluk** biçiminde yazabileceğinizi biliyorsunuz. Bu eşlemenin

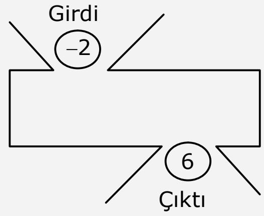
"*Can'ın **mesleği** doktorluktur.*" anlamına geldiği gibi,

"*Can'ın **görevi** doktorluk yapmaktır*.";
"*Can'ın **işlevi** doktorluk yapmaktır*.";
"*Can'ın **fonksiyonu** doktorluk yapmaktır*."
gibi yorumlanabileceğine de dikkat ediniz.

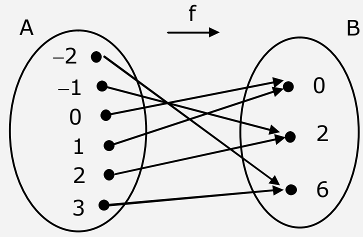
Siz de diğer eşlemeleri aynı sözlerle ifade ediniz.

Etkinlik – 3.29

Sayılar arasında belli bir kurala göre eşlemeler yapan bir bilgisayar programı açıldığında, ekranda yandaki şema görülmektedir. Klavyeden girilen sayı, şemanın "Girdi" kısmına, programın verdiği sayı "Çıktı" kısmına yazılmaktadır.



Bu programda, bir öğrencinin girdiği sayılarla programın verdiği çıktılar arasındaki eşlemeler aşağıdaki Venn şemasında verilmiştir.



a. Eşlemelerle belirtilen A'dan B'ye f bağıntısını liste yöntemi ile yazınız.

b. Girilen sayıyı x, çıkan sayıyı y ile göstererek x ile y arasında bir bağıntı kurunuz. Bu bağıntıyı kullanarak, f bağıntısını

$f = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in A,\ y \in B\}$ biçiminde yazınız.

Fonksiyon sözcüğü **işlev**, **görev**, **bir nesnenin kendine özgü eylemi** anlamlarına gelir.

Bir bağıntıda tanım kümesinin her bir elemanı değer kümesinin yalnız bir elemanı ile eşlenmiş olsun. Matematikte, –**fonksiyon** sözcüğünün sözlük anlamı ile uyumlu olarak– böyle bir bağıntının ikililerinin ikinci bileşenleri, birinci bileşenlerinin birer **işlev**i ya da **fonksiyon**u diye adlandırılırlar. Böyle bir **f** bağıntısında; örneğin, $(2, 3) \in f$ olsun. Buradaki "2" sayısı, f bağıntısında belirtilmiş olan işlevinin gereği "3" sayısına eşlenmiştir. Bu durum, "2'nin işlevi 3'tür." veya "3, 2'nin fonksiyonudur." sözleriyle ifade edilir.

Tanım - 3.18

A ve B boş olmayan iki küme olduğuna göre; A'nın her bir elemanını B'de yalnız bir elemana eşleyen A'dan B'ye bir bağıntıya, ***A'dan B'ye fonksiyon*** *denir.*

Fonksiyonlar genellikle f, g, h, … ya da F, G, H, … gibi harflerle adlandırılırlar.

A'dan B'ye bir fonksiyon f ise bu, $\mathbf{f : A \to B}$ veya $\mathbf{A \xrightarrow{f} B}$ biçiminde gösterilir.

Tanım – 3.18'e göre, A'dan B'ye bir f bağıntısının fonksiyon olması için gerekli ve yeterli koşul;

$(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A} \wedge \exists \mathbf{y} \in \mathbf{B}) \Rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{f}$ ve

$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, [(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{f} \wedge (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbf{f}] \Rightarrow (\mathbf{y} = \mathbf{z})$ olmasıdır.

Tanım – 3.18 yeterince açıktır. Ama biz bir kere daha belirtelim:

A'dan B'ye bir f bağıntısının bir fonksiyon olması için,

① A'da eşlenmemiş eleman kalmamalı;

② A'nın bir elemanı B'nin birden fazla elemanı ile eşlenmemelidir.

Etkinlik – 3.30

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{0, 2, 4, 6\}$ olduğuna göre, A'dan B'ye aşağıda tanımlanan bağıntılardan hangileri fonksiyondur?

a. $\beta_1 = \{(1,2), (4,2), (3,4)\}$

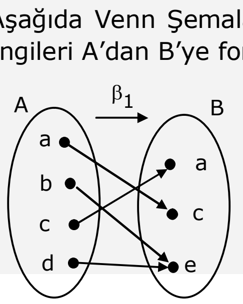
b. $\beta_2 = \{(1,0), (2,4), (3,2), (3,6)\}$

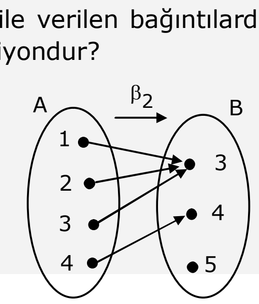
c. $\beta_3 = \{(1,0), (2,6), (3,6), (4,6)\}$

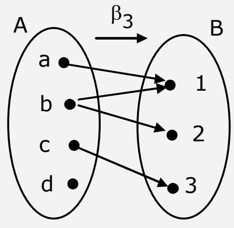
d. $\beta_4 = \{(1,6), (2,4), (3,2), (4,0)\}$

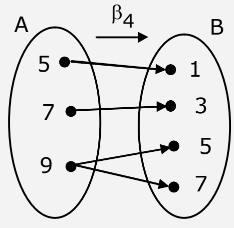
Etkinlik – 3.31

Aşağıda Venn Şemaları ile verilen bağıntılardan hangileri A'dan B'ye fonksiyondur?

a.


b.


c.


d.


Fonksiyonların Tanım, Değer ve Görüntü Kümeleri

Her fonksiyon bir bağıntı olduğundan, f : A → B fonksiyonunda –bağıntılarda olduğu gibi– A **tanım kümesi** ve B **değer kümesi**dir.

Tanım - 3.19

A ve B birer küme olmak üzere, x∈A ise B'de x'e eşlenen elemana x'in f altındaki ***görüntü****sü veya f 'nin x'deki* ***değeri*** *denir ve bu* ***f(x)*** *ile gösterilir.*

f ile **f(x)** sembollerini karıştırmayınız. **f** fonksiyon kümesini; **f(x)** fonksiyonun x'deki değerini temsil eder.

$\mathbf{y = f(x)}$ **ve** $\mathbf{(x, f(x)) \in f}$ dir.

$\mathbf{y = f(x)}$ eşitliğindeki **f(x)**, tanım kümesindeki bir x elemanının, değer kümesindeki hangi y elemanına eşleneceğini belirten x türünden bir ifadedir. Bundan dolayı, **f(x)** e **fonksiyonun kuralı** da denir.

$\mathbf{f : A \to B}$ fonksiyonunda **(x, y)∈f** olduğu

$\mathbf{f : x \to y}$, $\mathbf{x \xrightarrow{f} y}$, $\mathbf{y = f(x)}$ ifadelerinden biri ile belirtilir.

Örneğin; $f : 2 \to 4$, $2 \xrightarrow{f} 4$, $f(2) = 4$ ifadeleri (2, 4)∈f anlamına gelir.

$\mathbf{f : A \to B}$ fonksiyonu da

$\mathbf{f = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in A,\ y \in B\}}$ biçiminde ya da kısaca **f : A → B, y = f(x)** biçiminde gösterilir.

f : A → B , y = f(x) fonksiyonunda x değişkeni A kümesindeki her değeri alabilirken, y değişkeni x'in değerlerine bağlı olarak değerler alır. Bu yüzden x'e **bağımsız değişken**; y'ye **bağımlı değişken** denir.

Tanım - 3.20

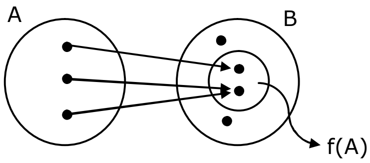
$f: A \to B$ fonksiyonunda

$\{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), x \in A\}$ *kümesine –yani A'nın tüm elemanlarının görüntülerinin kümesine–* ***A'nın f altındaki görüntüsü*** *veya kısaca* ***görüntü kümesi*** *denir.*

f : A → B fonksiyonunda görüntü kümesi **f(A)** ile gösterilir.

f(A) ⊂ **B** olduğu açıktır.

Şekli inceleyiniz.



Örnek – 3.30

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ve $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere, $f: A \to B,\ \ y = f(x) = x^2$ fonksiyonu verilmiş olsun.

f ve f(A) kümelerini bulacağız.

Fonksiyonun kuralı, $f(x) = x^2$ dir. f ve f(A) kümeleri ortak özelik yöntemi ile yazılırsa;

$f = \{(x, y) \mid y = x^2,\ x \in A,\ y \in B\}$ ve

$f(A) = \{y \mid y \in B,\ y = x^2,\ x \in A\}$ olur.

Liste yöntemi ile,

$f = \{(-1, f(-1)),\ (0, f(0)),\ (1, f(1)),\ (2, f(2))\}$ ve

$f(A) = \{f(-1),\ f(0),\ f(1),\ f(2)\}$ dir.

$f(x) = x^2$ olduğundan

$f(-1) = (-1)^2 = 1,\qquad f(0) = 0^2 = 0,$

$f(1) = 1^2 = 1,\qquad f(2) = 2^2 = 4$ olup bu değerler yerlerine konulursa,

$f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$ ve

$f(A) = \{1, 0, 4\}$ bulunur.

Etkinlik – 3.32

$A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$ olmak üzere,

$f: A \to R,\ \ f(x) = x^2 - x + 2$ fonksiyonu veriliyor.

a. Aşağıdaki ifadelerde "?" işaretlerinin yerlerine konulması gereken sayıları bulunuz.

I. $f: 1 \to ?$ **II.** $3 \xrightarrow{f} ?$ **III.** $f(5) = ?$

IV. $? \xrightarrow{f} 2$ **V.** $f: ? \to 8$ **VI.** $f(?) = 4$

b. f ve f(A) kümelerini liste yöntemi ile yazınız.

Etkinlik – 3.33

$f: R \to R,\ \ f(x) = 2x + 5$ ve

$g: R \to R,\ \ g(x) = 5x - 4$ fonksiyonları veriliyor.

a. $f(-1),\ f(5),\ g(2),\ g(-2),\ f(2a), g(a+1)$ değerlerini bulunuz.

b. $f(a) = 9$ ise a kaçtır?

c. $g(a) = 11$ ise a kaçtır?

d. $f(2a) = 25$ ise a kaçtır?

e. $g(a-2) = 6$ ise a kaçtır?

f. $f(a) = g(a)$ ise a kaçtır?

g. $f(2a) = g(a-2)$ ise a kaçtır?

h. $2 \cdot f(3a+1) = g(2a+3) + 5$ ise a kaçtır?

Etkinlik – 3.34

$f: R \to R,\ \ f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & x < 3 \text{ ise} \\ 3x - 7 & x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

a. f(1), f(2), f(3), f(4) değerlerini bulunuz.

b. $f(a) = -1$ ise a kaçtır?

c. $f(a) = 11$ ise a kaçtır?

d. $f(a) = 8$ ise a kaçtır?

e. $f(a) = f(4)$ ve $a \neq 4$ ise a kaçtır?

f. $f(3-a) = f(3+a)$ ise a kaçtır?

Etkinlik – 3.35

$f: Z \to Z$ fonksiyonu

$\left.\begin{array}{r} f(x+1) = f(x) + 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\}$ biçiminde verilmiştir.

Buna göre, f(20) kaçtır?

Etkinlik – 3.36

$f: A \to R,\ f(x) = \dfrac{x-2}{(x+1)(x-3)}$

fonksiyonu veriliyor.

a. "$2 \in A$" önermesi doğru olabilir mi?

b. "$-1 \in A$" önermesi doğru olabilir mi?

c. "$3 \in A$" önermesi doğru olabilir mi?

d. Fonksiyonun kuralını dikkate alarak, en geniş A kümesini belirtiniz.

Etkinlik – 3.37

$f: A \to R,\ f(x) = \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{x-2}{x-4}$

fonksiyonu veriliyor.

a. "$0 \in A$" önermesi doğru olabilir mi?

b. "$-2 \in A$" önermesi doğru olabilir mi?

c. "$4 \in A$" önermesi doğru olabilir mi?

d. Fonksiyonun kuralını dikkate alarak, en geniş A kümesini belirtiniz.

Etkinlik – 3.38

$f: A \to R,\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$

fonksiyonu veriliyor.

a. "$-2 \in A$" önermesi doğru olabilir mi?

b. "$-1 \in A$" önermesi doğru olabilir mi?

c. "$2 \in A$" önermesi doğru olabilir mi?

d. Fonksiyonun en geniş tanım kümesini belirtiniz.

✚ Etkinliklerle sizin de keşfettiğiniz gibi; $f: A \to B$, $y = f(x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi, x yerine konulabilecek tüm elemanların kümesidir.

x yerine hangi elemanların konulabileceğini fonksiyonun $y = f(x)$ kuralı belirler. $f(x)$'i tanımsız yapan değerler x yerine konulamaz. $f: A \to B$, $y = f(x)$ fonksiyonunda,

$x \in A$ ve $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ ise $h(x) \neq 0$;

$x \in A$ ve $f(x) = \sqrt{g(x)}$ ise $g(x) \geq 0$ olmalıdır.

Etkinlik – 3.39

Aşağıdaki fonksiyonların en geniş tanım kümelerini belirtiniz.

a. $f: A \to R,\ f(x) = \dfrac{x}{x^2+4} - \dfrac{2}{x^2-1}$

b. $f: A \to R,\ f(x) = \dfrac{1}{x^2-4} - \dfrac{x-1}{(x+1)(x-2)}$

c. $f: A \to R,\ f(x) = \sqrt{x-2}$

d. $f: A \to R,\ f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{x+3}$

e. $f: A \to R,\ f(x) = \sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}$

f. $f: A \to R,\ f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-9} + \sqrt{x}$

g. $f: A \to R,\ f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x-3}} + \dfrac{x}{x-4}$

h. $f: A \to R,\ f(x) = \dfrac{(x-2)\sqrt{x-1}}{(x-4)\sqrt{x+2}}$

Etkinlik – 3.40

$f: A \to R,\ f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$ fonksiyonu veriliyor.

$f(A) = \{-3, -1, 2, 3\}$ olduğuna göre, A kümesini belirtiniz.

Etkinlik – 3.41

$f = \{(x,y) \mid 2x + y = 5,\ x \in A,\ y \in B\}$ kümesi bir fonksiyondur ve $B = \{x \mid -1 \leq x < 9,\ x \in R\}$ dir.

Buna göre, f fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

Etkinlik – 3.42

Özkütlesi 8 g/cm^3 olan alaşımdan yarıçapları en çok 5 cm olan 100 cm uzunluğunda silindirik çubuklar yapılacaktır.

a. Çubukların kütlelerini (gram cinsinden), yarıçaplarının (cm cinsinden) fonksiyonu olarak yazınız.

b. Aynı alaşımdan yarıçapları 5 cm olan silindirik çubuklar yapılacağını varsayarak, çubukların kütlelerini uzunluklarının fonksiyonu olarak yazınız.

Fonksiyonların Eşitliği

Tanım - 3.21

A'dan B'ye f ve g fonksiyonları verildiğinde,

$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}$ *için* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ *oluyorsa* ***f ve g fonksiyonları eşittir****, denir.*

f ve g fonksiyonlarının eşitliği $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ biçiminde gösterilir.

Örnek – 3.31

$A = \{4, 5, 7\}$ olmak üzere,

$f : A \to R,\ \ f(x) = 2x - 3$ ve

$g : A \to R,\ \ g(x) =$ "x'ten büyük olan en küçük asal sayı" fonksiyonları verilmiş olsun.

$f(4) = g(4) = 5$;

$f(5) = g(5) = 7$;

$f(7) = g(7) = 11$ olduğundan

$f = g = \{(4,5), (5,7), (7,11)\}$ dir.

Dikkat ediniz!

Örneğin; 3∈A olsaydı, $f \neq g$ olacaktı.

3.3.2 – Fonksiyonların Grafikleri

Her fonksiyon aynı zamanda bir bağıntıdır. Buna göre, fonksiyonların şemalarının ve grafiklerinin çizimleri bağıntılarınkinden farklı olmayacaktır.

Sonlu sayıda elemandan oluşan bağıntı ve fonksiyonların grafiklerinin çizimi, bunların ikililerine analitik düzlemde karşılık gelen noktaların belirtilmesinden ibarettir.

Sonsuz elemanlı bağıntı ve fonksiyonların grafiklerinin çiziminde bunlara ait özel noktalardan, çizime yardımcı olacak özel doğru veya eğrilerden yararlanılır.

Bu yöntemleri, ileride yeri geldikçe öğreneceksiniz.

Şimdilik; biz bu tür grafikleri, grafiğin şeklini ortaya çıkarabilmemize yetecek sayıda noktayı işaretleyerek çizeceğiz.

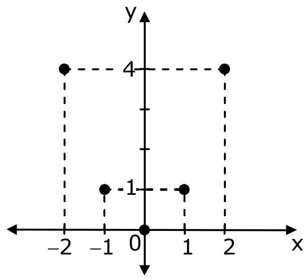
Örnek – 3.32

$f = R \to R,\ \ f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim:

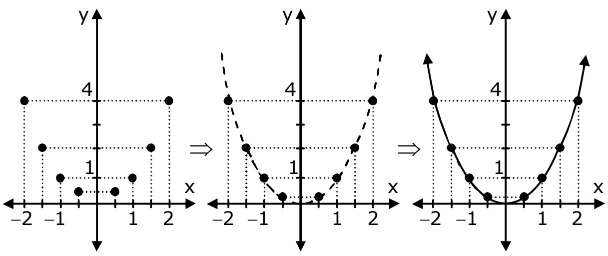
Fonksiyonun tanım kümesindeki bazı x değerlerine karşılık gelen $y = f(x)$ değerleri tabloda gösterilmiştir. Bu tabloya, fonksiyonun **değişim tablosu** adı verilir.

x	–2	–1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Değişim tablosunda belirtilen (x, y) ikililerinin kümesine ait grafik yandaki gibi olur.



Şekildeki 5 noktadan oluşan grafik, f fonksiyonunun grafiğini kabaca ortaya koyar. x'e verdiğimiz değerlerin sayısını –dolayısıyla grafiğe ait noktaların sayısını– arttırdıkça şekil daha da belirginleşir.



Örnek – 3.33

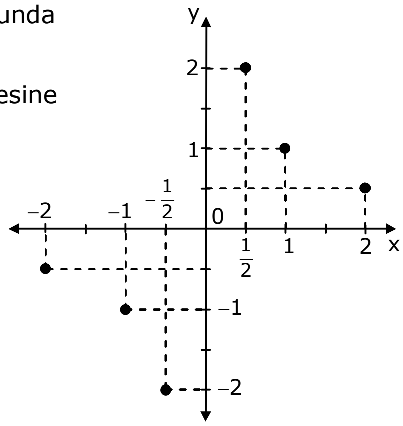
$f = R - \{0\} \to R - \{0\},\ \ f(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim:

$x = 0$ için fonksiyon tanımsızdır.

Grafiğin şeklini ortaya çıkarmak için x'e hem sıfırdan büyük hem de sıfırdan küçük değerler vermeliyiz.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$

Değişim tablosunda belirtilen (x, y) ikililerinin kümesine ait grafik yandaki gibi olur.



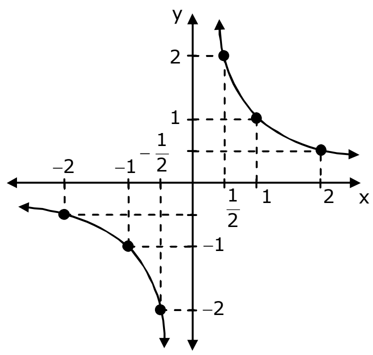
Fonksiyonun $f(x) = \frac{1}{x}$ kuralına göre,

x'in sıfırdan büyük değerleri sıfıra yaklaştıkça fonksiyonun değerlerinin $+\infty$'a;

x'in sıfırdan küçük değerleri sıfıra yaklaştıkça fonksiyonun değerlerinin $-\infty$'a;

x'in mutlak değerleri $+\infty$'a yaklaştıkça fonksiyonun değerlerinin sıfıra yaklaştığına dikkat ediniz.

Buna göre, fonksiyonun grafiği yandaki gibi olur. Grafiğin bu şeklini yukarıdaki 6 noktalı grafikten sezemediyseniz, değişim tablosuna $-3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 3$ değerlerini de ekleyiniz.

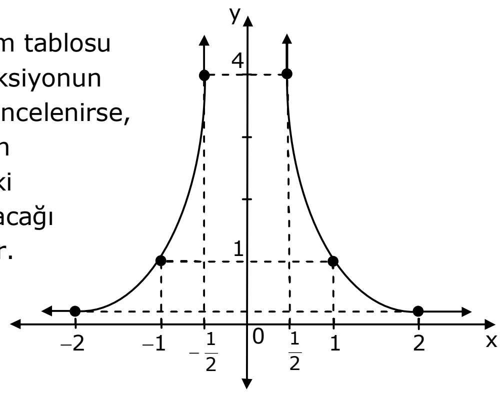


Örnek – 3.34

$f = R - \{0\} \to R - \{0\},\ f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	$\frac{1}{4}$	1	4	4	1	$\frac{1}{4}$

Değişim tablosu ve fonksiyonun kuralı incelenirse, grafiğin yandaki gibi olacağı görülür.



Örnek – 3.35

$f = R - \{2\} \to R - \{1\},\ f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim:

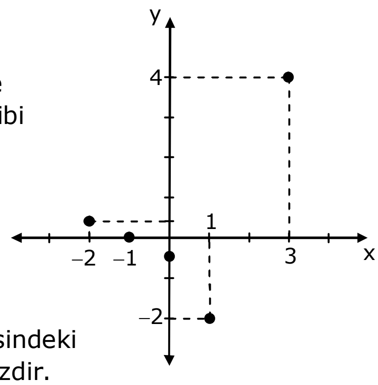
x'e, fonksiyonun kuralını belirten kesrin payını ve paydasını sıfır yapan değerleri içine alacak bir aralıkta değerler verirsek, grafiği ortaya çıkarmamız kolaylaşır.

x	-2	-1	0	1	3
y	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	4

x'in değerleri 2'ye yaklaştıkça fonksiyonun değerlerinin $+\infty$'a ya da $-\infty$'a;

x'in mutlak değerleri $+\infty$'a yaklaştıkça fonksiyonun değerlerinin 1'e yaklaştığına dikkat ediniz.

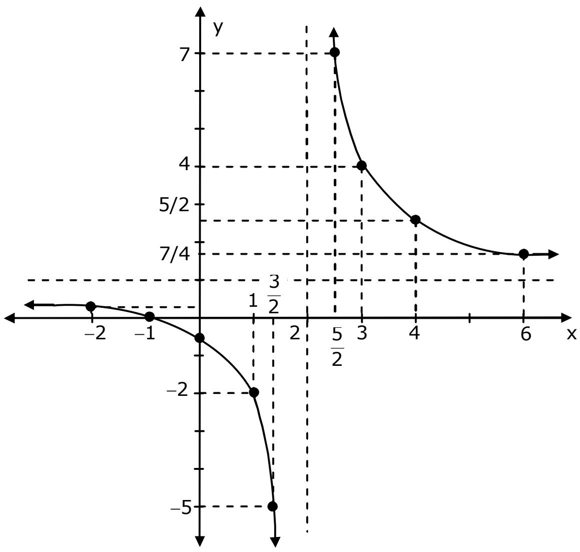
Değişim tablosunda belirttiğimiz (x, y) ikililerinin kümesine ait grafik yandaki gibi olur. Bu grafiğe bakarak, fonksiyonun grafiğinin $x < 2$ bölgesindeki şeklini ortaya çıkarabiliriz. Ancak, $x > 2$ bölgesindeki şekli oldukça belirsizdir.



Bu durumda, $x = 2$ civarındaki ve $x > 2$ bölgesindeki nokta sayısını arttırmalıyız.

x	-2	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	4	6
y	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	-5	7	4	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{4}$

Bu yeni değişim tablosuna göre; grafik, aşağıdaki gibi ortaya çıkarılabilir.



Etkinlik – 3.43

$f: A \to R,\ \ f(x) = (x-2)^2$ fonksiyonu veriliyor.

a. $A = \{0,1,2,3,4\}$ olduğuna göre, f fonksiyonunu Venn şeması ile gösteriniz. Fonksiyonun grafiğini çiziniz.

b. $A = R$ olduğuna göre, f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Etkinlik – 3.44

$f: A \to R - \{0\},\ f(x) = \dfrac{2}{x+2}$ fonksiyonu veriliyor.

a. $A = \left\{-4,-3,-\dfrac{5}{2},-\dfrac{3}{2},-1,0,1\right\}$ olduğuna göre, f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b. $A = R - \{-2\}$ olduğuna göre, f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Etkinlik – 3.45

$f: A \to R - \{1\},\ f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ fonksiyonu veriliyor.

a. $A = \left\{0,1,\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2},3,4\right\}$ olduğuna göre, f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b. $A = R - \{2\}$ olduğuna göre, f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Etkinlik – 3.46

Aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $f: R \to R,\ \ f(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)^2$

b. $f: R - \{1\} \to R - \{1\},\ \ f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$

c. $f: R - \{1\} \to R - \{0\},\ \ f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

d. $f: R - \{2\} \to R - \{2\},\ \ f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$

e. $f: R \to R,\ \ f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

f. $f: R \to R,\ \ f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Doğrusal Fonksiyonun Grafiği

Grafiği bir doğru –ya da doğrunun bir alt kümesi– olan fonksiyonlara **doğrusal fonksiyon** denir.

a ve b birer gerçek sayı olmak üzere,

$\mathbf{y = ax + b}$ denkleminin x0y koordinat düzleminde bir doğruya karşılık geldiğini biliyorsunuz.

Buna göre; $A \subset R$ ve $B \subset R$ olmak üzere,

$\mathbf{f: A \to B,\ f(x) = ax + b}$ fonksiyonu bir **doğrusal fonksiyon**dur.

Farklı iki nokta bir doğru belirtir.

O hâlde; $A = R$ olduğu durumda,

$\mathbf{f: R \to R,\ f(x) = ax + b}$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için grafiğe ait iki noktayı belirtmek yeter.

$A \neq R$ olduğu durumları da örnekler üzerinde inceleyelim:

Örnek – 3.36

$f : A \to R, \quad f\{x\} = 2x - 2$ fonksiyonu veriliyor.

Aşağıda belirtilen A tanım kümeleri için elde edilecek fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $A = \{0, 1, 2, 3\}$ **b.** $A = \{x \mid x \geq 1,\ x \in R\}$

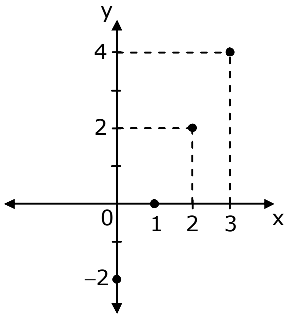
c. $A = \{x \mid -1 \leq x < 2,\ x \in R\}$ **d.** $A = R$

Çözüm

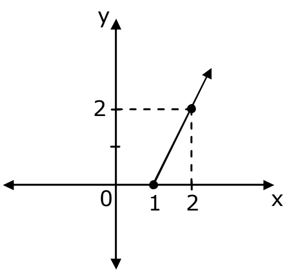
a.

x	0	1	2	3
y	–2	0	2	4

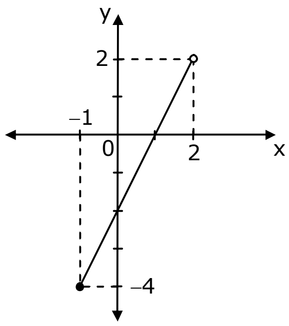
Grafik, şekilde belirtilen dört noktadan ibarettir.



b. $f(x) = 2x - 2$
$\Rightarrow f(1) = 0$ ve $f(2) = 2$
olduğundan;
grafik, uç noktası (1, 0) olan ve (2, 2) noktasından geçen ışındır.



c. $f(x) = 2x - 2$
$\Rightarrow f(-1) = -4$ ve
$f(2) = 2$
olduğundan;
grafik, uç noktaları $(-1, -4)$ ve (2, 2) olan şekildeki doğru parçasıdır.

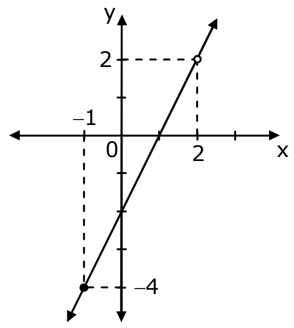


$(-1, -4)$ noktasının grafiğe ait olduğu, bu noktanın bir dairecikle; (2, 2) noktasının grafiğe ait olmadığı, bu noktanın bir çembercikle gösterilmesiyle belirtilmiştir.

d. Grafiğin çizimi için, grafiğe ait rastgele iki nokta belirtilir ve bu noktaların belirttiği doğru çizilir.

x	–1	2
y	–4	2

Grafik, $(-1, -4)$ ve (2, 2) noktalarının belirttiği doğrudur.



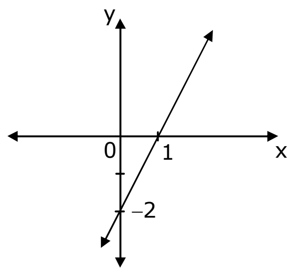
Bir de şöyle yapalım:

Doğrusal fonksiyonun grafiğinin çizimi için genellikle grafiğin eksenleri kestiği noktalar seçilir.

$y = 2x - 2$ doğrusunun y ekseni üzerindeki noktasının apsisi sıfır; x ekseni üzerinde noktasının ordinatı sıfırdır. Buna göre; x yerine 0 konularak doğrunun y eksenini kestiği nokta; y yerine 0 konularak x eksenini kestği nokta bulunur.

x	0	1
y	–2	0

Öyleyse;
grafik $(0, -2)$ ve (1, 0) noktalarından geçen doğrudur.



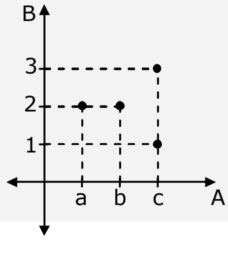
Etkinlik – 3.47

Aşağıdaki grafiklerden hangileri bir fonksiyonun grafiği olabilir?

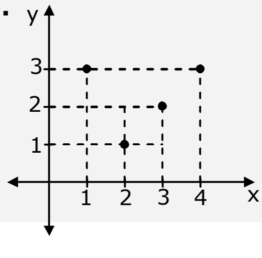
Fonksiyon olanlarının tanım ve görüntü kümelerini belirtiniz.

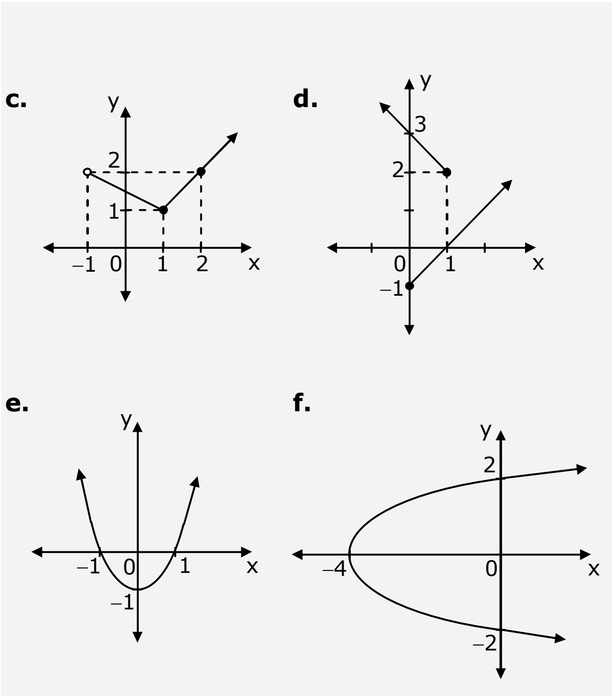
[Bir grafiğin bir fonksiyona ait olabilmesi için; tanım kümesinin elemanlarına karşılık gelen noktalardan değer kümesine karşılık gelen doğruya çizilen paralel doğruların, grafiği yalnız bir noktada kesmeleri gerekir. (Neden?)]

a.



b.





3.3.3 – Fonksiyon Türleri

Bire Bir Fonksiyon

Tanım - 3.22

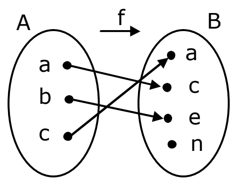
*Tanım kümesinin farklı elemanlarını değer kümesinin farklı elemanlarına eşleyen fonksiyona **bire bir fonksi-yon** denir.*

Tanım – 3.22 şöyle de ifade edilebilir:

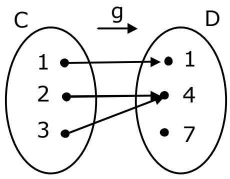
$f : A \to B$ fonksiyonunun **bire bir** olması için gerek ve yeter koşul
$\forall \mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2} \in \mathbf{A};\ \mathbf{x_1} \neq \mathbf{x_2} \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x_1}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{x_2})$ olmasıdır.

Örneğin; sınıfınızdaki her öğrenciyi o öğrencinin okul numarasına eşleyen fonksiyon bire birdir.

Aşağıda Venn şemaları ile verilen fonksiyonları inceleyiniz.



f bire birdir.



g bire bir değildir.
$\left[f(2) = f(3)\right]$

Örten Fonksiyon; İçine Fonksiyon

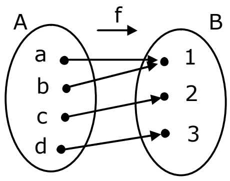
Tanım - 3.23

*Görüntü kümesi değer kümesine eşit olan fonksiyona **örten fonksiyon**; görüntü kümesi değer kümesine eşit olmayan fonksiyona **içine fonksiyon** denir.*

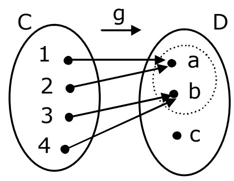
Tanım – 3.23 şöyle de ifade edilebilir:

$f : A \to B$ fonksiyonunun **örten** olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{f}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$ olması; **içine fonksiyon** olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{f}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{B}$ olmasıdır.

Aşağıda Venn şemaları ile verilen fonksiyonları inceleyiniz.



f örtendir.
$\left[f(A) = B\right]$



g içinedir.
$\left[g(C) \neq D\right]$

Etkinlik – 3.48

Bir çocuk yuvasındaki çocuklardan 2'sinin anneleri aynı, babaları farklı; 2'sinin hem anneleri hem babaları aynıdır.

Yuvadaki çocukların kümesi Ç,
annelerinin kümesi A,
babalarının kümesi B,
annelerinin son eşlerinin kümesi S'dir.

a. Ç'den A'ya, çocukları annelerine eşleyen fonksiyon bire bir midir? Örten midir?

b. Ç'den B'ye, çocukları babalarına eşleyen fonksiyon bire bir midir? Örten midir?

c. A'dan B'ye, çocukların annelerini babalarına eşleyen bağıntı bir fonksiyon mudur? Fonksiyon ise, bire bir midir? Örten midir?

d. A'dan S'ye, çocukların annelerini son eşlerine eşleyen bağıntı bir fonksiyon mudur? Fonksiyon ise, bire bir midir? Örten midir?

Etkinlik – 3.49

Aşağıda verilen fonksiyonlardan hangileri bire bir; hangileri içine ya da örtendir?

a. $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere;
$f : A \to B,\ f = \{(a,2), (b,2), (c,3)\}$

b. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ve $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere; $f : A \to B,\ f(x) = x^2 + 1$

c. $A = \{a, b, c\}$ olmak üzere;
$f : A \to A,\ f = \{(a,b), (b,c), (c,a)\}$

d. $f : N \to N,\ f(x) = x + 2$

e. $f : Z \to Z,\ f(x) = 2x - 1$

f. $f : R \to R,\ f(x) = x^2 + 4$

g. $f : R^+ \to R^+,\ f(x) = x^2$

h. $f : R^- \to [-1, +\infty),\ f(x) = x^2 - 1$

i. $f : R - \{-2\} \to R - \{1\},\ f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

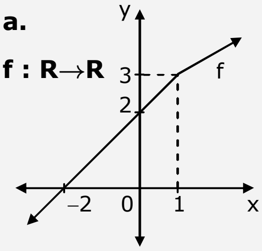
j. $f : R - \{0\} \to R,\ f(x) = \dfrac{x-2}{x}$

Etkinlik – 3.50

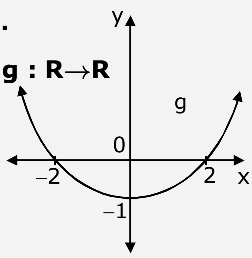
Aşağıda tanım kümeleri, değer kümeleri ve grafikleri verilen fonksiyonlardan hangileri bire bir; hangileri içine ya da örtendir?

[Bir fonksiyonun bire bir olması için; değer kümesinin elemanlarına karşılık gelen noktalardan tanım kümesine karşılık gelen doğruya çizilen paralel doğruların, grafiği yalnız bir noktada kesmeleri gerekir. (Neden?)]

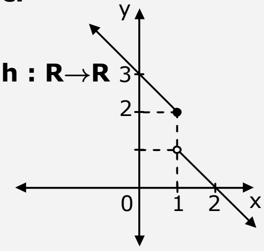
a. **f : R→R**



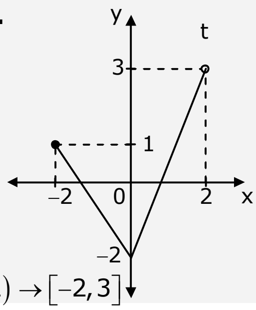
b. **g : R→R**



c. **h : R→R**



d.



$t : [-2, 2) \to [-2, 3]$

Birim Fonksiyon

Tanım - 3.24

A boş kümeden farklı bir küme olmak üzere; A'nın her elemanını kendisine eşleyen fonksiyona, A'da ***birim fonksiyon*** *veya* ***özdeşlik fonksiyonu*** *denir.*

Birim fonksiyon, diğer fonksiyonlar gibi herhangi bir harfle gösterilebilirse de, daha çok "**I**" ile gösterilir.

$\mathbf{I = \{(x, x) | x \in A\}}$ veya

$\mathbf{I : A \to A,\ I(x) = x}$ biçiminde yazılabilir.

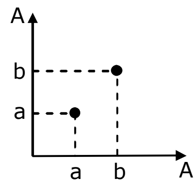
I fonksiyonunun A'da birim fonksiyon olduğu,

$\mathbf{I_A}$ biçiminde de gösterilebilir.

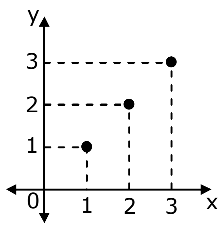
Örnek – 3.37

$I : A \to A,\ I\{x\} = x$ fonksiyonu,

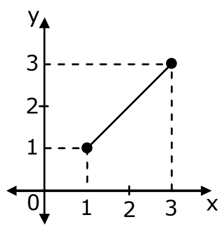
a. $A = \{a, b\}$ iken
$I = \{(a,a), (b,b)\}$ olup
grafiği yanda
verilmiştir.



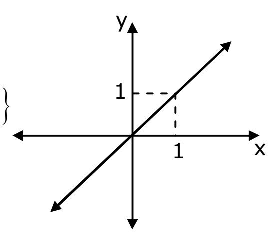
b. $A = \{1, 2, 3\}$ iken
$I = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$
olup grafiği yanda
verilmiştir.



c. $A = \{x | 1 \le x \le 3,\ x \in R\}$
iken
$I = \{(x, y) | y = x,\ x \in A\}$
olup grafiği yanda
verilmiştir.



d. $A = R$
$I = \{(x, y) | y = x,\ x \in R\}$
olup grafiği yanda
verilmiştir.



Sabit Fonksiyon

Tanım - 3.25

*A boş kümeden farklı bir küme olmak üzere; A'nın her elemanını B'nin aynı bir elemanına eşleyen fonksiyona **sabit fonksiyon** denir.*

Sabit fonksiyon, $\mathbf{f : A \to B,\ \ f(x) = k}$ biçiminde yazılabilir.

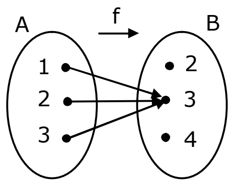
$k = 0$ ise, $f : A \to B,\ \ f(x) = 0$ fonksiyonuna **sıfır fonksiyonu** adı verilir.

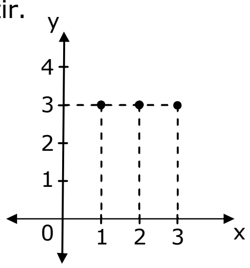
Örnek – 3.38

a. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{2, 3, 4\}$ olmak üzere;

$f : A \to B,\ \ f(x) = 3$ fonksiyonu bir sabit fonksiyondur.

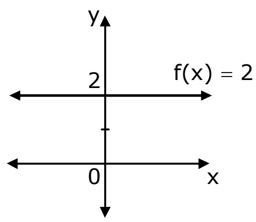
$f = \{(1,3), (2,3), (3,3)\}$ olup fonksiyonun şeması ve grafiği aşağıda verilmiştir.





b. $f = R \to R,\ \ f(x) = 2$ fonksiyonu bir sabit fonksiyondur.

$f = \{(x, y) | y = 2,\ \ x \in R\}$ olup fonksiyonun grafiği yanda verilmiştir.

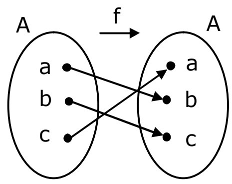


Permütasyon Fonksiyonu

Tanım - 3.26

*A boş kümeden farklı sonlu bir küme olmak üzere, A'dan A'ya bire bir ve örten fonksiyona A kümesinin bir **permütasyon**u denir.*

$A = \{a, b, c\}$ olmak üzere, $f : A \to A,\ \ y = f(x)$ fonksiyonu yandaki Venn şemasındaki gibi verilmiş olsun.



Şemaya göre

$f(a) = b,\ f(b) = c$ ve $f(c) = a$ olup fonksiyonu

$f = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$ dir.

f permütasyon fonksiyonu genellikle, tanım kümesinin elemanları bir sırada yazılıp her elemanın altına görüntüsü konularak

$f : \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ biçiminde yazılır.

"a, b, c yi b, c, a ya eşleyen permütasyon" diye okunur.

Fonksiyon Sayısı

İlköğretimdeki matematik derslerinizde

- **Saymanın temel ilkesi**ni;
- n elemanlı bir kümenin sıralı r'lilerinden her birine n'in r'li **permütasyon**u denildiğini ve bunların sayısının

  $\mathbf{P(n, r) = \dfrac{n!}{(n - r)!}}$ olduğunu;
- n elemanlı kümenin n'li permütasyonlarının sayısının $\mathbf{P(n, n) = n!}$ olduğunu öğrenmiştiniz.

Kombinasyon kavramını da 2. bölümde yeniden ele almıştık.

Bu bilgileri kullanarak aşağıda verilen etkinliği yapınız.

Etkinlik – 3.51

m ve n birer sayma sayısı olmak üzere; A ve B kümeleri için $s(A) = m$ ve $s(B) = n$ olarak verilmiştir.

a. A'dan B'ye tanımlanabilecek fonksiyonların sayısının $\mathbf{n^m}$ olduğunu gösteriniz.

b. $m < n$ olduğunda, A'dan B'ye tanımlanabilecek bire bir fonksiyonların sayısının $\mathbf{P(n,m)}$ olduğunu gösteriniz.

c. A'dan B'ye tanımlanabilecek sabit fonksiyonların sayısını bulunuz.

d. A'dan A'ya tanımlanabilecek permütasyon fonksiyonlarının sayısının **m!** olduğunu gösteriniz.

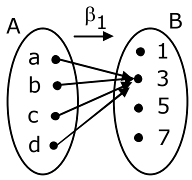
e. A'dan A'ya tanımlanabilecek içine fonksiyonların sayısını bulunuz.

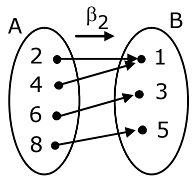
f. $m = 4$ ve $n = 3$ ise; B'ye tanımlanabilecek örten fonksiyonların sayısını bulunuz.

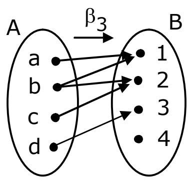
Alıştırmalar ve Problemler – 3.3

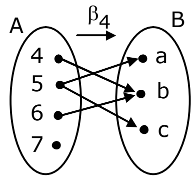
1. Aşağıda Venn şemaları ile verilen bağıntılardan hangileri A'dan B'ye fonksiyondur?

Fonksiyon olanların türlerini belirtiniz. Fonksiyon olmayanları fonksiyona dönüştürmek için tanım kümelerinden en az hangi elemanların çıkarılması gerekir?

a.


b.


c.


d.


2. $A = \{1,2,3\}$ ve $B = \{2,3,5,7\}$ olduğuna göre, aşağıdaki bağıntılardan hangileri A'dan B'ye fonksiyondur?

Fonksiyon olanların türlerini belirtiniz.

a. $\beta_1 = \{(1,3),(2,3),(3,5)\}$

b. $\beta_2 = \{(1,2),(2,3),(3,2),(3,7)\}$

c. $\beta_3 = \{(2,2),(2,3),(3,5),(3,7)\}$

d. $\beta_4 = \{(2,1),(3,2),(5,3),(7,1)\}$

3. Aşağıdaki bağıntılardan hangileri fonksiyondur?

Fonksiyon olanların türlerini belirtiniz. Fonksiyon olmayanların tanım veya değer kümelerini değiştirerek bunları fonksiyonlara dönüştürünüz.

a. $\beta_1 = \{(x,y) \mid x + 2y = 5,\ (x,y) \in Z^2\}$

b. $\beta_2 = \{(x,y) \mid y^2 = x + 1,\ (x,y) \in R^2\}$

c. $\beta_3 = \{(x,y) \mid x^2 + y = 0,\ (x,y) \in R^2\}$

d. $\beta_4 = \left\{(x,y) \mid y = \dfrac{x+3}{x-3},\ (x,y) \in R^2\right\}$

e. $\beta_5 = \{(x,y) \mid x = \sqrt{y-2},\ (x,y) \in N^2\}$

f. $\beta_6 = \{(x,y) \mid y = \sqrt{x-2},\ (x,y) \in R^2\}$

g. $A = \{-1,1,3,5\}$ ve $B = \{1,3,5,7,9,13\}$ olmak üzere, $f : A \to B,\ f(x) = 2x + 3$

h. $A = \{-1,0,1,2\}$ ve $B = \{0,2,4,6\}$ olmak üzere,
$f : A \to B,\ f(x) = 2(x-1)^2 - 2$

4. $A = \{-3,-2,0,1\}$ olduğuna göre, aşağıda verilen fonksiyonlar için f ve f(A) kümelerini yazınız.

a. $f : A \to R,\ f(x) = x^2 - 2x - 2$

b. $f : A \to R,\ f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$

5. $f : R \to R,\ f(x) = 3x - 2$ ve $g : R \to R,\ g(x) = 2x + 3$ fonksiyonları veriliyor.

a. $f(a) = g(2)$ ise a kaçtır?

b. $f(a+2) = g(2a)$ ise a kaçtır?

c. $f \cap g$ kümesini yazınız.

d. $A = \{x \mid -1 \le x \le 3,\ x \in R\}$ ve $f(A) = g(B)$ ise B kümesini bulunuz.

6. $f : R \to R,\ f(x) = \begin{cases} x+2 & x < 0 \text{ ise} \\ 2x-1 & 0 \le x < 2 \text{ ise} \\ 5-3x & x \ge 2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

a. $f(-2),\ f(1),\ f(3)$ değerlerini bulunuz.

b. $f(a)=2$ ise a kaçtır?

c. f fonksiyonunun grafiğinde, ordinatı 1 olan noktaları bulunuz.

d. $f(a)=f(5)$ ve $a\neq 5$ ise a kaçtır?

7. Aşağıda verilen fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

a. $f: A\to\{-1,1,2,3\},\quad f(x)=x-2$

b. $f: A\to R,\quad f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

c. $f: A\to R,\quad f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$

d. $f: A\to R,\quad f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+1}$

e. $f: A\to R,\quad f(x)=x-\sqrt{x-2}$

f. $f: A\to R,\quad f(x)=x-\sqrt{6-x}+2\sqrt{x+1}$

g. $f: A\to R,\quad f(x)=\dfrac{x\sqrt{x-1}}{x^2-4}$

h. $f: A\to R,\quad f(x)=\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{x-1}{x\sqrt{x+3}}$

i. $f: A\to R,\quad f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-9}+\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-4}$

j. $f: A\to R,\quad f(x)=\dfrac{(x+2)\sqrt{x+2}}{\left(x^2-1\right)\sqrt{4-x}}$

8. $f=\{(x,y)\mid x-2y=3,\ x\in A,\ y\in B\}$ kümesi bir fonksiyon olup $B=\{x\mid -2\leq x\leq 2,\ x\in R\}$ dir.

Buna göre, f fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz; grafiğini çiziniz.

9. Aşağıda verilen, A'dan B'ye f ve g fonksiyonları için $f=g$ olduğuna göre, en geniş A kümelerini bulunuz.

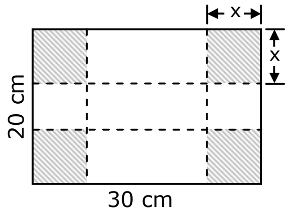
a. $f(x)=x^2-x-1,\quad g(x)=x+2$

b. $f(x)=2x^2+x+3,\quad g(x)=x^2+7x-5$

10. Çevresi 16 cm olan bir dikdörtgenin alanını (cm^2 cinsinden), bir kenar uzunluğunun (cm cinsinden) fonksiyonu olarak yazınız.

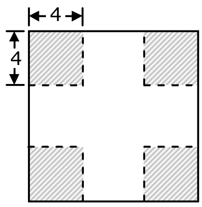
Fonksiyonun tanım kümesini ve görüntü kümesini belirtiniz.

11. Boyutları yandaki şekilde verilen dikdörtgen şeklindeki tenekenin köşelerinden, bir kenarı x cm olan kare şeklindeki parçalar kesilip atılacak ve kalan parçadan üstü açık bir kutu yapılacaktır.



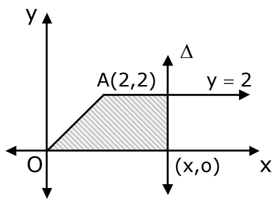
Elde edilecek kutunun hacmini (cm^3 cinsinden) x'in fonksiyonu olarak yazınız. Fonksiyonun tanım ve değer kümelerini belirtiniz.

12. Kare şeklindeki tenekelerin köşelerinden bir kenarı 4 cm olan kare şeklindeki parçalar kesilip atılacak ve kalan parçadan üstü açık kutular yapılacaktır.



Elde edilecek kutunun hacmini (cm^3 cinsinden), eldeki tenekenin bir kenar uzunluğunun (cm cinsinden) fonksiyonu olarak yazınız. Fonksiyonun tanım ve değer kümelerini belirtiniz.

13. Yandaki koordinat sisteminde; A(2,2) olmak üzere $[OA]$, x ekseni, $y=2$ doğrusu ve y eksenine paralel olan Δ doğrusunun sınırladığı bölge taranmıştır.



Δ doğrusunun x eksenini kestiği nokta (x, o) ile gösterilerek f : x → "Taralı alan" biçiminde tanımlanan fonksiyonun kuralını x cinsinden yazınız.

14. A'dan B'ye $f=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)\}$ fonksiyonu veriliyor. $A\cap B$ kümelerinden

a. en dar olanını yazınız.

b. en geniş olanını yazınız.

15. $f: Z \to Z$ fonksiyonu

$$\left.\begin{aligned} f(x+1) &= f(x)+2x \\ f(1) &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ biçiminde verilmiştir.}$$

a. f(30) kaçtır?

b. $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(30)$ kaçtır?

[$1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ve

$1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

eşitliklerini kullanmanız gerekebilir.]

16. $f: Z \to Z$ fonksiyonu

$$\left.\begin{aligned} f(x)+f(x+1) &= 2x-3 \\ f(2) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ biçiminde verilmiştir.}$$

a. f(40) kaçtır?

b. $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(40)$ kaçtır?

17. Pozitif gerçek sayılar kümesinde tanımlı bir f fonksiyonu için,

$f(x)\cdot f(x+1) = \dfrac{x}{x+2}$ ve $f(1) = \dfrac{1}{2}$ olduğu verilmiştir.

Buna göre, f(50) kaçtır?

18. $f: Z^+ \to Z^+$ fonksiyonu

$$\left.\begin{aligned} f(x+1) &= (x+2)\cdot f(x) \\ f(1) &= 2 \end{aligned}\right\} \text{ biçiminde verilmiştir.}$$

Buna göre, f(24) kaçtır?

19. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı bir f doğrusal fonksiyonu için, $f(1) = 2$ ve $f(2) = 5$ tir.

Buna göre, f(5) kaçtır?

20. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı bir f fonksiyonu için,

$f(x)-2f(-x) = x^2-x$ olduğu verilmiştir.

Buna göre, f(2) kaçtır?

21. Pozitif gerçek sayılar kümesinde tanımlı bir f fonksiyonu için, $f(x\cdot y) = f(x)+f(y)$ dir.

Buna göre, f(1) kaçtır?

22. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı bir f fonksiyonu için, $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ dir.

$f(1) = \dfrac{1}{2}$ ise;

a. f(3) kaçtır?

b. $f(-1)$ kaçtır?

23. $R-\{-1\}$ den R'ye bir f fonksiyonu için,

$f(1+x)+2f(1-x) = \dfrac{3x^2+x-6}{x^2-4}$ olduğu verilmiştir. Buna göre;

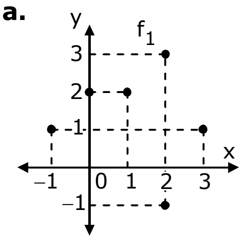
a. f(1) kaçtır?

b. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ kaçtır?

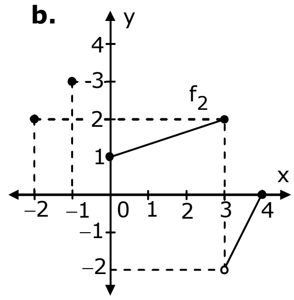
24. Aşağıdaki grafiklerden hangileri bir fonksiyonun grafiği olabilir?

Fonksiyon olanlarının tanım ve görüntü kümelerini, bire bir olup olmadıklarını belirtiniz.

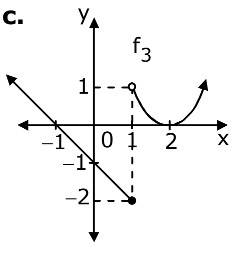
a.



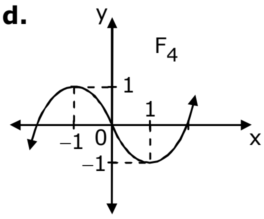
b.



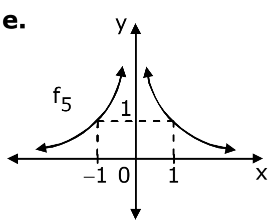
c.



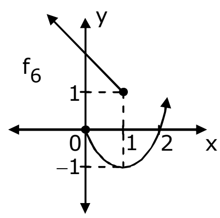
d.



e.



f.



25. $f: A \to R,\ f(x) = 6 - 3x$ fonksiyonu veriliyor.

Aşağıda belirtilen A tanım kümeleri için elde edilecek fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $A = \{0,1,2,3,4\}$

b. $A = \{x \mid x \le 2,\ x \in R\}$

c. $A = \{x \mid 0 \le x \le 3,\ x \in R\}$

d. $A = R$

26. $f: R \to R,\ f(x) = \begin{cases} 2 - x & x < 1 \text{ ise} \\ x + 2 & x \ge 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

27. $f: R \to R,\ f(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \text{ ise} \\ x + 1 & 1 \le x < 3 \text{ ise} \\ -1 & x \ge 3 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

28. $f: A \to R,\ f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonu veriliyor.

Aşağıda belirtilen A tanım kümeleri için elde edilecek fonksiyonların grafiklerini çiziniz. Her durumda fonksiyonun türünü (bire bir, örten gibi) belirtiniz.

a. $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ **b.** $A = \{x \mid x \ge 1,\ x \in R\}$

c. $A = R^-$ **d.** $A = R$

29. $f: A \to R,\ f(x) = (x-1)^2 - 1$ fonksiyonu veriliyor.

Aşağıda belirtilen A tanım kümeleri için elde edilecek fonksiyonların grafiklerini çiziniz. Her durumda fonksiyonun türünü belirtiniz.

a. $A = \{-1,0,1,2,3\}$ **b.** $A = \{x \mid x \ge 1,\ x \in R\}$

c. $A = R^-$ **d.** $A = R$

30. $f: A \to R,\ f(x) = \dfrac{2}{x-2}$ fonksiyonu veriliyor.

Aşağıda belirtilen A tanım kümeleri için elde edilecek fonksiyonların grafiklerini çiziniz. Her durumda fonksiyonun türünü belirtiniz.

a. $A = \left\{-1,0,1,\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2},3\right\}$ **b.** $A = R^-$

c. $A = \{x \mid x > 2,\ x \in R\}$ **d.** $A = R - \{2\}$

31. $f: A \to R,\ f(x) = \dfrac{x-2}{x}$ fonksiyonu veriliyor.

Aşağıda belirtilen A tanım kümeleri için elde edilecek fonksiyonların grafiklerini çiziniz. Her durumda fonksiyonun türünü belirtiniz.

a. $A = \left\{-2,-1,\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2},1,2\right\}$ **b.** $A = R^-$

c. $A = \{x \mid -1 \le x \le 2,\ x \in R\}$ **d.** $A = R - \{0\}$

32. $f: A \to R,\ f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 4}$ fonksiyonu veriliyor.

Aşağıda belirtilen A tanım kümeleri için elde edilecek fonksiyonların grafiklerini çiziniz. Her durumda fonksiyonun türünü belirtiniz.

a. $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ **b.** $A = R^-$

c. $A = \{x \mid -2 \le x \le 2,\ x \in R\}$ **d.** $A = R$

33. Aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz. Fonksiyonların türlerini belirtiniz.

a. $f: R \to R,\ f(x) = 1 - 2x^2$

b. $f: R \to R,\ f(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)^2 + 1$

c. $f: R - \{-2\} \to R,\ f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$

d. $f: R - \{1\} \to R,\ f(x) = \dfrac{2-x}{x-1}$

e. $f: R^+ \to R^+,\ f(x) = \sqrt{x}$

f. $f: (-\infty, 2] \to R,\ f(x) = \sqrt{2-x}$

34. Aşağıda verilen fonksiyonlardan hangileri bire bir; hangileri içine ya da örtendir?

İçine fonksiyon olanlarının görüntü kümelerini bulunuz.

a. $A = \{1,2,3\}$ ve $B = \{3,4,5,6\}$ olmak üzere, $f: A \to B,\ f = \{(1,4),(2,6),(3,3)\}$

b. $A = \{-1,0,1,2\}$ ve $B = \{1,3,5,7,9\}$ olmak üzere, $f: A \to B,\ f = (x) = 2x + 5$

c. $f = \{(x,y) \mid 2x - y = 3,\ (x,y) \in ZxZ\}$

d. $f: N \to N,\ f(x) = x + 1$

e. $f: Q \to Q\ ,\ \ f(x) = \dfrac{3-4x}{5}$

f. $f: [2,+\infty) \to R,\ \ f(x) = \sqrt{x-2}$

g. $f: R \to R,\ \ f(x) = (x-1)^2 + 2$

h. $f: R \to R,\ \ f(x) = \begin{cases} 2+x & x < 2 \text{ ise} \\ 3-x & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$

i. $f: R - \{1\} \to R,\ \ f(x) = \dfrac{4x+3}{2x-2}$

j. $f: R - \{2\} \to R,\ \ f(x) = \dfrac{1-2x}{x-2}$

35. Aşağıda verilen fonksiyonlar birer birim fonksiyondur.

Buna göre; fonksiyonların kurallarında görülen belirsiz a ve b kat sayılarını bulunuz.

a. $f: R \to R,\ \ f(x) = (2a-b-1)x + a - 3$

b. $f: R \to R,\ \ f(x) = ax + 3a + 2bx + 2b - 3x$

36. Aşağıda verilen fonksiyonlar birer sabit fonksiyondur.

Buna göre; fonksiyonların kurallarında görülen belirsiz a ve b kat sayılarını bulunuz.

a. $f: R \to R,\ \ f(x) = (2-a)x + 2a$

b. $f: R \to R,$

$f(x) = (2a+b)x^2 + (a+2b-3)x + b$

c. $f: R - \{2\} \to R,\ \ f(x) = \dfrac{ax+b-1}{x-2} + (a-2)x$

d. $f: R \to R,\ \ f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + a - 6}{x^2 - 2x + 4}$

37. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & (a+1) & 1 & (2a-4) \end{pmatrix}$ bir permütasyon fonksiyonu olduğuna göre a kaçtır?

38. $A = \{1,2,3,4,5\}$ ve $B = \{4,5,6,7,8,9\}$ olduğuna göre;

a. A'dan B'ye tanımlanabilecek bağıntı sayısını bulunuz.

b. A'dan B'ye tanımlanabilecek fonksiyon sayısını bulunuz.

c. A'dan B'ye tanımlanabilecek bire bir fonksiyon sayısını bulunuz.

d. A'dan A'ya tanımlanabilecek permütasyon fonksiyonlarının sayısını bulunuz.

e. A'dan B'ye tanımlanabilecek sabit fonksiyonların sayısını bulunuz.

f. A kümesinden $C = \{4,5,6,7\}$ kümesine tanımlanabilecek örten fonksiyonların sayısını bulunuz.

g. A kümesinin elemanlarını B'nin en çok elemanına eşleyen fonksiyonların sayısını bulunuz.

h. A kümesinin elemanlarını B'nin yalnız üç elemanına eşleyen fonksiyonların sayısını bulunuz.

39. m ve n birer sayma sayısı olmak üzere; A ve B kümeleri için $s(A) = m$ ve $s(B) = n$ olsun.

Aşağıda belirtilen durumlarda A'dan B'ye tanımlanabilecek örten fonksiyonların sayısını bulunuz.

a. $m = 6$ ve $n = 5$ ise

b. $m = 6$ ve $n = 4$ ise

c. $m = n$ ise

d. $m = n - 1$ ise

e. $m = n + 2$ ise

e. $m > n$ ise

3.4 – İşlem

3.4.1 – İşlem Kavramı

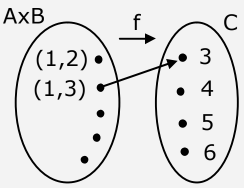
Etkinlik – 3.52

$A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$ ve $C=\{3,4,5,6\}$ kümeleri veriliyor.

a. AxB kümesini yazınız.

b. AxB'den C'ye f bağıntısı $f(x,y)=$"x ile y'den, küçük olmayanı" biçiminde tanımlanıyor.

f bağıntısını yandaki gibi bir Venn şeması ile gösteriniz.



c. AxB'den C'ye f bağıntısı bir fonksiyon mudur?

d. AxB'nin C ile eşlenen elemanlarının kümesi E olsun. f bağıntısı E'den C'ye bir fonksiyon mudur?

$f: E \to C$ bağıntısının kuralını "Δ" sembolü ile temsil ederek f bağıntısını yandaki gibi bir tablo ile gösteriniz.

Δ	2	3	4 ← B
1	·	3	?
2	·	?	?
3	?	?	4
↑ A		f(E)	

[(1,2) ve (2,2) ikililerinin C'de görüntüleri olmadığı için, yerleri boş bırakılmıştır.]

Tanım - 3.27

*A, B, C kümeleri boş kümeden farklı olmak üzere, AxB'nin bir alt kümesinden C'ye her fonksiyona bir **ikili işlem** denir.*

Etkinlik – 3.52'de yazdığınız, E'den C'ye f fonksiyonu bir ikili işlemdir.

Bu işlemi,

$f(x,y)=$"x ile y'den, küçük olmayanı" kuralı ile belirtebileceğimiz gibi,

x∆y = "x ile y'den, küçük olmayanı" biçiminde de gösterebiliriz.

Buna göre; örneğin, $3\Delta 4=4$ olur.

Etkinlik – 3.53

$A=\{1,2,3\}$ kümesi veriliyor.

a. AxA'dan A'ya

$f(x,y)=$"x ile y'den, küçük olmayanı" bağıntısını Venn şeması ile gösteriniz.

b. AxA'dan A'ya f bağıntısı bir fonksiyon mudur?

$f: AxA \to A$ bağıntısının kuralını "Δ" sembolü ile temsil ederek bağıntıyı yandaki gibi bir tablo ile gösteriniz.

Δ	1	2	3
1	1	?	?
2	?	?	3
3	?	3	?

Tanım - 3.28

*A kümesi boş kümeden farklı olmak üzere, AxA'nın bir alt kümesinden A'ya her fonksiyona A'da bir **ikili iç işlem** denir.*

Tanım – 3.28 şöyle de ifade edilebilir:

f fonksiyonunun A'da ikili iç işlem olması için gerek ve yeter koşul

$\forall (x,y)\in E,\ E\subset AxA$ için $f(x,y)=z\in A$ olmasıdır.

Etkinlik– 3.53'te yazdığınız AxA'dan A'ya f fonksiyonu bir ikili iç işlemdir.

Tanım – 3.27 ve Tanım – 3.28'den, A'dan B'ye her fonksiyonun **birli işlem**, A'dan A'ya her fonksiyonun **A'da birli iç işlem** olduğu sonucu çıkarılabilir.

$f: AxA \to B$ bir bağıntı, $f(AxA)\neq\varnothing$ olmak üzere, A'da **ikili işlem** belirtir.

$B=A$ ise bu işlem A'da **ikili iç işlem**; $B\neq A$ ise, A'da **ikili işlem**dir.

Biz bu konuda yalnız A'da ikili iç işlemleri inceleyeceğiz. Bu yüzden **işlem** dediğimizde –aksi belirtilmedikçe– bundan **ikili iç işlem** deyimi anlaşılmalıdır.

A'da bir $\mathbf{f(x,y)=z}$ işlemi, işlemin kuralı Δ, ★, o, □, ... gibi sembollerle temsil edilerek, kısaca **x∆y = z** , **x★y = z , ...** biçiminde gösterilir.

x işlem y ya da **x üçgen işlemi y**,

x yıldız işlemi y, ... diye okunur.

x∆y = z işleminde x'e **birinci bileşen**, y'ye **ikinci bileşen**, z'ye **x ile y'nin ∆ işlemine göre bileşkesi** ya da **x∆ y'nin sonucu** denir.

İşlemlerin birer fonksiyon olarak tanımlanmasından önce $+$, x, $-$, :, $\cup$, $\cap$, $\vee$, $\wedge$, … sembollerini birbirinden bağımsız olarak öğrendiğiniz belirli işlemlere karşılık getirerek kullandınız. Yeni anlamlar yüklenmedikçe, bu sembolleri yine bildiğiniz anlamlarda kullanacaksınız.

Örnek – 3.39

$A = \{2,3,4,6\}$, $B = \{1,2,3,4,6\}$ ve A kümesinde x □ y = EBOB(x, y) işlemi verilmiş olsun.

Yukarıda verdiğimiz bilgileri bu işlem üzerinde açıklayalım:

□ işlemine göre,

2□2 = 2	3□2 = 1	4□2 = 2	6□2 = 2
2□3 = 1	3□3 = 3	4□3 = 1	6□3 = 3
2□4 = 2	3□4 = 1	4□4 = 4	6□4 = 2
2□6 = 2	3□6 = 3	4□6 = 2	6□6 = 6

olur. Bu kadar fazla sayıda eşlemenin Venn şemasında gösterilmesi zor olur. Bu yüzden işlemler genellikle bir **işlem tablosu** ile gösterilirler.

□ işlemi, **AxA'nın bir alt kümesinden A'ya bir fonksiyon** (**A'da ikili iç işlem**) olarak tanımlanmış olsun.

Buna göre, □ işleminin tablosunu yapalım:

□	2	3	4	6 ← A
2	2	.	2	2
3	·	3	·	3
4	2	·	4	2
6	2	3	2	6

↑ A (sol sütun); A (üst satır)

İşlem tablosunda sol sütundaki elemanlar işlemin birinci bileşenleri, üst satırdaki elemanlar işlemin ikinci bileşenleridir. Sol sütundaki bir elemanın satırı ile üst satırdaki bir elemanın sütununun kesiştiği yere, bu elemanların işlemlerinin sonucu yazılmıştır.

$1 \notin A$ olduğundan 2 □ 3 = 1 gibi sonuçlar tabloda gösterilmemiştir.

$E = AxA - \{(2,3),(3,2),(3,4),(4,3)\}$ olmak üzere, $f : E \to A$, $f(x,y) = \text{EBOB}(x,y)$ bağıntısı bir fonksiyondur.

□ işlemi **AxA'nın bir alt kümesinden B'ye bir fonksiyon** (**A'da ikili işlem**) olarak tanımlanmış olsaydı, işlem tablosu yandaki gibi olacaktı.

□	2	3	4	6
2	2	1	2	2
3	1	3	1	3
4	2	1	4	2
6	2	3	2	6

B

Burada, $f : AxA \to B$, $f(x,y) = \text{EBOB}(x,y)$ bağıntısı bir fonksiyondur.

Bir Kümenin Bir İşleme Göre Kapalılığı

Tanım - 3.29

*A kümesinde f işlemi, AxA'dan A'ya bir fonksiyon ise **A kümesi f işlemine göre kapalıdır**, denir.*

Bu tanıma göre, A kümesinin bir ⋆ işlemine göre kapalı olması demek

$\forall x,\ y \in A$ için $(x \star y) \in A$ olması demektir.

Örnek – 3.40

$A = \{1,2,3,4,6\}$ kümesinde x□y = EBOB(x, y) işlemi verilmiş olsun.

A kümesi □ işlemine göre kapalıdır. (Sonuçların her biri A kümesinin elemanıdır.)

□	1	2	3	4	6
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2
3	1	1	3	1	3
4	1	2	1	4	2
6	1	2	3	2	6

Etkinlik – 3.54

Doğal sayılar, tam sayılar, gerçek sayılar kümeleri üzerinde **toplama, çıkarma, çarpma, bölme** işlemlerini birer fonksiyon olarak ifade ediniz.

Bu kümelerin bu işlemlere göre kapalı olup olmadıklarını belirtiniz.

Etkinlik – 3.55

$A = \{a,b,c,d,e\}$ kümesinde tanımlanan "o" işleminin tablosu yanda verilmiştir.

o	a	b	c	d	e
a	e	d	a	c	b
b	d	a	b	e	c
c	a	b	c	d	e
d	c	e	d	b	a
e	b	c	e	a	d

a. $d \circ e = ?$

b. $b \circ (a \circ d) = ?$

c. $(a \circ x) \circ b = c \circ d$ eşitliğini sağlayan x değerini bulunuz.

d. $a \circ (x \circ b) = x \circ (d \circ e)$ eşitliğini sağlayan x değerini bulunuz.

e. $a \circ (x \circ d) = x \circ (b \circ e)$ eşitliğini sağlayan x değerlerini bulunuz.

Etkinlik – 3.56

R'de $x \Delta y = x + 2y - xy$ işlemi veriliyor.

a. $(-1) \Delta 2 = ?$

b. $3 \Delta \left[(-2) \Delta 1\right] = ?$

c. $2 \Delta (3 \Delta a) = 4$ ise a kaçtır?

d. $a \Delta (1 \Delta 2) = (2 \Delta a) \Delta 1$ ise a kaçtır?

Etkinlik – 3.57

R'de $x \square y = \begin{cases} x + y & x < y \text{ ise} \\ x - y & x \geq y \text{ ise} \end{cases}$ işlemi veriliyor.

a. $(2 \square 4) \square (4 \square 2) = ?$

b. $2 \square x = x \square 4$ ise x kaçtır?

Etkinlik – 3.58

R'de "★" işlemi $2(x \star y) + (y \star x) = 2x + y$ biçiminde tanımlanıyor.

a. $2 \star 3 = ?$

b. "★" işleminin kuralını bulunuz.

3.4.2 – İşlemlerin Özelikleri

Değişme Özeliği

Etkinlik – 3.59

R'de, $x \circ y = 2x + 2y - xy$ ve $x \Delta y = x + 2y$ işlemleri veriliyor.

a. $2 \circ 3$ ve $3 \circ 2$ değerlerini bulunuz.

b. $a \circ b$ ve $b \circ a$ işlemlerinin sonuçlarını yazınız.

c. $a \circ b$ ve $b \circ a$ işlemlerinin sonuçları arasında bir bağıntı kurabiliyor musunuz?

d. $a \Delta b$ ve $b \Delta a$ işlemlerinin sonuçları arasında c'dekine benzer bir bağıntı var mıdır?

Tanım - 3.30

A kümesinde bir "o" işlemi verilmiş olsun.

*$\forall x, y \in A$ için **xoy = yox** oluyorsa; "o" işleminin **değişme özeliği** vardır, denir.*

Etkinlik – 3.59'da $a \circ b = b \circ a$ olduğunu göstererek, "o" işleminin değişme özeliğinin olduğunu;

$a \Delta b \neq b \Delta a$ olduğunu göstererek, "Δ" işleminin değişme özeliğinin olmadığını ispatlamış oldunuz.

A'da bir işlem tablosunda xoy ve yox değerleri, köşegene göre simetrik konumlarda bulunurlar. O hâlde, işlem tabloları köşegene göre simetrik olan işlemlerin değişme özelikleri vardır.

Örnek – 3.41

Yandaki işlem tablosunun köşegene göre simetrik olduğuna dikkat ediniz. O hâlde, $A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinde "★" işleminin değişme özeliği vardır. Örneğin; $b \star c = a$ ve $c \star b = a$ olup $b \star c = c \star b$ dir.

★	a	b	c	d	e
a	c	d	e	a	b
b	d	e	a	b	c
c	e	a	b	c	d
d	a	b	c	d	e
e	b	c	d	e	a

Birleşme Özeliği

Etkinlik – 3.60

R'de, $x \circ y = x + y - 2$ ve $x \Delta y = 2x + y$ işlemleri veriliyor.

a. $(3 \circ 5) \circ 4$ ve $3 \circ (5 \circ 4)$ değerlerini bulunuz.

b. $(a \circ b) \circ c$ ve $a \circ (b \circ c)$ işlemlerinin sonuçlarını bulunuz. Bu sonuçlar arasında bir bağıntı kurabiliyor musunuz?

c. $(a \Delta b) \Delta c$ ve $a \Delta (b \Delta c)$ işlemlerinin sonuçları arasında benzer bir bağıntı var mı?

Tanım - 3.31

A kümesinde bir "o" işlemi verilmiş olsun.

$\forall x, y, z \in A$ için $\boldsymbol{xo(yoz) = (xoy)\,oz}$ *oluyorsa; A'da "o" işleminin* ***birleşme özeliği*** *vardır.*

Etkinlik – 3.60'ta $(a\,o\,b)\,o\,c = a\,o(b\,o\,c)$ olduğunu göstererek, "o" işleminin birleşme özeliğinin olduğunu; $(a\Delta b)\Delta c \neq a\Delta(b\Delta c)$ olduğunu göstererek, "Δ" işleminin birleşme özeliğinin olmadığını ispatlamış oldunuz.

Bir işlemin birleşme özeliği varsa, bu işlemin art arda uygulanmasında parantez kullanma zorunluluğu yoktur.

$(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c) = a\circ b\circ c$ yazılabilir.

Bir işlemin hem birleşme hem değişme özelikleri varsa, bu işlemin art arda uygulanmasında elemanların sıralaması istenildiği gibi değiştirilebilir.

$(a\circ b)\circ c = b\circ c\circ a = c\circ a\circ b =, \ldots$ gibi.

Etkinlik – 3.61

a. Gerçek sayılar kümesinde **toplama, çıkarma, çarpma, bölme** işlemlerinin;

b. Bir E kümesinin kuvvet kümesinde **birleşme, kesişme, fark, kartezyen çarpım** işlemlerinin;

c. Önermelerde **birleşme (∨), kesişme (∧), koşul (⇒)** işlemlerinin

değişme ve **birleşme** özeliklerinin olup olmadığını belirtiniz.

Etkinlik – 3.62

$A = \{0,1,2,3,4,5\}$ kümesinde "★" işleminin değişme ve birleşme özelikleri vardır.

$2\star 4 = 2$ ve $5\star 2 = 4$ olduğuna göre,

a. $(4\star 5)\star(2\star 2)$ işleminin sonucu kaçtır?

b. $(2\star 5)\star(4\star 4)$ işleminin sonucu kaçtır?

Bir İşlemin Diğer Bir İşlem Üzerine Dağılma Özeliği

Etkinlik – 3.63

R'de, $x\circ y = 2xy$ ve $x\Delta y = 2x + y$ işlemleri veriliyor.

a. $a\circ(b\Delta c)$ işleminin sonucunu yazınız.

b. $(a\circ b)\Delta(a\circ c)$ işleminin sonucunu yazınız.

c. $a\circ(b\Delta c)$ ve $(a\circ b)\Delta(a\circ c)$ işlemlerinin sonuçları arasında bir bağıntı kurabiliyor musunuz?

d. $a\Delta(b\circ c)$ işleminin sonucunu yazınız.

e. $(a\Delta b)\circ(a\Delta c)$ işleminin sonucunu yazınız.

f. $a\Delta(b\circ c)$ ve $(a\Delta b)\circ(a\Delta c)$ işlemlerinin sonuçları arasında c'deki gibi bir bağıntı kurabiliyor musunuz?

Tanım - 3.32

A kümesinde, "o" ve "Δ" işlemleri verilmiş olsun.

$\forall x, y, z \in A$ *için,* $\boldsymbol{xo(y\Delta z) = (xoy)\Delta(xoz)}$ *oluyorsa; A'da "o" işleminin "Δ" işlemi üzerine* ***soldan dağılma özeliği*** *vardır, denir.*

$\forall x, y, z \in A$ *için,* $\boldsymbol{(x\Delta y)\,oz = (xoz)\Delta(yoz)}$ *oluyorsa; A'da "o" işleminin "Δ" işlemi üzerine* ***sağdan dağılma özeliği*** *vardır, denir.*

Bir "o" işleminin bir "Δ" işlemi üzerine hem soldan hem sağdan dağılma özeliği varsa; bu kısaca, **"o" işleminin "Δ" işlemi üzerine dağılma özeliği vardır**, diye ifade edilir.

Etkinlik – 3.63'te verilen "o" işleminin, "Δ" işlemi üzerine soldan dağılma özeliği olduğunu

$a\circ(b\Delta c) = (a\circ b)\Delta(a\circ c)$ eşitliğini kurarak gösterdiniz. "Δ" işleminin "o" işlemi üzerine soldan dağılma özeliği olmadığını gördünüz.

"o" işleminin "Δ" işlemi üzerine sağdan dağılma özeliği olduğunu da gösteriniz.

Etkinlik – 3.64

R'de, $x\circ y = x + 3y$ ve $x\Delta y = 2x - y$ işlemleri veriliyor.

"o" işleminin "Δ" işlemi üzerine dağılma özeliği olduğunu gösteriniz.

Etkinlik – 3.65

a. Gerçek sayılar kümesinde **çarpma** işleminin, **toplama** ve **çıkarma** işlemleri üzerine;

b. Gerçek sayılar kümesinde **bölme** işleminin, **toplama** ve **çıkarma** işlemleri üzerine;

c. önermelerde "∧" ile "∨" işlemlerinin birbiri üzerine;

d. önermelerde "$\Rightarrow$" işleminin "$\wedge$" ile "$\vee$" işlemleri üzerine;

e. bir E kümesinin kuvvet kümesinde "$\cup$" ile "$\cap$" işlemlerinin birbiri üzerine dağılma özelikleri-nin olup olmadığını belirtiniz.

Bir Kümenin Bir İşleme Göre Etkisiz (Birim) Elemanı

Etkinlik – 3.66

R'de, $xoy = x + y - 2$ işlemi veriliyor.

a. $2o3 = ?$ **b.** $4o2 = ?$ **c.** $2o(-3) = ?$

Tanım - 3.33

A kümesinde bir "o" işlemi verilmiş olsun. A'nın her x elemanı için **xoe = x** *ve* **eox = x** *eşitliklerini gerçekleyen bir e∈A varsa,* ***e****'ye A kümesinin "o" işlemine göre* ***etkisiz elemanı*** *ya da* ***birim elemanı*** *denir.*

Örneğin, gerçek sayılar kümesinde toplama işlemine göre etkisiz eleman 0; çarpma işlemine göre etkisiz eleman 1'dir. Çıkarma ve bölme iş-lemlerine göre etkisiz elemanlar yoktur. (Neden?)

Etkinlik – 3.67

Boş kümeden farklı sonlu bir E kümesinin kuv-vet kümesinin;

a. "$\cup$" işlemine göre etkisiz elemanını (varsa) belirtiniz.

b. "$\cap$" işlemine göre etkisiz elemanını (varsa) belirtiniz.

Teorem - 3.9

Bir A kümesinde tanımlı bir "o" işlemine göre, A'nın etkisiz elemanı (varsa) bir tanedir.

İspat

A kümesinin, "o" işlemine göre $\mathbf{e_1}$ ve $\mathbf{e_2}$ gibi bir-birinden farklı iki tane etkisiz elemanı olduğunu varsayalım.
Etkisiz elemanın tanımına göre,

$\forall x \in A$ için, $xoe_1 = x = e_1ox$ ① ve
$xoe_2 = x = e_2ox$ ② dir.

Bu eşitlikler A'nın her elemanı için doğru olaca-ğından e_2 elemanı ①'i, e_1 elemanı ②'yi sağlar.

Buna göre,

$e_2oe_1 = e_2 = e_1oe_2$ ③ ve

$e_1oe_2 = e_1 = e_2oe_1$ ④ olur.

③ ve ④'ten, $e_1 = e_2$ bulunur.

Bu da bize, birbirinden farklı e_1 ve e_2 gibi iki etkisiz elemanın olamayacağını gösterir.

Örnek – 3.42

R'de, $xoy = 2x + 2y - xy - 2$ işlemi veriliyor.

R'nin "o" işlemine göre etkisiz elemanını (varsa) bulunuz.

Çözüm

$\forall x \in R$ için, $xoe = x$ ve $eox = x$ eşitliklerini sağlayan bir e sayısının bulunup bulunmadığını araştıracağız.

İşlemin kuralına göre, $xoy = yox$ olduğu kolayca görülür. Demek ki, işlemin değişme özeliği vardır.

O hâlde; $\forall x \in R$, $xoe = x$ eşitliğini sağlayan e değerini aramak yeter.

$xoy = 2x + 2y - xy - 2$

$\Rightarrow xoe = 2x + 2e - xe - 2$ olur.

e etkisiz eleman olduğundan

$xoe = x$

$\Rightarrow 2x + 2e - xe - 2 = x$

$\Rightarrow 2e - xe = 2 - x$

$\Rightarrow e(2 - x) = 2 - x$ bulunur.

$x = 2$ olduğunda, e'nin her değeri için eşitlik sağlanır. Bu durumu **bir elemanın tersi** kısmın-da inceleyeceğiz.

$x \neq 2$ için,

$$e = \frac{2 - x}{2 - x} \Rightarrow e = 1 \text{ olur.}$$

Buna göre, hiç işlem yapmadan,

örneğin; $3o1 = 3$, $1o(-5) = -5, \ldots$ olduğunu söy-leyebiliriz.

Örnek – 3.43

R'de, $x\Delta y = 2xy - x + y - 1$ işlemi veriliyor.

R'nin "Δ" işlemine göre etkisiz elemanını (varsa) bulunuz.

Çözüm

"Δ" işleminin değişme özeliğinin olmadığını görünüz. O hâlde,

$\forall x \in R$ için, $x\Delta e = x$ ve $e\Delta x = x$ eşitliklerinin ikisini de sağlayan e değerini arayacağız.

Önce $\forall x \in R$ için $x o e = x$ eşitliğini sağlayan e'yi bulalım:

$x\Delta y = 2xy - x + y - 1$

$\Rightarrow x\Delta e = 2xe - x + e - 1$ olur.

$x\Delta e = x$

$\Rightarrow 2xe - x + e - 1 = x$

$\Rightarrow 2xe + e = 2x + 1$

$\Rightarrow e(2x + 1) = 2x + 1$

$\Rightarrow e = 1 \quad (2x + 1 \neq 0)$ bulunur.

Bundan sonrasını iki değişik yolla yapabiliriz.

I. yol

Bir de $\forall x \in R$ için, $e\Delta x = x$ eşitliğini sağlayan e değerini bulalım:

$x\Delta y = 2xy - x + y - 1$

$\Rightarrow e\Delta x = 2ex - e + x - 1$ olur.

$e\Delta x = x$

$\Rightarrow 2ex - e + x - 1 = x$

$\Rightarrow e(2x - 1) = 1$

$\Rightarrow e = \dfrac{1}{2x - 1} \qquad (2x - 1 \neq 0)$ bulunur.

Etkisiz eleman varsa, yalnız bir tane olacağından, e x'e bağlı olamaz. Burada da $e = 1$ bulmalıydık.

O hâlde, R'nin "Δ" işlemine göre etkisiz elemanı yoktur.

II. yol

R'nin "Δ" işlemine göre etkisiz elemanı 1 ise,

$\forall x \in R$ için $1\Delta x = x$ olmalıdır.

$x\Delta y = 2xy - x + y - 1$

$\Rightarrow 1\Delta x = 2 \cdot 1 \cdot x - 1 + x - 1$

$\Rightarrow 1\Delta x = 3x - 2$ olur.

Bu durumda,

$\forall x,\ 1\Delta x = x$

$\Rightarrow \forall x,\ 3x - 2 = x$ önermesi yanlıştır.

O hâlde, R'nin "Δ" işlemine göre etkisiz elemanı yoktur.

✚ Bir A kümesinin bir "o" işlemine göre etkisiz elemanının var olduğu biliniyorsa, etkisiz elemanı bulmak için **$\forall x \in A$, $x o e = x = e o x$** önermesinin A'nın herhangi bir elemanı için **yorumlama**sından yararlanılabilir.

Örnek – 3.44

R'de, $x\Delta y = 3xy + 3y + 2xy + 3$ işlemi veriliyor.

R'nin "Δ" işlemine göre etkisiz elemanı var olduğuna göre, bu kaçtır?

Çözüm

Etkisiz eleman e olsun. Örneğin, $0\Delta e = 0$ olmalıdır.

$x\Delta y = 3x + 3y + 2xy + 3$

$\Rightarrow 0\Delta e = 3 \cdot 0 + 3e + 2 \cdot 0 \cdot e + 3$ olur.

$0\Delta e = 0$

$\Rightarrow 3e + 3 = 0$

$\Rightarrow e = -1$ bulunur.

Bu yöntem test sorularının çözümünde işe yarar.

Örnek – 3.45

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesinde "$\star$" işlemi tablodaki gibi tanımlanmıştır. A'da "$\star$" işleminin etkisiz elemanı nedir?

$\star$	a	b	c	d
a	c	a	d	b
b	a	b	c	d
c	d	c	b	a
d	b	d	a	c

Çözüm

İşlemin elemanlarının birinci bileşenlerinin bulunduğu sütun, ikinci bileşenlerin bulunduğu satırda "b"nin altına yazılmıştır. Buna göre;

$a\star b = a$, $b\star b = b$, $c\star b = c$, $d\star b = d$ olduğundan etkisiz eleman "b" olabilir.

İşlemin elemanlarının ikinci bileşenlerinin bulunduğu satır, birinci bileşenlerin bulunduğu sütunda yine "b"nin hizasına yazılmıştır.

O hâlde, etkisiz eleman "b" dir.

Kısaca;

İşlem tablosu ile verilen işlemlerde; sonuçların, kümedeki elemanların sırasıyla göründüğü satır ile sütunun kesişimindeki eleman etkisiz elemandır. Doğal olarak, bu elemanın köşegen üzerinde olması gerekir.

Etkinlik – 3.68

Gerçek sayılar kümesinin, aşağıda verilen işlemlere göre etkisiz elemanlarını (varsa) bulunuz.

Etkisiz elemanın varlığı, işlemin değişme özeliğinin olmasını zorunlu kılar mı?

a. $x \circ y = x + y + 3$

b. $x \Delta y = x + y - 2xy$

c. $x \bigstar y = 2x + 3y - xy - 3$

d. $x \square y = x + y + x^2 y$

Bir Kümenin Bir İşleme Göre Yutan Elemanı

Etkinlik – 3.69

Z'de, $x \Delta y = 4x + 4y - 2xy - 6$ işlemi veriliyor.

a. $(-3)\Delta 2 = ?$ **b.** $4\Delta 2 = ?$ **c.** $2\Delta 8 = ?$

Tanım - 3.34

A kümesinde bir "o" işlemi verilmiş olsun. A'nın her x elemanı için **xoy = y** *ve* **yox = y** *eşitliklerini gerçekle-yen bir y ∈A varsa,* ***y****'ye A kümesinin "o" işlemine göre* ***yutan eleman****ı denir.*

Örneğin; R'nin çarpma işlemine göre yutan elemanı sıfırdır.

$\forall x \in R$ için, $x \cdot 0 = 0$ ve $0 \cdot x = 0$ olur.

Etkinlik – 3.69'da Z kümesinin "Δ" işlemine göre yutan elemanının 2 olabileceğini sezmişsinizdir.

Ancak, üç denemeyle yutan elemanın 2 olduğunu söyleyemeyiz. Bunun ispatlanması gerekir.

Örnek – 3.46

Z'de, $x \Delta y = 4x + 4y - 2xy - 6$ işlemi veriliyor.

Z'nin "Δ" işlemine göre yutan elemanının "2" olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$\forall x \in Z$ için $x\Delta 2 = 2$ önermesinin doğru olduğu gösterilmelidir. İşlemin değişme özeliği olduğundan, "$\forall x,\ 2\Delta x = 2$"nin doğruluğunu da göstermeye gerek yoktur.

Gerçekten,

$x\Delta y = 4x + 4y - 2xy - 6$

$\Rightarrow x\Delta 2 = 4x + 4\cdot 2 - 2\cdot x\cdot 2 - 6$

$\Rightarrow x\Delta 2 = 2$ bulunur.

2, Z'nin "Δ" işlemine göre yutan elemanıdır.

Örnek – 3.47

R'de, $x \bigstar y = x + y - 2xy$ işlemi veriliyor.

R'nin "★" işlemine göre yutan elemanını (varsa) bulunuz.

Çözüm

İşlemin değişme özeliği olduğundan

$\forall x,\ x \bigstar y = y$ önermesini doğru yapan y değerini bulmamız yeterlidir.

$\forall x,\ x \bigstar y = y$

$\Rightarrow \forall x,\ x + y - 2xy = y$

$\Rightarrow \forall x,\ x(1 - 2y) = 0$ olur.

$y = \frac{1}{2}$ iken bu önerme doğrudur. R'nin, "★" işlemine göre yutan elemanı $\frac{1}{2}$ dir.

Örnek – 3.48

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesinde "★" ve "Δ" işlemleri tablolardaki gibi tanımlanmıştır.

★	a	b	c	d
a	b	a	c	d
b	a	b	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	a

Δ	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	b	d	a
c	b	b	b	b
d	d	b	a	c

A'nın "★" işlemine göre etkisiz elemanı "b"; yutan elemanı "c" dir. (Neden?)

A'nın "Δ" işlemine göre etkisiz elemanı da yutan elemanı da yoktur. (Neden?)

Teorem - 3.10

Bir A kümesinde tanımlı bir "o" işlemine göre, A'nın yutan elemanı (varsa) bir tanedir.

Etkinlik – 3.70

Teorem – 3.10'u ispatlayınız.

Etkinlik – 3.71

R'de, $x \star y = 3x + 3y - 2xy + k$ işlemi veriliyor.

R'nin "$\star$" işlemine göre yutan elemanı var olduğuna göre, bu kaçtır?

Bir İşleme Göre Bir Elemanın Tersi

Tanım - 3.35

*A kümesinde bir "o" işlemi verilmiş olsun. A'nın "o" işlemine göre **e** etkisiz elemanı varsa ve belli bir $a \in A$ için $\mathbf{a o b = b o a = e}$ eşitliklerini sağlayan en az bir $b \in A$ varsa, b'ye **a'nın "o" işlemine göre tersi** denir. A'nın tersi $\mathbf{a^{-1}}$ ile gösterilir.*

$\mathbf{a o a^{-1} = a^{-1} o a = e}$ olacağından a^{-1} in tersi de a olur.

$\mathbf{e o e = e}$ olup $\mathbf{e^{-1} = e}$ dir.

Gerçek sayılar kümesinde, bir **a** sayısının toplama işlemine göre tersi $-\mathbf{a}$; çarpma işlemine göre tersi $\mathbf{\frac{1}{a}}$ $(a \neq 0)$ dır. Çıkarma ve bölme işlemlerine göre etkisiz elemanlar olmadığından, bu işlemlere göre ters elemanlardan söz edilemez.

! Ters eleman kavramı tanıtılmadan önce $\mathbf{a^{-1}}$ sembolünü, a'nın çarpma işlemine göre tersi olan $\mathbf{\frac{1}{a}}$ anlamında kullandınız.

Artık $\mathbf{a^{-1}}$ sembolünün anlamının daha geniş olduğunu biliyorsunuz. Bu sembolü gördüğünüzde; bunun, a'nın hangi işleme göre tersi olduğunu araştırmanız gerekir. Ortada tanımlanmış başka bir işlem yok iken yine a^{-1} i $\frac{1}{a}$ anlamında kullanabilirsiniz.

Aşağıdaki örnekte bir kümenin bir işleme göre **etkisiz eleman**ı, **yutan eleman**ı ve **tersi olmayan eleman**ları arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz.

Örnek – 3.49

R'de, $x \star y = 3x + 3y + xy + 6$ işlemi veriliyor.

a. R'nin "$\star$" işlemine göre **etkisiz eleman**ını, **tersi olmayan eleman**ını, **yutan eleman**ını bulunuz.

b. R'de, $\star$ işlemine göre (-1) in tersini bulunuz.

c. R'de, $\star$ işlemine göre a'nın $(a \neq -3)$ tersini bulunuz.

Çözüm

a. Etkisiz elemanı bulmak üzere işe başlayalım.

$\forall x \in R$ için $x \star e = e \star x = x$ önermesini doğru yapan e değerini bulacağız. İşlemin değişme özeliği olduğundan $\forall x$, $x \star e = x$ önermesini doğru yapan e değerini bulmak yeterlidir.

$x \star e = x$

$\Rightarrow 3x + 3e + x \cdot e + 6 = x$

$\Rightarrow e(3 + x) = -2(3 + x)$ olur.

Bu eşitlik hem etkisiz elemanı, hem tersi olmayan elemanı hem de yutan elemanı bulmamıza yetecektir.

$\forall x$, $e(3 + x) = -2(3 + x)$ önermesinin $x = -3$ yorumlaması e'nin her değeri için doğrudur.

$(-3) \star e = -3$ ve $e \star (-3) = -3$ eşitlikleri her $e \in R$ için sağlanır.

O hâlde, $-\mathbf{3}$ **yutan eleman**dır.

$e = \dfrac{-2(3 + x)}{3 + x}$ ifadesi $x = -3$ için tanımsızdır.

$x = -3$ için etkisiz eleman tanımsız olduğundan, -3'ün tersinden söz edilemez.

O hâlde; $-\mathbf{3}$, R'nin "$\star$" işlemine göre **tersi olmayan eleman**ıdır.

$x \neq -3$ için, $e = \dfrac{-2(3 + x)}{3 + x} \Rightarrow \mathbf{e = -2}$ bulunur.

Her ne kadar, $x = -3$ için "e" tanımsız ise de $(-3) \star e = -3$ ve $e \star (-3) = -3$ eşitlikleri $e = -2$ için de sağlandığından $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{x \star e = x}$ önermesi $e = -2$ için doğru olur. $-\mathbf{2}$ değeri R'nin $\star$ işlemine göre **etkisiz eleman**ıdır.

Kısaca; bir kümenin bir işleme göre tersi olmayan elemanı, etkisiz elemanı tanımsız yapan elemandır. Yutan eleman ile tersi olmayan eleman aynıdır.

b. (-1) in tersi k olsun. Tanıma göre,

$x \circ x^{-1} = e$

$\Rightarrow (-1) \circ k = -2$

$\Rightarrow 3\cdot(-1) + 3\cdot k + (-1)\cdot k + 6 = -2$

$\Rightarrow k = \dfrac{-5}{2}$ bulunur.

c. a'nın tersi k olsun.

$x \circ x^{-1} = e$

$\Rightarrow a \circ k = -2$

$\Rightarrow 3a + 3k + a\cdot k + 6 = -2$

$\Rightarrow (3+a)k = -8 - 3a$

$\Rightarrow k = \dfrac{-8-3a}{3+a}$ $(a \neq -3)$ bulunur.

Etkinlik – 3.72

R'de, $x \circ y = 2x + 2y + xy + 2$ işlemi veriliyor.

a. R'nin "$\circ$" işlemine göre etkisiz elemanını bulunuz.

b. R'de, "$\circ$" işlemine göre hangi elemanın tersi yoktur?

c. R'nin "$\circ$" işlemine göre yutan elemanını bulunuz.

d. R'de, "$\circ$" işlemine göre 2'nin tersini bulunuz.

e. R'de, "$\circ$" işlemine göre tersi tanımlı olan a sayısının tersini bulunuz.

Etkinlik – 3.73

R'de, $x \circ y = x + y + xy$ işlemi veriliyor. "$\circ$" işleminin birleşme özeliği olduğuna göre,

$2 \circ 3^{-1} = a \circ 4$ eşitliğini sağlayan a değerini en kısa yoldan bulunuz.

Etkinlik – 3.74

$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde "$\star$" işlemi tablodaki gibi tanımlanmıştır.

$\star$	a	b	c	d	e
a	c	d	a	e	b
b	e	a	b	c	d
c	a	b	c	d	e
d	b	c	d	e	a
e	d	a	e	b	c

a. A kümesinin "$\star$" işlemine göre etkisiz elemanı nedir?

b. "$\star$" işleminin değişme özeliği var mıdır?

c. "$\star$" işleminin birleşme özeliği var mıdır?

d. $(a \star b) \star (d \star c) = ?$

e. $(b \star d^{-1}) \star (d \star e^{-1}) = ?$

f. $(b^{-1} \star x) \star c^{-1} = a^{-1} \star d$ denklemini sağlayan x değerini bulunuz.

Alıştırmalar ve Problemler – 3.4

1. Aşağıda, R'de işlemler verilmiştir.
Her birindeki istenenleri bulunuz.

a. $x \circ y = x^y - x\cdot y$; $2 \circ (-1) = ?$

b. $2^x \star 2^y = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}$; $\left(\dfrac{1}{2}\right) \star \left(\dfrac{1}{4}\right) = ?$

c. $\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{x}\right) \Delta \left(\dfrac{1}{y}\right)} = \dfrac{x}{y}$; $2 \Delta 4 = ?$

d. $x \,\square\, y = \begin{cases} 2x + y & x \le y \text{ ise} \\ x - 2y & x > y \text{ ise} \end{cases}$; $(3 \,\square\, 2) \,\square\, 4 = ?$

2. $A = \{a, b, c\}$ ve AxA'nın bir alt kümesi,
$E = \{(a,a), (a,b), (b,c), (c,c)\}$ olsun.
$f : E \to A$ fonksiyonu $f(a,a) = b$, $f(a,b) = c$,
$f(b,c) = a$, $f(c,c) = b$ biçiminde tanımlanıyor.

a. f, A'da bir işlem midir?

b. A, f işlemine göre kapalı mıdır?

c. RxR'den R'ye $g(3^x, 3^y) = \dfrac{x}{y} - x\cdot y$ biçiminde tanımlı bir g bağıntısı R'de bir işlem midir?

d. R, g işlemine göre kapalı mıdır?

3. $A = \{-1, 0, 1\}$ olduğuna göre,

a. A kümesi toplama işlemine göre kapalı mıdır? A'nın toplama işlemine göre etkisiz elemanı ve her elemanının tersi var mıdır?

b. A kümesi çarpma işlemine göre kapalı mıdır? A'nın çarpma işlemine göre etkisiz elemanı ve her elemanının tersi var mıdır?

4. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinde "Δ" işleminin birleşme özeliği vardır.
$2\Delta 5 = 3$, $3\Delta 4 = 5$ ve $5\Delta 3 = 2$ olduğuna göre;

a. $2\Delta(5\Delta 4)$ ün değeri kaçtır?

b. $(5\Delta 2)\Delta(5\Delta 2)\Delta(5\Delta 4)$ ün değeri kaçtır?

c. "Δ" işleminin değişme özeliği de varsa,
$(5\Delta 4)\Delta(3\Delta 2)$ nin değeri kaçtır

5. R'de $x \circ y = 3xy - 2x - y$ işlemi veriliyor.

a. $(-2) \circ (-3) = ?$

b. $3 \circ [(-1) \circ 2] = ?$

c. $(1 \circ a) \circ 3 = (-3) \circ (-1)$ ise a kaçtır?

d. $(-1) \circ (a \circ 2) = (-2 \circ a) \circ (-1)$ ise a kaçtır?

6. R'de $x \star y = x + 2y + xy$ işlemi veriliyor.

a. "$\star$" işleminin değişme ve birleşme özeliklerinin varlığını araştırınız.

b. R'nin "$\star$" işlemine göre etkisiz elemanı var mıdır?

7. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinde,
$x \oplus y =$ "x + y'nin 5 ile bölümünden kalan"
ve
$x \odot y =$ "x · y'nin 5 ile bölümünden kalan"
işlemleri veriliyor.

a. "$\oplus$" ve "$\odot$" işlemlerini tablo ile gösteriniz.

b. İşlemlerin değişme ve birleşme özeliklerinin varlığını araştırınız.

c. A'nın "$\oplus$" ve "$\odot$" işlemlerine göre etkisiz elemanlarını (varsa) bulunuz.

d. A'nın elemanlarının, verilen işlemlere göre terslerini (varsa) bulunuz.

e. "$\odot$" işleminin "$\oplus$" işlemi üzerine dağılma özeliği var mıdır?

8. R'de, $x \circ y = x + y - 2$, $x \star y = 2y - x$,

$x \Delta y = y^x - xy$, $x \square y = 2 - xy$

işlemleri veriliyor.

a. $(-1 \circ 3) \star (2 \Delta 1) = ?$

b. $(3 \star 4) \square (-2 \circ 2) = ?$

c. $(3 \circ x) \star (1 \Delta 3) = (-2 \square x) \circ 2$ eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

d. $(2 \star 2x) \circ (3x \square 1) = (x \Delta 1) \circ (4x)$ eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

9. R'de "Δ" işleminin birleşme ve değişme özelikleri vardır.

$3(x \Delta y) + 6xy = 2x + 2y + (y \Delta x)$ olduğuna göre,

a. $-2 \Delta 3$ ün değeri kaçtır?

b. "Δ" işleminin kuralını bulunuz.

10. R'de "$\square$" işlemi için

$x(x \square y) + xy + 2y = 2x^2 + x + (y \square x)$ olduğuna göre,

a. $2 \square 3$ ün değeri kaçtır?

b. "$\square$" işleminin kuralını bulunuz.

11. R'de aşağıda verilen işlemlere göre, etkisiz elemanları, yutan elemanları, tersi kendine eşit olan elemanları, tersi tanımlı olan elemanların terslerini bulunuz.

a. $x \circ y = x + y + 2$

b. $x \Delta y = x + y + 4xy$

c. $x \star y = 4x + 4y + 3xy + 4$

12. R'de, $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + k$ işlemine göre etkisiz elemanın bulunduğu bilindiğine göre;

a. k kaçtır?

b. Etkisiz eleman kaçtır?

c. Tersi olmayan eleman kaçtır?

13. R'de, $x \circ y = x + y + kxy$ işlemine göre,

$1^{-1} = \frac{1}{2}$ olduğu bilinmektedir.

Buna göre, 2^{-1} kaçtır?

14. N'de, $x \circ y = x^2 y$ ve $x \Delta y = 2x + y$ işlemleri veriliyor.
"$\circ$" işleminin "Δ" işlemi üzerine dağılma özeliği var mıdır?

15. R'de, $x \circ y = ax + by + cxy$ işleminin,

a. değişme özeliğinin olması için a, b, c kat sayıları hangi koşulları sağlamalıdır?

b. birleşme özeliğinin olması için a, b, c kat sayıları hangi koşulları sağlamalıdır?

16. R'de, $x \star y = ax + by$ ve $x \square y = cx + dy$ işlemleri veriliyor.
"$\star$" işleminin "$\square$" işlemi üzerine dağılma özeliğin olması için a, b, c, d kat sayıları hangi koşulları sağlamalıdır?

17. R'de, $x \circ y = 2xy - 3x - 3y + 6$ işleminin birleşme özeliği olduğuna göre, $x \circ 3 = 2$ ise x kaçtır? (Etkisiz elemanı bulmadan çözünüz.)

18. R^2'de, $(x,y)\circ(z,t) = (x+z, y\cdot t)$ işlemi veriliyor.

a. $(2,3)\circ(1,2) = ?$

b. $(-1,2)\circ(x,y) = (3,6)$ ise $(x,y) = ?$

c. R^2'nin "$\circ$" işlemine göre etkisiz elemanını (varsa) bulunuz.

d. $(3,4)^{-1} = ?$

19. R^2'de, "$\star$" ve "Δ" işlemleri için,

$a\cdot(a\star b) = a^3 - b^3 + b(a\Delta b)$ ve

$a\cdot(a\Delta b) = ab^2 - b + (a\star b)$ eşitlikleri geçerlidir.

a. $1\star 2$ nin değeri kaçtır?

b. "$\star$" ve "Δ" işlemlerinin kurallarını bulunuz.

20. $A = \{1,2,3,4,6,12\}$ kümesinde "□" işlemi tabloda verilmiştir.

□	1	2	3	4	6	12
1	1	2	3	4	6	12
2	2	1	1	2	3	6
3	3	1	1	1	2	4
4	4	2	1	1	1	3
6	6	3	2	1	1	2
12	12	6	4	3	2	1

a. 2□(12□4) = ?

b. (3□x) □4 = 2 ise x kaçtır?

c. (2□6) □ x = 6 denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

d. (3□12) □x = 1 denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

e. 4'ün "□" işlemine göre terslerini bulunuz.

f. "□" işlemine göre, $(6\square 2^{-1})\square 3^{-1}$ ifadesinin belirli bir değeri var mıdır?

21. R^2 den R'ye,
$f(x,y) =$ "x ve y'den, büyük olmayanı" ve
$g(x,y) =$ "x ve y'den, küçük olmayanı" fonksiyonları veriliyor.
$f(g(2,3), f(-2,-3))$ değeri kaçtır?

22. $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ kümesinde "Δ" işlemi tabloda verilmiştir.

Δ	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	3	5	0	2	4
2	2	5	1	4	0	3
3	3	0	4	1	5	2
4	4	2	0	5	3	1
5	5	4	3	2	1	0

a. İşlemin değişme özeliği var mıdır?

b. İşlemin birleşme özeliği var mıdır?

c. $(1\Delta 2)\Delta\left(2^{-1}\Delta 4\right) = ?$

d. $(2\Delta x)\Delta 3^{-1} = 1^{-1}\Delta 4^{-1}$ ise x kaçtır?

e. $\left(2^{-1}\Delta x\right)\Delta 3 = x^{-1}\Delta(4\Delta 5)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

f. $3^{-1}\circ(2\circ x) = (x\circ 3)\circ 2^{-1}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

23. $A = \{a,b,c,d,e\}$ kümesinde "$\star$" işlemi tablodaki gibi tanımlanmıştır.

$\star$	a	b	c	d	e
a	e	d	a	c	b
b	d	a	b	e	c
c	a	b	c	d	e
d	c	e	d	b	a
e	b	c	e	a	d

A'dan A'ya
$f(x) = a^{-1}\star x$ ve
$g(x) = x^{-1}\star a$
olduğuna göre, $f(b)\star g(d)$ işleminin sonucu nedir?

24. $A = \{a,b,c,d,e\}$ kümesinde "$\star$" işlemi tabloda verilmiştir.

$\star$	a	b	c	d	e
a	e	d	a	c	b
b	d	a	b	e	c
c	a	b	c	d	e
d	c	e	d	b	a
e	b	c	e	a	d

$\forall x, y \in A$ için;

a. $x\Delta y = x\star e\star y$ biçiminde tanımlanan "Δ" işlemine göre, A'nın etkisiz elemanı nedir?

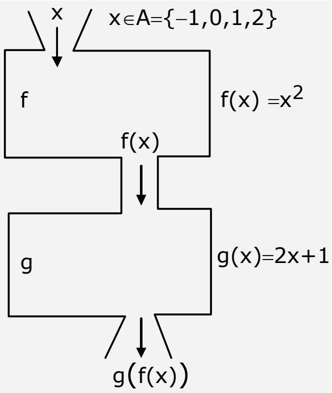
b. $x\square y = x\star y\star a$ biçiminde tanımlanan "□" işlemine göre, A'nın etkisiz elemanı nedir?

3.5 – Fonksiyonlarda İşlemler

3.5.1 – Fonksiyonların Bileşkesi

Etkinlik – 3.68

Şekildeki düzenek f ve g bölmelerinden oluşmaktadır. f bölmesine giren bir sayı bu bölmeden, "giren sayının karesi" olarak çıkıp g bölmesine girmektedir. g bölmesine giren sayı da bu bölmeden "2 katının 1 fazlası" olarak çıkmaktadır.



f bölmesine giren sayıların kümesi

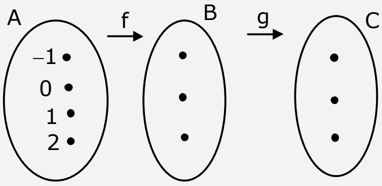
$A=\{-1,0,1,2\}$, f bölmesinden çıkan sayıların kümesi B, g bölmesinden çıkan sayıların kümesi C olsun.

a. f bölmesine giren (-1) sayısı bu bölmeden hangi sayı olarak çıkar?

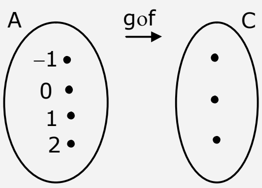
b. B kümesini liste yöntemi ile yazınız.

c. C kümesini liste yöntemi ile yazınız.

d. A'yı B'ye eşleyen fonksiyonu f ile, B'yi C'ye eşleyen fonksiyonu g ile göstererek aşağıdaki Venn şemasını tamamlayınız. f ve g fonksiyonlarını liste yöntemi ile yazınız.



e. A kümesini doğrudan doğruya C kümesine eşleyen fonksiyonu **g∘f** ile göstererek, aşağıdaki Venn şemasını tamamlayınız. g∘f fonksiyonunu liste yöntemi ile yazınız.



f. $A=\mathbb{R}$ olduğu durumda; $3\in A$ sayısının, C'nin hangi elemanına eşleneceğini bulunuz.

g. $A=\mathbb{R}$ olduğu durumda; $33\in C$ sayısına, A'nın hangi elemanlarının eşleneceğini bulunuz.

h. $a\in A$ sayısının C'deki görüntüsünün $g\circ f(a)=g(f(a))$ olduğunu dikkate alarak **g∘f : A → C** fonksiyonunun kuralını yazınız.

Tanım - 3.36

$f:A\to B$ ve $g:B\to C$ *birer fonksiyon olmak üzere;*

g∘f : A → C, $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ *biçiminde tanımlanan fonksiyona **f ve g fonksiyonlarının bileşkesi** denir.*

f ile g'nin bileşkesi olan **g∘f** fonksiyonu, **g bileşke f** diye okunur.

Dikkat ederseniz, f'nin tanım kümesi g∘f nin de tanım kümesi; g'nin değer kümesi g∘f nin de değer kümesi olmaktadır.

Örnek – 3.50

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+3$ ve

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=3x-1$ fonksiyonları veriliyor.

a. $A=\{-1,1,2\}$ ise $(g\circ f)(A)=?$

b. $B=\{2,5,8\}$ ise $(f\circ g)(B)=?$

c. $(g\circ f)(2a)=?$ **d.** $(f\circ g)(a+2)=?$

e. $(g\circ f)(x)=?$ **f.** $(f\circ g)(x)=?$

Çözüm

a. $(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(2\cdot(-1)+3)=g(1)$
$=3\cdot1-1=2$;

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(5)=14$;

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(7)=20$ olup

$(g\circ f)(A)=\{2,14,20\}$ bulunur.

b. $(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(5)=13$;

$(f\circ g)(5)=f(g(5))=f(14)=31$;

$(f\circ g)(8)=f(g(8))=f(23)=49$ olup

$(f\circ g)(B)=\{13,31,49\}$ bulunur.

c. $(g\circ f)(2a)=g(f(2a))=g(2\cdot(2a)+3)=g(4a+3)$
$=3\cdot(4a+3)-1$
$=12a+8$

d. $(f \circ g)(a+2) = f(g(a+2)) = f(3\cdot(a+2)-1)$
$= f(3a+5) = 2\cdot(3a+5)+3$
$= 6a+13$

e. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+3)$
$= 3(2x+3)-1 = 6x+8$

f. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x-1)$
$= 2(3x-1)+3 = 6x+1$

Örnek – 3.51

$A = \{a,b,c,d\}$ olmak üzere,

A'dan A'ya, $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$

fonksiyonları veriliyor.
$g \circ f$ fonksiyonunu bulunuz.

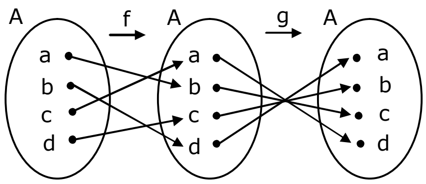
Çözüm

I. yol

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$;
$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(d) = a$;
$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(a) = d$;
$(g \circ f)(d) = g(f(d)) = g(c) = b$ olup

$(g \circ f) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & d & b \end{pmatrix}$ bulunur.

II. yol



Venn şemasından, $(g \circ f) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & d & b \end{pmatrix}$ bulunur.

III. yol

$$(g \circ f) = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix}}_{g} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}}_{f} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & d & b \end{pmatrix}$$

f fonksiyonu a'yı d'ye, g fonksiyonu d'yi c'ye eşler. Böylece, $g \circ f$ fonksiyonu a'yı c'ye eşlemiş olur. Bu eşlemeleri fonksiyonlar üzerinde oklarla gösterdik. Aynı şekilde, $g \circ f$ fonksiyonunun b'yi a'ya, c'yi d'ye, d'yi b'ye eşlediği gösterilir.

Örnek – 3.52

R'den R'ye,

$f(x) = 2x+1$ ve $g(x) = \begin{cases} x+2 & x<1 \text{ ise} \\ 2x & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonları veriliyor.

a. $(g \circ f)(2) = ?$ **b.** $(f \circ g)(-4) = ?$

c. $(g \circ f)(x) = ?$ **d.** $(f \circ g)(x) = ?$

Çözüm

a. $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(5) = 10$

b. $(f \circ g)(-4) = f(g(-4)) = f(-2) = -3$

c. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ olduğundan $g(x)$ kuralında x gördüğümüz her yere $f(x)$ koyacağız.

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} f(x)+2 & f(x)<1 \text{ ise} \\ 2f(x) & f(x) \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x+1+2 & 2x+1<1 \text{ ise} \\ 2(2x+1) & 2x+1 \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = \begin{cases} 2x+3 & x<0 \text{ ise} \\ 4x+2 & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

d. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ demek, x sayısı $g(x)$'teki x yerine konulacak; elde edilen $g(x)$ değeri de $f(x)$'teki x yerine konulacak demektir.

$g(x)$ değerleri x<1 için başka, x ≥1 için başkadır.

O hâlde $(f \circ g)(x)$ kuralı x<1 için başka, x ≥1 için başka olacaktır.

x<1 ise; $g(x) = x+2$ dir.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = 2(x+2)+1$

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = 2x+5$ olur.

$x \geq 1$ ise, $g(x) = 2x$ tir.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x+2$ olur.

Buna göre;

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2x+5 & x<1 \text{ ise} \\ 2x+2 & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

bulunur.

Etkinlik – 3.76

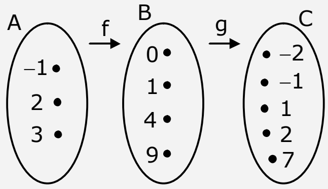
$A = \{-1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 4, 9\}$ ve

$C = \{-2, -1, 1, 2, 7\}$ olmak üzere;

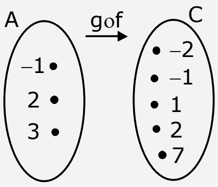
$f : A \to B$, $f(x) = x^2$ ve

$g : B \to C$, $g(x) = x - 2$ fonksiyonları veriliyor.

a. f ve g fonksiyonlarını yandaki Venn şeması üzerinde gösteriniz.



b. g∘f fonksiyonunu yandaki Venn şeması üzerinde gösteriniz.



c. f, g ve g∘f fonksiyonlarını liste yöntemi ile yazınız.

Etkinlik – 3.77

Aşağıda verilen f ve g fonksiyonları için, g∘f ve f∘g fonksiyonlarının kurallarını bulunuz.

a. $f : R \to R,\ f(x) = 3 - 2x$

$g : R \to R,\ g(x) = 2x + 5$

b. $f : R \to R,\ f(x) = x^2 - 1$

$g : R \to R,\ g(x) = 2 - x$

c. $f : R \to R,\ f(x) = x^2 + 1$

$g : R \to R,\ g(x) = x^2 - 1$

d. $f : R \to R,\ f(x) = x - 2$

$$g : R \to R,\ g(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x < 2 \text{ ise} \\ x - 2 & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

Etkinlik – 3.78

Aşağıda verilen f ve g fonksiyonları için f∘g ve g∘f fonksiyonlarının kurallarını bulunuz.

a. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b. $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & a & e & b & d \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ d & e & b & a & c \end{pmatrix}$

Etkinlik – 3.79

Aşağıda verilen fonksiyonları iki fonksiyonun bileşkesi olarak yazınız.

a. $f : R \to R,\ f(x) = (2x - 1)^2 + 2$

b. $f : R \to R,\ f(x) = (x + 2)^2 + 2x - 1$

c. $f : R \to R,\ f(x) = 4x + 5$

d. $f : R \to R,\ f(x) = x^2 + 2x - 3$

3.5.2 – Bileşke İşleminin Özelikleri

Değişme Özeliği

Önceki kısımda yaptığınız uygulamalarda bileşke işleminin **değişme özeliğinin olmadığı**na dikkat etmişsinizdir.

Bir örnek daha verelim:

R'den R'ye, $f(x) = 2x$ ve $g(x) = x + 2$ fonksiyonları için, $(f \circ g)(x) = 2x + 4$ ve $g \circ f(x) = 2x + 2$ olup $\mathbf{g \circ f \neq f \circ g}$ dir.

O hâlde;

Fonksiyonlarda **bileşke işleminin değişme özeliği yoktur.**

Birleşme Özeliği

Etkinlik – 3.80

R'den R'ye $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$ ve $h(x) = x + 2$ fonksiyonları veriliyor.

a. $(f \circ g) \circ h$ fonksiyonunun kuralını bulunuz.

b. $f \circ (g \circ h)$ fonksiyonunun kuralını bulunuz.

$(f \circ g) \circ h$ ve $f \circ (g \circ h)$ arasında bir bağıntı kurunuz.

Teorem - 3.11

$f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$

fonksiyonları için

$\mathbf{(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)}$ *dir.*

Teorem – 3.11'e göre, fonksiyonlarda **bileşke işleminin birleşme özeliği vardır.**

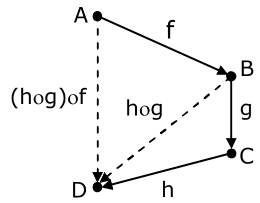
İspat

İki fonksiyonun eşit olması için; hem tanım ve değer kümelerinin hem de tanım kümesindeki her x elemanının değer kümesindeki görüntülerinin karşılıklı olarak eşit olması gerekir.

f, g, h ve $h \circ g$ fonksiyonları için;

$g : B \to C$ ve $h : C \to D$ olduğundan, $h \circ g : B \to D$ dir.

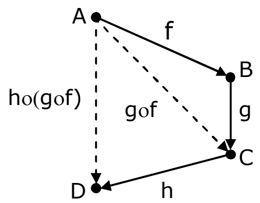
$f : A \to B$ ve $h \circ g : B \to D$ olduğundan, $(h \circ g) \circ f : A \to D$ dir.



f, g, h ve $g \circ f$ fonksiyonları için;

$f : A \to B$ ve $g : B \to C$ olduğundan $g \circ f : A \to C$ dir.

$g \circ f : A \to C$ ve $h : C \to D$ olduğundan, $h \circ (g \circ f) : A \to D$ dir.



O hâlde; $(\mathbf{h \circ g}) \circ \mathbf{f}$ ve $\mathbf{h} \circ (\mathbf{g \circ f})$ fonksiyonlarının tanım ve değer kümeleri aralarında eşittir.

Şimdi; bu fonksiyonların A tanım kümesindeki her x elemanının, D değer kümesindeki görüntülerinin de karşılıklı olarak eşit olduklarını gösterelim:

Bileşke fonksiyonun tanımından yararlanarak;

$$\begin{aligned}\left[(h \circ g) \circ f\right](x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h\left[g(f(x))\right] \\ &= h\left[(g \circ f)(x)\right] \\ &= \left[h \circ (g \circ f)\right](x) \quad \text{bulunur.}\end{aligned}$$

O hâlde;

Fonksiyonlarda, bileşke işleminin birleşme özeliği vardır.

Bileşke İşleminin Etkisiz Elemanı

Etkinlik – 3.81

$A = \{-2, -1, 1, 3\}$, $B = \{1, 2, 4, 9\}$ olmak üzere;

$I_A : A \to A$, $I_A(x) = x$, $I_B : B \to B$, $I_B(x) = x$ ve $f : A \to B$, $f(x) = x^2$ fonksiyonları veriliyor.

a. $(I_A \circ f) = ?$ **b.** $(f \circ I_B) = ?$

Teorem - 3.12

I_A, A'da; I_B, B'de birim fonksiyonlar olmak üzere;

$\forall f : A \to B$ fonksiyonu için,

$\mathbf{f \circ I_A = f = I_B \circ f}$ *dir.*

Teorem – 3.12'ye göre, **birim fonksiyon, bileşke işleminin etkisiz elemanıdır.**

İspat

$\forall f : A \to B$ için $f \circ I_A = f$ olduğunu gösterelim:

I_A, f ve $f \circ I_A$ fonksiyonları için, $I_A : A \to A$ ve $f : A \to B$ olduğundan $(f \circ I_A) : A \to B$ dir. ①

$\forall x \in A$ için, $(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$ dir. ②

① ve ② den, $\mathbf{f \circ I_A = f}$ bulunur.

$\forall f : A \to B$ için $\mathbf{I_B \circ f = f}$ olduğunu da siz gösteriniz.

Buna göre; $I_A = I$ dersek

$\forall f : A \to A$ için, $\mathbf{f \circ I = I \circ f = f}$ dir.

Teorem -3.13

$f : A \to B$ ve $g : B \to C$ fonksiyonlarının her biri ***bire bir ve örten*** *ise $g \circ f : A \to C$ fonksiyonu da* ***bire bir ve örten****dir.*

İspat

Önce, f ve g bire bir ise $g \circ f$'nin de bire bir olduğunu gösterelim.

$\forall x_1, x_2 \in A$ için $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ olmasının, $x_1 = x_2$ olmasını gerektirdiğini göstereceğiz.

$\forall x_1, x_2 \in A$ için,

$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$

$\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ (Bileşke tanımı)

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (g bire bir old.)

$\Rightarrow x_1 = x_2$ (f bire bir old.)

O hâlde;

f ve g bire bir ise $g \circ f$ de bire birdir.

Şimdi, f ve g örten ise $g \circ f$'nin de örten olduğunu gösterelim.

$f(A)=B$ ve $g(B)=C$ iken, $(g\circ f)(A)=C$ olduğunu göstereceğiz:

$(g\circ f)(A)=g(f(A))$ (Bileşke tanımı)

$\Rightarrow (g\circ f)(A)=g(B)$ (f örten old.)

$\Rightarrow (g\circ f)(A)=C$ (g örten old.)

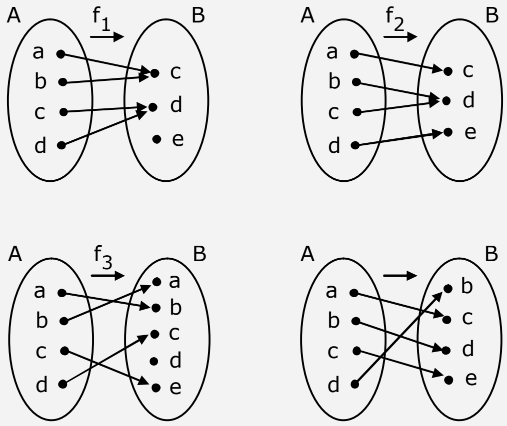
O hâlde;

f ve g örten ise g∘f de örtendir.

3.5.3 – Bir Fonksiyonun Ters Fonksiyonu

Etkinlik – 3.82

Aşağıda, Venn şemaları ile verilen fonksiyonları inceleyiniz.



a. f_1, f_2, f_3, f_4 fonksiyonlarının bire bir olup olmadıklarını, örten mi yoksa içine mi olduklarını belirtiniz.

b. Verilen fonksiyonların f_1^{-1}, f_2^{-1}, f_3^{-1}, f_4^{-1} ters bağıntılarını Venn şeması ile gösteriniz. Bu ters bağıntılardan hangileri fonksiyondur.

Teorem -3.14

A'dan B'ye f fonksiyonu bire bir ve örten ise f^{-1} ters bağıntısı da B'den A'ya bir fonksiyondur.

$f: A \to B$ fonksiyonunun bire bir ve örten olması demek, A ve B kümeleri arasında bire bir ve örten bir eşlemenin yapılmış olması demektir.

Böyle bir eşlemede, $f^{-1}: B \to A$ bağıntısının fonksiyon olma koşullarının sağlanacağı; bu fonksiyonun da bire bir ve örten olacağı açıktır.

Bu açıklama dışında bir ispatlamayı gerekli görmüyoruz.

Tanım - 3.37

$f: A \to B$ ve $f^{-1}: B \to A$ *birer fonksiyon olmak üzere;*

$\mathbf{f^{-1}: B \to A}$ *fonksiyonuna* ***f'nin ters fonksiyonu*** *denir.*

Teorem – 3. 14 ve "*ters fonksiyon*" kavramına göre; $f: A \to B$ fonksiyonu bire bir ve örten olmak üzere,

$\mathbf{f=\{(x,y) \mid y=f(x),\ x\in A,\ y\in B\}}$ ise

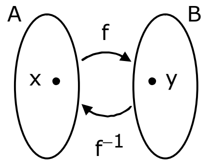
$\mathbf{f^{-1}=\{(y,x) \mid x=f^{-1}(y),\ x\in A,\ y\in B\}}$ dir.

$(x,y)\in f$ ise $(y,x)\in f^{-1}$ ya da

$y=f(x)$ ise $x=f^{-1}(y)$ dir.

Örneğin; $f(3)=5$ ise

$f^{-1}(5)=3$ olur.



Örnek – 3.53

$f: R \to R$, $f(x)=2x-2$ fonksiyonu veriliyor.

a. f'in bire bir olduğunu gösteriniz.

b. f'in örten olduğunu gösteriniz.

c. f^{-1} bağıntısını yazınız. Bu bağıntı bir fonksiyon mudur?

d. $f^{-1}: R \to R$, $y=f(x)$ fonksiyonunun kuralını yazınız.

e. f ve f^{-1} fonksiyonlarının grafiğini aynı koordinat sisteminde çizerek, aralarında bağıntı kurunuz.

Çözüm

a. $\forall x_1,\ x_2 \in R$ için, $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$ önermesinin doğru olduğunu göstereceğiz.

$\forall x_1,\ x_2 \in R$ için,

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 2x_1-2=2x_2-2$

$\Rightarrow x_1=x_2$ dir.

Öyleyse, f bire birdir.

b. $f(R)=R$ olduğunu; ya da $f:R\to R$, $f(x)=y=2x-2$ fonksiyonunda y'nin her gerçek sayı değerini alabileceğini göstereceğiz.

$f(x)=2x-2 \Rightarrow y=2x-2$

$\Rightarrow x=\dfrac{y+2}{2}$

$x=\dfrac{y+2}{2}$ eşitliğinde y'nin her gerçek sayı değeri için bir x değeri vardır. Öyleyse, f örtendir.

c. $f=\{(x,y)|\,y=2x-2,\ x\in R,\ y\in R\}$ ve

$f^{-1}=\left\{(y,x)\Big|\,x=\dfrac{y+2}{2},\ x\in R,\ y\in R\right\}$ olur.

f bire bir ve örten olduğundan f^{-1} de bir fonksiyondur.

d. f^{-1} fonksiyonu, $f^{-1}:R\to R,\ f^{-1}(y)=\dfrac{y+2}{2}$ biçiminde yazılabilir. Ancak, fonksiyonların grafikleri çizilirken tanım kümeleri yatay eksende gösterildiğinden ve tanım kümesinin elemanları da genellikle x ile temsil edildiğinden,

$f^{-1}(y)=\dfrac{y+2}{2}$ eşitliğinde y yerine x konulur.

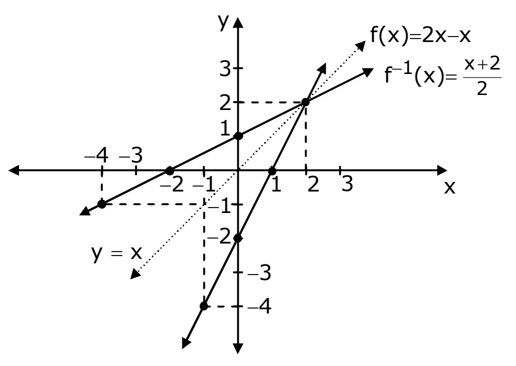
f^{-1}'in ifadesi de $f^{-1}:R\to R,\ f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{2}$ olur.

e. $f:R\to R,\ f(x)=2x-2$ fonksiyonunun kartezyen koordinat sistemindeki grafiği $y=2x-2$ doğrusu; $f^{-1}:R\to R,\ f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{2}$ fonksiyonunun grafiği $y=\dfrac{x+2}{2}$ doğrusudur.

Değişim tablolarından yararlanarak, grafikler aşağıda çizilmiştir.

x	–1	0	1	2
y=f(x)	–4	–2	0	2

x	–4	–2	0	2
y=f^{-1}(x)	–1	0	1	2



Koordinat sisteminde (x, y) ve (y, x) ikililerine karşılık gelen noktalar, $y=x$ doğrusuna göre simetrik noktalardır.

$(x,y)\in f$ iken $(y,x)\in f^{-1}$ olduğundan f ve f^{-1} fonksiyonlarının grafikleri de $y=x$ doğrusuna göre simetrik olurlar.

✚ Bire bir ve örten f fonksiyonunun ters fonksiyonunun kuralını bulmak için;

$y=f(x)$ eşitliğinde x, y türünden yazılır; elde edilen $x=f^{-1}(y)$ eşitliğinde x yerine y, y yerine x konulur.

Örnek – 3.54

$f:R-\{2\}\to A,\ f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$

fonksiyonu veriliyor.

a. f'in bire bir olduğunu gösteriniz.

b. f'in örten olması için A kümesi ne olmalıdır?

c. Bire bir ve örten f fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm

a. $\forall x_1,\ x_2\in R-\{2\}$ için,

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \dfrac{x_1+2}{x_1-2}=\dfrac{x_2+2}{x_2-2}$

$\Rightarrow x_1x_2-2x_1+2x_2-4=x_1x_2+2x_1-2x_2-4$

$\Rightarrow x_1=x_2$ dir.

Öyleyse, f bire birdir.

b. $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}\Rightarrow y=\dfrac{x+2}{x-2}$

$\Rightarrow xy-2y=x+2\Rightarrow xy-x=2y+2$

$\Rightarrow x(y-1)=2y+2\Rightarrow x=\dfrac{2y+2}{y-1}$ olur.

$x=\dfrac{2y+2}{y-1}$ eşitliğinde y'nin 1 dışındaki tüm gerçek sayı değerlerine karşılık bir x değeri vardır.

Öyleyse; $A=R-\{1\}$ olarak alınırsa,

$f:R-\{2\}\to R-\{1\},\ f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ fonksiyonu bire bir ve örten olur.

c. f^{-1} fonksiyonunun tanım ve değer kümeleri bellidir.

Yukarıda $x = f^{-1}(y) = \dfrac{2y+2}{y-1}$ olduğunu bulmuştuk. Buna göre;

$f^{-1}: R - \{1\} \to R - \{2\}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+2}{x-1}$ olur.

Örnek – 3.55

$A = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere;

$f: A \to A$, $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix}$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm

Permütasyon fonksiyonunda üst satır tanım kümesini, alt satır diğer kümesini gösterdiğinden; satırların yerleri değiştirilirse fonksiyonun tersi bulunur. Ters fonksiyon yazılırken; tanım kümesi, verilen fonksiyonun tanım kümesinin sırası ile yazılır.

$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix} \quad \underset{f}{\downarrow} \; \underset{f^{-1}}{\uparrow} \qquad \begin{matrix} f^{-1}(b) = a, & f^{-1}(d) = b \\ f^{-1}(a) = c, & f^{-1}(c) = d \end{matrix}$

Buna göre,

$f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & d & b \end{pmatrix}$ bulunur.

Örnek – 3.56

$f: [2, +\infty) \to [-1, +\infty)$, $f(x) = (x-2)^2 - 1$ fonksiyonu bire bir ve örtendir.

a. $f^{-1}(a) = 5$ ise a kaçtır?

b. $f^{-1}(3)$ değeri kaçtır?

c. f fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm

a. $f^{-1}(a) = 5$ ise $f(5) = a$ olur.

$a = f(5) \Rightarrow a = (5-2)^2 - 1 \Rightarrow a = 8$ bulunur.

b. $f^{-1}(3) = k$ olsun.

$f^{-1}(3) = k \Rightarrow f(k) = 3 \Rightarrow (k-2)^2 - 1 = 3$

$\Rightarrow (k-2)^2 = 4 \Rightarrow (k-2=2) \vee (k-2=-2)$

$\Rightarrow (k=4) \vee (k=0)$

k sayısının f fonksiyonun tanım kümesinde, yani $[2, +\infty)$ aralığında olması gerektiğinden $k = 4$ olur.
Öyleyse, $f^{-1}(3) = 4$ tür.

c. $f(x) = (x-2)^2 - 1 \Rightarrow y = (x-2)^2 - 1$

$\Rightarrow (x-2)^2 = y+1 \Rightarrow x-2 = \mp\sqrt{y+1}$

$\Rightarrow \left(x = 2 + \sqrt{y+1}\right) \vee \left(x = 2 - \sqrt{y+1}\right)$ olur.

x sayıları f'nin tanım kümesinin elemanlarını temsil ettiğinden, $[2, +\infty)$ aralığında olmalıdır.
Öyleyse, $x = 2 + \sqrt{y+1}$ ve dolayısıyla

$f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y+1}$ olur.

Buna göre,

$f^{-1}: [-1, +\infty) \to [2, +\infty)$, $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}$

bulunur.

Etkinlik – 3.83

Aşağıda verilen bire bir ve örten fonksiyonların ters fonksiyonlarını bulunuz.

a. $f: R \to R$; $f(x) = 3 - x$

b. $f: R \to R$; $f(x) = 3x + 5$

c. $f: R - \{-3\} \to R - \{2\}$; $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$

d. $f: [1, +\infty) \to [2, +\infty)$, $f(x) = (x-1)^2 + 2$

e. $f: A \to A$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Etkinlik – 3.84

$f: R - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to R - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$, $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonunun bire bir ve örten olduğunu ve tersinin

$f^{-1}: R - \left\{\dfrac{a}{c}\right\} \to R - \left\{\dfrac{d}{c}\right\}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$ olduğunu gösteriniz.

Bundan yararlanarak, aşağıda verilen fonksiyonların ters fonksiyonlarını yazınız.

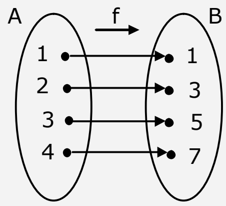
a. $f: R - \{3\} \to R - \{-2\}$, $f(x) = \dfrac{1-2x}{x-3}$

b. $f: R - \{2\} \to R - \{0\}$, $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$

Bir Fonksiyonun, Ters Fonksiyonu ile Bileşkesi

Etkinlik – 3.85

$f : A \to B$ fonksiyonu yandaki Venn şemasında verilmiştir.



a. fof^{-1} fonksiyonunu liste yöntemi ile yazınız.

b. $f^{-1}of$ fonksiyonunu liste yöntemi ile yazınız.

Teorem -3.15

$f : A \to B$ *fonksiyonu bire bir ve örten ise*

$\mathbf{f^{-1}of = I_A}$ **ve** $\mathbf{fof^{-1} = I_B}$ *dir.*

İspat

$f^{-1}of = I_A$ olduğunu gösterelim:

$f : A \to B$ fonksiyonu bire bir ve örten olduğundan, $f^{-1} : B \to A$ bir fonksiyondur.

Bileşke fonksiyon tanımına göre,

$f^{-1}of = A \to A$ olur.

O hâlde, $I_A : A \to A$ ve $f^{-1}of : A \to A$ fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümeleri, aralarında eşittir.

Ters fonksiyon tanımına göre; $f : A \to B$ bire bir ve örten fonksiyonu için,

$\forall x \in A,\ f(x) = y \in B;\ \forall y \in B,\ f^{-1}(y) = x \in A$ dır.

Buna dayanarak, $\forall x \in A$ için $\left(f^{-1}of\right)(x)$ görüntüsünü bulalım:

$\forall x \in A,\ \left(f^{-1}of\right)(x) = f^{-1}(f(x))$ (Bileşke tan.)

$= f^{-1}(y)$ $\quad [y = f(x)]$

$= x$ olur. $\quad [x = f(y)]$

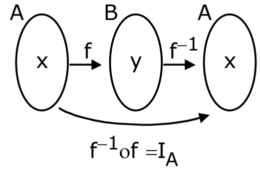
$I_A : A \to A,\ I_A(x) = x$ ve

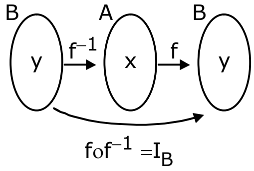
$f^{-1}of : A \to A,\ \left(f^{-1}of\right)(x) = x$ olduğundan

$\mathbf{f^{-1}of = I_A}$ bulunur.

Aynı yolla, $\mathbf{fof^{-1} = I_B}$ olduğunu da siz gösteriniz.

$A \neq B$ için $f^{-1}of \neq fof^{-1}$ olduğuna dikkat ediniz.





$f : A \to A$ bire bir ve örten fonksiyonu için,

$\mathbf{f^{-1}of = fof^{-1} = I_A}$ olur.

Teorem–3.15'ten yararlanarak bileşkesi ve diğer bileşenleri bilinen bir fonksiyon bulunabilir.

Örnek – 3.57

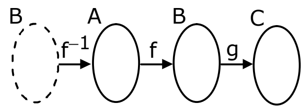
$f : A \to B$ ve $g : B \to C$ fonksiyonları için, $gof = h$ tır.

a. g fonksiyonunu f ve h türünden yazınız.

b. f fonksiyonunu g ve h türünden yazınız.

Çözüm

a. $gof = A \to C$ ve $h : A \to C$ olduğu için



$(gof)of^{-1} : B \to C$ ve $hof^{-1} : B \to C$ vardır.

$gof = h$

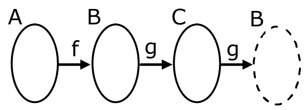
$\Rightarrow (gof)of^{-1} = hof^{-1}$

$\Rightarrow go\left(fof^{-1}\right) = hof^{-1}$ (Birleşme öz.)

$\Rightarrow goI_B = hof^{-1}$ $\quad \left(fof^{-1} = I_B\right)$

$\Rightarrow g = hof^{-1}$ olur. $\quad (goI_B = g)$

b. $gof = A \to C$ ve $h : A \to C$ olduğu için



$g^{-1}o(gof) : A \to B$ ve $g^{-1}oh : A \to B$ vardır.

$gof = h$

$\Rightarrow g^{-1}o(gof) = g^{-1}oh$

$\Rightarrow \left(g^{-1}og\right)of = g^{-1}oh$ (Birleşme öz.)

$\Rightarrow I_Bof = g^{-1}oh$ $\quad \left(g^{-1}og = I_B\right)$

$\Rightarrow f = g^{-1}oh$ olur. $\quad (I_Bof = f)$

Etkinlik – 3.86

$f: A \to B,\ \ g: B \to C,\ \ h: C \to D$ fonksiyonları için, $f \circ g \circ h = t$ ise

a. $f = t \circ h^{-1} \circ g^{-1}$ **b.** $h = g^{-1} \circ f^{-1} \circ t$

c. $g = f^{-1} \circ t \circ h^{-1}$

olduğunu gösteriniz.

Örnek – 3.58

R'den R'ye f ve g fonksiyonları,

$f(x) = 2x - 3$ ve $(f \circ g)(x) = 6x - 1$ olarak verilmiştir. g fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm

I. yol

$$f(x) = 2x - 3 \Rightarrow y = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2} \text{ olur.}$$

$$(f \circ g)(x) = 6x - 1$$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{f^{-1} \circ f}_{I} \circ g\right)(x) = f^{-1} \circ (6x - 1)$$

$$\Rightarrow g(x) = \left(\frac{x+3}{2}\right) \circ (6x - 1)$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{6x - 1 + 3}{2} \Rightarrow g(x) = 3x + 1 \text{ bulunur.}$$

$g: R \to R,\ \ g(x) = 3x + 1$ dir.

II. yol

$f(x) = 2x - 3 \Rightarrow f(g(x)) = 2g(x) - 3$ ①

$(f \circ g)(x) = 6x - 1 \Rightarrow f(g(x)) = 6x - 1$ ②

① ve ② den

$2g(x) - 3 = 6x - 1 \Rightarrow g(x) = 3x + 1$ bulunur.

Örnek – 3.59

R'den R'ye f ve g fonksiyonları,

$f(x) = 2x + 1$ ve $(g \circ f)(x) = 6x + 1$ olarak verilmiştir.

g fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm

I. yol

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow y = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \text{ olur.}$$

$$(g \circ f)(x) = 6x + 1$$

$$\Rightarrow \left(g \circ \underbrace{f \circ f^{-1}}_{I}\right)(x) = (6x + 1) \circ f^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow (g \circ I)(x) = (6x + 1) \circ \left(\frac{x-1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = 6 \cdot \frac{x-1}{2} + 1$$

$$\Rightarrow g(x) = 3x - 2 \text{ bulunur.}$$

$g: R \to R,\ \ g(x) = 3x - 2$ dir.

II. yol

$$(g \circ f)(x) = 6x + 1$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = 6x + 1$$

$$\Rightarrow g(2x + 1) = 6x + 1 \text{ olur. } (f(x) = 2x + 1 \text{ old.})$$

g'nin yanındaki parantezin içini x'e dönüştüreceğiz.

$(f \circ f^{-1})(x) = x \Rightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ olduğundan, x yerine $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$ koymalıyız.

$$g(2x + 1) = 6x + 1$$

$$\Rightarrow g(x) = 6 \cdot \frac{x-1}{2} + 1 \Rightarrow g(x) = 3x - 2 \text{ bulunur.}$$

Örnek – 3.60

R'den R'ye f fonksiyonu $f(3x + 4) = 9x + 16$ olarak verilmiştir. $f(2x + 1)$ i bulunuz.

Çözüm

Verilen eşitlikte x yerine $(3x + 4)^{-1} = \dfrac{x-4}{3}$ konularak f(x) bulunur. f(x)'te de x yerine $2x + 1$ konulur.

Biz $f(2x + 1)$'i doğrudan bulacağız:

$$3x + 4 = 2a + 1 \Rightarrow x = \frac{2a - 3}{3} \text{ olur.}$$

$$f\underbrace{(3x+4)}_{2a+1} = 9x+16$$

$$\Rightarrow f(2a+1) = 9\cdot\frac{2a-3}{3}+16$$

$$\Rightarrow f(2a+1) = 6a+7$$

$$\Rightarrow f(2x+1) = 6x+7 \text{ bulunur.}$$

Örnek – 3.61

$A = \{a,b,c,d\}$ kümesinde f ve g fonksiyonları

$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ ve $g\circ f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$ olarak verilmiştir. g fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm

I. yol

$g\circ f = h \Rightarrow g = h\circ f^{-1}$ ve

$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \Rightarrow f^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$ dir.

Buna göre,

$$g\circ f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix} \Rightarrow g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix} \circ f^{-1}$$

$$\Rightarrow g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \text{ bulunur.}$$

II. yol

$$g\circ f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix} \text{ ve } f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g\circ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \bullet & \underset{②}{\bullet} & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \overset{①}{a} & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{①}{a} & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$$

f'de ① ile gösterilen eleman g'de ② ile gösterilen elemana eşlenecektir. Eşitliğin sağında ① ile gösterilen a elemanının c'ye eşlendiği belirtilmiştir.

Öyleyse, g'de ② ile gösterilen eleman c olmalıdır.

g'nin diğer elemanlarını da aynı yolla bulunuz.

$g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ bulunur.

Etkinlik – 3.87

R'den R'ye f ve g fonksiyonları aşağıdaki gibi verilmiştir.

İstenenleri bulunuz.

a. $(f\circ g)(x) = -2x-2$ ve $f(x) = 3-x$ ise $g(x) = ?$

b. $(g\circ f)(x) = 6x-4$ ve $f(x) = 3x-4$ ise $g(x) = ?$

c. $(f\circ g)(x) = 4x^2-2x$ ve $g(x) = 2x-1$ ise $f(x) = ?$

d. $(g\circ f)(x) = 2x^2+4x+1$ ve $g(x) = 2x+3$ ise $f(2) = ?$

Etkinlik – 3.88

R'den R'ye f fonksiyonları için;

a. $f(2x+1) = 8x+3$ ise $f(3x-4) = ?$

b. $f^{-1}(6x-5) = 2-2x$ ise $f(2x+1) = ?$

c. $f(2x+4) = 10x+17$ ise $f(2) = ?$

d. $f(3-2x) = 8x-9$ ise $f^{-1}(7) = ?$

Etkinlik – 3.89

$A = \{1,2,3,4\}$ olmak üzere, A'dan A'ya f ve g permütasyon fonksiyonları için;

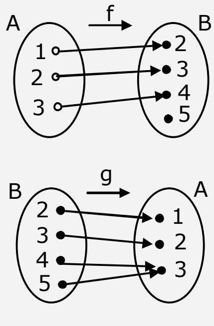
a. $f\circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ve $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ise $f = ?$

b. $g\circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ve $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ise $f = ?$

Bileşkeleri Birim Fonksiyon Olan Fonksiyonlar

Etkinlik – 3.90

$f: A \to B$ ve
$g: B \to A$
fonksiyonları yandaki Venn şemalarında verilmiştir.



a. $g\circ f$ fonksiyonunu hem Venn şeması ile hem liste yöntemi ile gösteriniz.

b. $f \circ g$ fonksiyonunu hem Venn şeması ile hem liste yöntemi ile gösteriniz.

Teorem -3.16

$f : A \to B$ *ve* $g : B \to A$ *fonksiyonları için,*

$\mathbf{g \circ f = I_A}$ *ise* ***f bire birdir*** *ve* ***g örtendir.***

İspat

Önce, $f : A \to B$ ve $g : B \to A$ fonksiyonları için

$g \circ f = I_A$ ise f'nin bire bir olduğunu gösterelim:

$f : A \to B$ ve $g : B \to A$ birer fonksiyon olduğundan,

$\forall x_1,\ x_2 \in A$ için,

$f(x_1) = y_1 \in B$ ve $f(x_2) = y_2 \in B$ ① vardır ve

$x_1 = x_2$ ise $f(x_1) = f(x_2)$ dir. ②

$\forall y_1,\ y_2 \in B$ için,

$y_1 = y_2$ ise $g(y_1) = g(y_2)$ dir. ③

$\forall x_1,\ x_2 \in A$ için, $f(x_1) = f(x_2)$ olmasının,

$x_1 = x_2$ olmasını gerektirdiğini göstereceğiz.

$\forall x_1,\ x_2 \in A$ için,

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow y_1 = y_2$ ①

$\Rightarrow g(y_1) = g(y_2)$ ③

$\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ ①

$\Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ (Bileşke t.)

$\Rightarrow I_A(x_1) = I_A(x_2)$ $(g \circ f = I_A)$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ bulunur.

O hâlde, **f bire birdir**.

Şimdi de g'nin örten olduğunu yani $g(B) = A$ olduğunu gösterelim:

$f : A \to B$ ve $g : B \to A$ fonksiyonlar olduğundan,

$f(A) \subset B$ ve $g(B) \subset A$ dır.

$g \circ f = I_A \Rightarrow (g \circ f)(A) = I_A(A)$

$\Rightarrow g(f(A)) = A$ olur.

Bu sonuç, g'nin f(A)'dan A'ya örten bir fonksiyon olduğunu gösterir. $f(A) \subset B$ ve $g(B) \subset A$ olduğu dikkate alınırsa, $g(B) = A$ olması zorunludur.

O hâlde; **g örtendir.**

Teorem -3.17

$f : A \to B$ *ve* $g : B \to A$ *fonksiyonları için,*

$\mathbf{g \circ f = I_A}$ *ve* $\mathbf{f \circ g = I_B}$ *ise* ***f ve g bire bir ve örten*** *olup* ***biri diğerinin ters fonksiyonudur.***

Teorem – 3.17'nin, Teorem – 3.15'in karşıtı olduğuna dikkat ediniz.

İspat

Teorem – 3.16'ya göre, $g \circ f = I_A$ olduğundan f bire bir ve g örten;

$f \circ g = I_B$ olduğundan g bire bir ve f örtendir.

Buna göre; f ve g, bire bir ve örten fonksiyonlardır.

$\mathbf{f^{-1} = g}$ olduğunu gösterelim:

$f : A \to B$ bire bir ve örten fonksiyon olduğundan $f^{-1} : B \to A$ ters fonksiyonu vardır. $g : B \to A$ olduğundan f^{-1} ve g fonksiyonlarının tanım ve değer kümeleri aralarında eşittir.

$f = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in A,\ y \in B\}$ ① ise

$f^{-1} = \{(y, x) \mid x = f^{-1}(y),\ x \in A,\ y \in B\}$ ② olur.

Öte yandan,

$g \circ f = I_A \Rightarrow \forall x \in A,\ (g \circ f)(x) = I_A(x)$

$\Rightarrow \forall x \in A,\ g(f(x)) = x$

$\Rightarrow \forall x \in A,\ g(y) = x$ ① tir.

$\forall y \in B,\ \exists x \in A$ için,

$f^{-1} : B \to A,\ f^{-1}(y) = x$ ve

$g : B \to A,\ g(y) = x$ olduğundan $\mathbf{f^{-1} = g}$ olur.

$f \circ g = I_B$ den yararlanarak, $\mathbf{g^{-1} = f}$ olduğunu da siz gösteriniz.

Teorem – 3.15 ve Teorem – 3.17'yi birlikte ifade edelim:

$f : A \to B$ ve $g : B \to A$ fonksiyonlarından her birinin diğerinin ters fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşul, $g \circ f = I_A$ ve $f \circ g = I_B$ olmasıdır.

$A = B$ olması durumunda Teorem – 3.15 ve karşıtı olan Teorem – 3.17, birlikte şöyle ifade edilebilir:

A'dan A'ya f ve g fonksiyonlarından her birinin diğerinin ters fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşul, $g \circ f = I_A = f \circ g$ olmasıdır.

Teorem -3.18

Bire bir ve örten, $f: A \to B$ *fonksiyonunun ters fonksiyonu yalnız bir tanedir.*

İspat

$f: A \to B$ ve $f^{-1}: B \to A$ bire bir ve örten fonksiyonları için,

$fof^{-1} = I_B$ ① ve $f^{-1}of = I_A$ ② dır.

f fonksiyonunun g ve h gibi iki ters fonksiyonu olduğunu varsayalım.

g ve h, ① ve ② yi sağlayacaktır.

$fog = I_B$ ③, $foh = I_B$ ④

$gof = I_A$ ⑤, $hof = I_A$ ⑥

$g: B \to A$, $fog: B \to B$ ve $foh: B \to B$ olduğundan $go(fog): B \to A$ ve $go(foh): B \to A$ vardır.

③ ve ④ ten

$fog = foh$

$\Rightarrow go(fog) = go(foh)$

$\Rightarrow (gof)og = (gof)oh$ (Birleşme öz.)

$\Rightarrow I_A og = I_A oh$ (5)

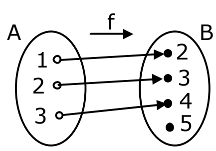
$\Rightarrow g = h$ bulunur.

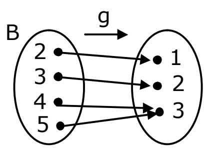
O hâlde,

Bire bir ve örten bir fonksiyonun ters fonksiyonu bir tanedir.

Örnek – 3.62

a. $f: A \to B$ ve $g: B \to A$ fonksiyonları aşağıda şemalarıyla verilmiştir.





$gof = I_A$ olmasına karşın $g^{-1} = f$ ya da $f^{-1} = g$ değildir. Hatta f^{-1} ve g^{-1} fonksiyonları tanımlı bile değildir. (Neden?)

Demek ki; $g^{-1} = f$ ve $f^{-1} = g$ olması için $gof = I_A$ olması yeterli değildir. $fog = I_B$ olması da gerekir.

b. $f: R \to R$, $f(x) = 2x - 3$ ve $g: R \to R$, $g(x) = -x + 6$ fonksiyonları için R'de $gof = fog$ olur. Ancak; $g^{-1} \neq f$ ve $f^{-1} \neq g$ dir. Demek ki; $gof = fog$ olması, $g^{-1} = f$ ve $f^{-1} = g$ olması için yeterli değildir. $gof = fog = I$ olmalıdır.

Bileşke Fonksiyonun Tersi

Etkinlik – 3.91

$f: R - \{0\} \to R - \{1\}$, $f(x) = \dfrac{x-2}{x}$ ve

$g: R - \{1\} \to R - \{2\}$, $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ bire bir ve örten fonksiyonları veriliyor.

a. gof fonksiyonunu bulunuz.

b. $(gof)^{-1}$ fonksiyonunu bulunuz.

c. f^{-1}, g^{-1} ve $f^{-1}og^{-1}$ fonksiyonlarını bulunuz.

d. $(gof)^{-1}$ ve $f^{-1}og^{-1}$ fonksiyonları arasında bir bağıntı kurunuz.

Teorem -3.19

$f: A \to B$ *ve* $g: B \to C$ *fonksiyonlarından her biri bire bir ve örten ise* $\mathbf{(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}}$ *dir.*

İspat

İki yoldan ispatlayabiliriz.

I. yol

$f: A \to B$ ve $g: B \to C$ bire bir ve örten ise,

$gof: A \to C$ fonksiyonu da bire bir örten olup $(gof)^{-1}: C \to A$ vardır.

$g^{-1}: C \to B$ ve $f^{-1}: B \to A$ olduğundan

$f^{-1}og^{-1}: C \to A$ fonksiyonu da vardır.

gof ve $f^{-1}og^{-1}$ fonksiyonlarının birbirlerinin tersi olması için,

$(gof)o\left(f^{-1}og^{-1}\right) = I_C$ ① ve

$\left(f^{-1}og^{-1}\right)o(gof) = I_A$ ② olması gerekir.

① in sağlandığını gösterelim:

$$\begin{aligned}(gof)o\left(f^{-1}og^{-1}\right) &= go\left(fof^{-1}\right)og^{-1} && \text{(Birleşme öz.)}\\ &= goI_Bog^{-1} && \left(fof^{-1}=I_B\right)\\ &= gog^{-1} && \left(goI_B=g\right)\\ &= I_C\end{aligned}$$

② nin sağlandığını da siz gösteriniz.
O hâlde; $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ dir.

II. yol

C'den A'ya, $(gof)^{-1} = h$ olsun.

$(gof)^{-1} = h$

$\Rightarrow gof = h^{-1}$

$\Rightarrow go\underbrace{fof^{-1}}_{I_B} = h^{-1}of^{-1}$ (B'den C'ye fonk.)

$\Rightarrow g = h^{-1}of^{-1}$

$\Rightarrow gog^{-1} = h^{-1}of^{-1}og^{-1}$ (C'den C'ye fonk.)

$\Rightarrow I_C = h^{-1}of^{-1}og^{-1}$

$\Rightarrow hoI_C = \underbrace{hoh^{-1}}_{I_A}of^{-1}og^{-1}$ (C'den A'ya fonk.)

$\Rightarrow h = f^{-1}og^{-1}$

$\Rightarrow \boldsymbol{(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}}$

(İspatlamada, bileşke işleminin birleşme özeliği olduğundan parantez kullanmadık.)

Etkinlik – 3.92

R'den R'ye bire bir ve örten f ve g fonksiyonları için,

$\left((gof)^{-1}of^{-1}\right)(x) = 4x+3$ ve

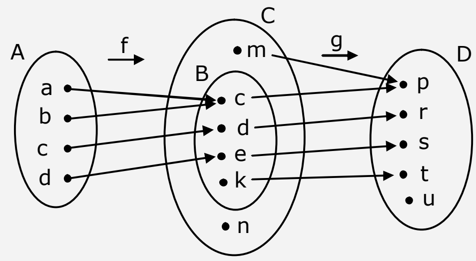
$\left(g^{-1}of^{-1}\right)(x) = 2x-1$ olduğu verilmiştir.

f ve g fonksiyonlarını bulunuz.

$f: A \to B$ ve $g: C \to D$ Fonksiyonlarının Bileşkeleri

Etkinlik – 3.93

$f: A \to B$ ve $g: C \to D$ fonksiyonları aşağıdaki Venn şeması ile verilmiştir.



a. $f: A \to C$ bağıntısı fonksiyon mudur?

b. $gof: A \to D$ fonksiyonu var mıdır?

c. $gof: A \to D$ fonksiyonu varsa, $(gof)(A)$ kümesini belirtiniz.

Teorem -3.20

$f: A \to B,\ y = f(x)$ *fonksiyonu verilmiş olsun.*

$M \subset A$ için $f(M) = \{y \mid y = f(x),\ x \in M\}$ *biçiminde tanımlanırsa,* $f: M \to B$ *fonksiyonu vardır ve*

$f(M) \subset f(A)$ *dır.*

$f: M \to D$ fonksiyonuna **f fonksiyonunun M'ye kısıtlanmışı** denir.

Etkinlik – 3.94

Teorem – 3.20'yi ispatlayınız.

Teorem -3.21

$f: A \to B$ *fonksiyonu için;*

a. $M \subset A \wedge N \subset A \Rightarrow f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$ *dir.*

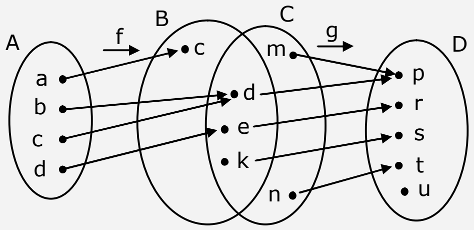
b. $M \subset A \wedge N \subset A \Rightarrow f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$ *dir.*

Etkinlik – 3.95

Teorem – 3.21'i ispatlayınız.

Etkinlik – 3.96

$f : A \to B$ ve $g : C \to D$ fonksiyonları aşağıdaki Venn şeması ile verilmiştir.



a. $g \circ f : A \to D$ fonksiyonu var mıdır?

b. $T \subset A$ olmak üzere, $g \circ f : T \to D$ fonksiyonunun en geniş T tanım kümesini belirtiniz.

c. T kümesi, $g \circ f : T \to D$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi ise $(g \circ f)(T)$ kümesini belirtiniz.

Örnek – 3.63

$f : R - \{-1\} \to R - \{2\}$, $f(x) = \dfrac{2x+6}{x+1}$ ve

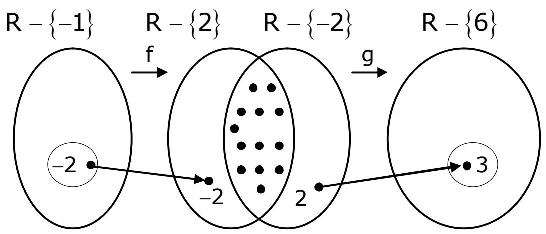
$g : R - \{-2\} \to R - \{6\}$, $g(x) = \dfrac{6x}{x+2}$ örten fonksiyonlardır.

a. $g \circ f : R - \{-1\} \to R - \{6\}$ fonksiyonu var mıdır?

b. $T \subset R - \{-1\}$ olmak üzere $g \circ f : T \to R - \{6\}$ fonksiyonunun en geniş T tanım kümesini belirtiniz.

c. T kümesi, $g \circ f : T \to R - \{6\}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi ise $(g \circ f)(T)$ kümesini belirtiniz.

Çözüm



a. $f(-2) = -2$ olup $g(-2)$ tanımsız olduğundan, $g \circ f : R - \{-1\} \to R - \{6\}$ fonksiyonu yoktur.

b. $f : \{R - \{-1\}\} - \{-2\} \to R - \{-2\}$

$\Rightarrow f : r - \{-2, -1\} \to R - \{-2\}$ ve

$g : R - \{-2\} \to R - \{6\}$ fonksiyonlar olduğundan

$g \circ f : R - \{-2, -1\} \to R - \{6\}$ fonksiyonu vardır.

$T = R - \{-2, -1\}$ kümesi $g \circ f : T \to R - \{6\}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesidir.

c. $g(2) = 3$'tür. 2 sayısı f'nin görüntü kümesinde olmadığı için; gof fonksiyonu, tanım kümesindeki hiçbir x değerini 3'e eşlemez.
Buna göre; T kümesi $g \circ f : T \to R - \{6\}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi ise

$g \circ f(T) = R - \{3, 6\}$ dir.

Etkinlik – 3.97

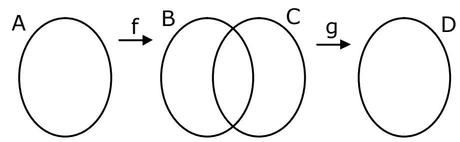
$f : R - \{-1\} \to R - \{2\}$, $f(x) = \dfrac{2x+6}{x+1}$

$g : R - \{-2\} \to R - \{6\}$, $g(x) = \dfrac{6x}{x+2}$ örten fonksiyonlardır.

a. $f \circ g : T \to R - \{2\}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini belirtiniz.

b. T kümesi, $f \circ g : T \to R - \{2\}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi ise $(f \circ g)(T)$ kümesini belirtiniz.

✚ Yaptığınız etkinliklerden, verdiğimiz teoremler ve örneklerden yararlanarak aşağıdaki genellemeyi yapabiliriz:



$f : A \to B$ ve $g : C \to D$ fonksiyonları verilmiş olsun.

$\varnothing \neq T \subset A$ ve $f(T) \subset C$ koşullarını sağlayan bir T kümesi varsa, $g \circ f : T \to D$ fonksiyonu vardır.

$g(f(T))$ kümesi, $g \circ f : T \to D$ fonksiyonunun görüntü kümesidir.

Etkinlik – 3.98

$f:[-2,9]\to[-4,7],\ f(x)=x-2$ ve

$g:[0,8]\to[0,16],\ g(x)=2x$ örten fonksiyonlardır.

a. $g\circ f:T\to[0,16]$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini ve bu küme için $(g\circ f)(T)$ kümesini belirtiniz.

b. $f\circ g:K\to[-4,7]$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini ve bu küme için $(f\circ g)(K)$ kümesini belirtiniz.

3.5.4 – Fonksiyonlarda Diğer İşlemler

Tanım - 3.38

$A\subset R$, $B\subset R$ ve $A\cap B\neq\varnothing$ olmak üzere,
$f:A\to R,\ g:B\to R$ *fonksiyonları için,*

$\mathbf{f+g: A\cap B\to R,\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)}$

*fonk-siyonuna **f ve g'nin toplamı;***

$\mathbf{f-g: A\cap B\to R,\ (f-g)(x)=f(x)-g(x)}$

*fonksiyonuna **f'nin g'den farkı;***

$\mathbf{f\cdot g: A\cap B\to R,\ (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)}$

*fonksiyonuna **f ve g'nin çarpımı;***

$\forall x\in A\cap B,\ g(x)\neq 0$ *olmak üzere,*

$\mathbf{\frac{f}{g}: A\cap B\to R,\ \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}}$ *fonksiyonuna*

f'nin g'ye bölümü;

$c\in R$ olmak üzere,

$\mathbf{c\cdot f: A\cap B\to R,\ (cf)(x)=c\cdot f(x)}$

*fonksiyonuna **c gerçek sayısı ile f'nin çarpımı** denir.*

Örnek – 3.64

$f=\{(1,2),(2,1),(3,-2)\}$ ve

$g=\{(1,-3),(2,2),(3,4),(4,2)\}$ fonksiyonları veriliyor.

a. $f+g$ **b.** $f-g$ **c.** $2f+3g$ **d.** $f\cdot g$

e. $\frac{f}{g}$ **f.** $f-2g+2$

fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm

f'nin tanım kümesi, $A=\{1,2,3\}$;

g'nin tanım kümesi, $B=\{1,2,3,4\}$ olduğundan, istenen fonksiyonların tanım kümesi,

$A\cap B=\{1,2,3\}$ olur.

a. $f+g=\{(1,2-3),(2,1+2),(3,-2+4)\}$

$\Rightarrow f+g=\{(1,-1),(2,3),(3,2)\}$ dir.

b. $f-g=\{(1,2+3),(2,1-2),(3,-2-4)\}$

$\Rightarrow f-g=\{(1,5),(2,-1),(3,-6)\}$ dir.

c. $2f+3g=\{(1,2\cdot2+3(-3)),(2,2\cdot1+3\cdot2),$
$(3,2\cdot(-2)+3\cdot4)\}$

$\Rightarrow 2f+3g=\{(1,-5),(2,8),(3,8)\}$ dir.

d. $f\cdot g=\{(1,2\cdot(-3)),(2,1\cdot2),(3,-2\cdot4)\}$

$\Rightarrow f\cdot g=\{(1,-6),(2,2),(3,-8)\}$ dir.

e. $\frac{f}{g}=\left\{\left(1,\frac{2}{-3}\right),\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(3,\frac{-2}{4}\right)\right\}$

$\Rightarrow \frac{f}{g}=\left\{\left(1,\frac{-2}{3}\right),\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(3,\frac{-1}{2}\right)\right\}$ dir.

f. 2 ile gösterilen fonksiyon $A\cap B$ 'den R'ye $h(x)=2$ fonksiyonudur. Burada,

$2=\{(1,2),(2,2),(3,2)\}$ anlamına gelir.

$f-2g+2=\{(1,2-2\cdot(-3)+2),(2,1-2\cdot2+2),$
$(3,-2-2\cdot4+2)\}$

$\Rightarrow f-2g+2=\{(1,10),(2,-1),(3,-8)\}$ dir.

Örnek – 3.65

R'den R'ye, $f(x)=2x-1$ ve

$g(x)=\begin{cases}x+1 & x<2 \text{ ise}\\ 3-x & x\geq 2 \text{ ise}\end{cases}$ fonksiyonları veriliyor.

a. $f+g$ **b.** $f-g$ **c.** $f\cdot g$ **d.** $\frac{f}{g}$

fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm

f fonksiyonunun tanım kümesini de x < 2 ve $x\geq 2$ olarak ikiye ayıralım:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<2 \text{ ise}\\ 2x-1 & x\geq 2 \text{ ise}\end{cases}$$

Böylece, aynı x değerlerine ait f(x) ve g(x) değerleri arasında kolayca işlem yapabileceğiz.

a. $f+g: R \to R$,

$$(f+g)(x)=\begin{cases}2x-1+x+1 & x<2 \text{ ise}\\ 2x-1+3-x & x\geq 2 \text{ ise}\end{cases}$$

$$\Rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases}3x & x<2 \text{ ise}\\ x+2 & x\geq 2 \text{ ise}\end{cases} \text{ olur.}$$

b. $f-g: R \to R$,

$$(f-g)(x)=\begin{cases}2x-1-x-1 & x<2 \text{ ise}\\ 2x-1-3+x & x\geq 2 \text{ ise}\end{cases}$$

$$\Rightarrow (f-g)(x)=\begin{cases}x-2 & x<2 \text{ ise}\\ 3x+4 & x\geq 2 \text{ ise}\end{cases} \text{ olur.}$$

c. $f\cdot g: R \to R$,

$$(f\cdot g)(x)=\begin{cases}(2x-1)(x+1) & x<2 \text{ ise}\\ (2x-1)(3-x) & x\geq 2 \text{ ise}\end{cases}$$

$$\Rightarrow (f\cdot g)(x)=\begin{cases}2x^2+x-1 & x<2 \text{ ise}\\ -2x^2-5x-3 & x\geq 2 \text{ ise}\end{cases} \text{ olur.}$$

d. $x=-1$ ve $x=3$ değerleri için $g(x)=0$

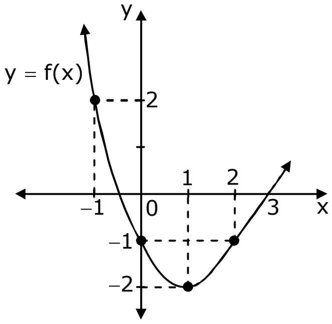
olduğundan $\frac{f}{g}$ tanımsızdır.

$\frac{f}{g}: R-\{-1,3\} \to R$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{x+1} & x\neq -1 \text{ ve } x<2 \text{ ise}\\ \dfrac{2x-1}{3-x} & x\neq 3 \text{ ve } x\geq 2 \text{ ise}\end{cases} \text{ olur.}$$

Örnek – 3.66

$f: R \to R$, $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. R'den R'ye, aşağıda verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.



a. $g(x)=y=f(x)+1$ **b.** $g(x)=y=2f(x)$

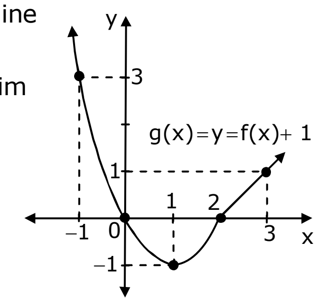
c. $g(x)=y=-f(x)$ **d.** $g(x)=y=f(x+1)$

e. $g(x)=y=f(x-1)$ **f.** $g(x)=y=f(x+2)+1$

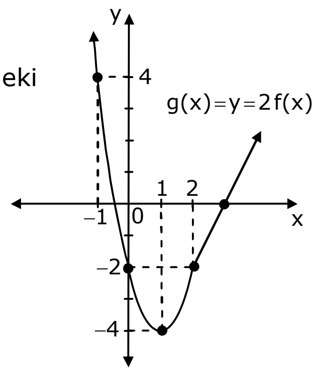
Çözüm

Aşağıda, istenilen grafikler çizilmiştir. İnceleyiniz.

a. $y=f(x)$'in grafiğine ait her noktanın, $+y$ yönünde 1 birim kaydırıldığına dikkat ediniz. $y=f(x)$'in Grafiği $+y$ yönünde 1 birim **ötelenmiştir**.



b. $y=f(x)$ grafiğindeki her noktanın ordinatının 2 katının alındığına dikkat ediniz.



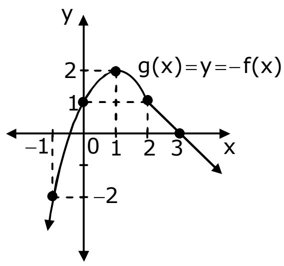
c. $g(x)=-f(x)$

$g(-1)=-f(-1)=-2$

$g(0)=-f(0)=-(-1)=1$

$g(1)=-f(1)=-(-2)=2$

$g(3)=-f(3)=0$



d. $g(x)=f(x+1)$

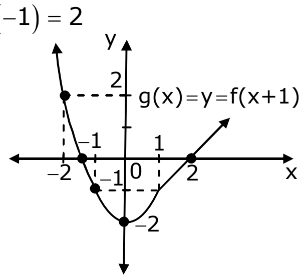
$g(-2)=f(-2+1)=f(-1)=2$

$g(-1)=f(0)=-1$

$g(0)=f(1)=-2$

$g(1)=f(2)=-1$

$g(2)=f(3)=0$



$y = g(x)$'in grafiği, $y = f(x)$'in grafiğinin $-x$ yönünde 1 birim ötelenmişidir.

e. $g(x) = f(x-1)$

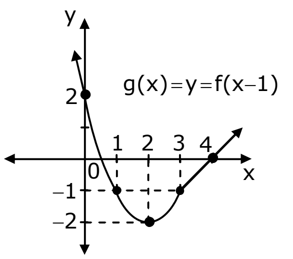
$g(0) = f(-1) = 2$

$g(1) = f(0) = -1$

$g(2) = f(1) = -2$

$g(3) = f(2) = -1$

$g(4) = f(3) = 0$



$y = g(x)$'in grafiği, $y = f(x)$'in grafiğinin $+x$ yönünde 1 birim ötelenmişidir.

f. $g(x) = f(x+2)+1$

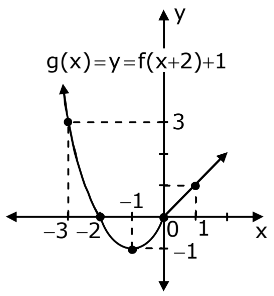
$g(-3) = f(-1)+1 = 3$

$g(-2) = f(0)+1 = 0$

$g(-1) = f(1)+1 = -1$

$g(0) = f(2)+1 = 0$

$g(1) = f(3)+1 = 1$



$y = g(x)$'in grafiği, $y = f(x)$'in grafiğinin $-x$ yönünde 2 birim, $+y$ yönünde 1 birim ötelenmişidir.

Genel olarak;

$y = f(x)$ in grafiğinden yararlanarak

$y = g(x) = f(x-r)+k$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için; $y = f(x)$ grafiği

r > 0 ise, $+x$ yönünde r birim;

r < 0 ise, $-x$ yönünde r birim;

k > 0 ise, $+y$ yönünde k birim;

k < 0 ise, $-y$ yönünde k birim

ötelenir.

Alıştırmalar ve Problemler – 3.5

1. R'den R'ye, $f(x) = x^2 - 2$ ve $g(x) = 1 - 2x$ fonksiyonları veriliyor.

a. $A = \{-2, 0, 1, 2\}$ ise $(g \circ f)(A) = ?$

b. $B = \{0, 1, 2, 3\}$ ise $(f \circ g)(B) = ?$

c. $(g \circ f)(x) = ?$ **d.** $(f \circ g)(x) = ?$

2. Aşağıda verilen f ve g fonksiyonlarının $g \circ f$ ve $f \circ g$ bileşkelerini, bileşke fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

a. $f = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,3)\}$

$g = \{(0,1), (2,2), (3,2), (4,3)\}$

b. $f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$

c. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

d. $f: R \to R$, $f(x) = 5x - 1$

$g: R \to R$, $g(x) = 3x + 4$

e. $f: R \to R$, $f(x) = 2$

$g: R \to R$, $g(x) = x^2 + x + 1$

f. $f: R \to R$, $f(x) = x - 1$

$g: R \to R$, $g(x) = (x+2)^2 - 3$

g. $f: R \to R$, $f(x) = x - 2$

$g: R - \{0\} \to R$, $g(x) = \dfrac{2x-1}{x}$

h. $f: R - \{2\} \to R$, $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-2}$

$g: R - \{-1\} \to R$, $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

i. $f: R \to R$, $f(x) = 2x - 3$

$g: R \to R$, $g(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \text{ ise} \\ x - 2 & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

j. $f: R \to R$, $f(x) = 2x - 3$

$g: [-1, +\infty) \to R$, $g(x) = \sqrt{x+1}$

3. $f: R \to R,\quad f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \text{ ise} \\ 3-x & x \ge 0 \text{ ise} \end{cases}$ ve

$g: R \to R,\quad g(x) = \begin{cases} x+2 & x<3 \text{ ise} \\ 2x-5 & x \ge 3 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonları veriliyor.

a. $(g \circ f)(-1) = ?$ **b.** $(f \circ g)(4) = ?$

c. $(g \circ f \circ g)(0) = ?$ **d.** $(f \circ g \circ f)(1) = ?$

e. $(g \circ f)(a) = 3$ ise, $a = ?$

f. $(f \circ g)(a) = 1$ ise, $a = ?$

4. Aşağıda verilen fonksiyonları iki fonksiyonun bileşkesi olarak yazınız.

a. $f: R \to R,\ f(x) = x-2$

b. $f: R \to R,\ f(x) = 3x+4$

c. $f: R \to R,\ f(x) = (x+1)^2 - 3x$

d. $f: R \to R,\ f(x) = 2x^2 + 3x - 4$

5. A, B, C birbirinden ve boş kümeden farklı üç kümedir.

$f: A \to B,\ g: B \to C,\ h: C \to A$ fonksiyonlarının aşağıda verilen bileşkelerinden hangileri vardır? Var olanlardan birbirine eşit olanlar var mıdır?

a. $f \circ g \circ h$ **b.** $h \circ f \circ g$ **c.** $h \circ g \circ f$

d. $g \circ f \circ h$ **e.** $f \circ h \circ g$ **f.** $g \circ h \circ f$

6. R'den R'ye $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = 2x - 1$ ve $h(x) = x + 2$ fonksiyonları veriliyor.

a. $(h \circ g \circ f)(R) = ?$ **b.** $(h \circ f \circ g)(R) = ?$

c. $(g \circ h \circ f)(R) = ?$ **d.** $(f \circ g \circ h)(R) = ?$

7. Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların, bire bir ve örten oldukları en geniş tanım ve değer kümelerini belirterek, ters fonksiyonlarını bulunuz.

a. $f(x) = 2x - 4$ **b.** $f(x) = -x - 3$

c. $f(x) = \dfrac{3-2x}{4}$ **d.** $f(x) = \sqrt{2-x}$

e. $f(x) = \sqrt{x+2} + 2$ **f.** $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

g. $f(x) = \dfrac{5}{2x}$ **h.** $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$

i. $f(x) = \dfrac{2x}{5}$ **j.** $f(x) = \dfrac{2x-1}{1-3x}$

k. $f(x) = \dfrac{2}{3x-9}$ **l.** $f(x) = \dfrac{3-2x}{x-2}$

m. $f(x) = \sqrt{\dfrac{-2}{x+2}}$ **n.** $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

o. $f(x) = (x-2)^2$ **p.** $f(x) = x^2 - 4$

8. **a.** $f: R \to R,\ f(x) = x^3 - 4x + 3$ ise $f^{-1}(3) = ?$

b. $f: R \to R,\ f(x) = x^2 - 2x - 1$ ise $f^{-1}(2) = ?$

c. $f: R \to R,\ f(x) = \dfrac{x^2+6}{x^2+1}$ ise $f^{-1}(2) = ?$

d. $f: R \to R,\ f(x) = x^3 + ax - 1$ ve $(2,3) \in f^{-1}$ ise $a = ?$

9. **a.** $f(2x-3) = 4x+1$ ise $f(5) = ?$

b. $f(2-3x) = 5x-2$ ise $f^{-1}(3) = ?$

c. $f\left(\dfrac{1-2x}{x-1}\right) = 2x - 6$ ise $f^{-1}(-2) = ?$

d. $f(6x+1) = 2x-1$ ise $f^{-1}(x) = ?$

10. Aşağıda verilen $f: A \to B$ ve $g: B \to C$ fonksiyonları için, $g \circ f$ fonksiyonlarının en geniş T tanım kümelerini ve $g \circ f(T)$ kümelerini bulunuz.

a. $f: A \to B,\ f(x) = \dfrac{4x-1}{2x-2}$

$g: B \to C,\ g(x) = \dfrac{4-2x}{x+1}$

b. $A \subset [1,5]$ ve $C \subset [-2,22]$

$f: A \to B,\ f(x) = 2x - 1$

$g: B \to C,\ g(x) = 3x + 1$

c. $f: A \to B,\ f(x) = \dfrac{2}{x}$

$g: B \to C,\ g(x) = \dfrac{x}{x-2}$

11. $f: R \to R,\ f(x) = ax + b$ fonksiyonunda $f = f^{-1}$ olması için a ve b kat sayılarının sağlaması gereken koşulları bulunuz.

12. $f: R - \left\{\frac{-d}{c}\right\} \to R - \left\{\frac{a}{c}\right\},\ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonunda $f = f^{-1}$ olması için a, b, c, d kat sayılarının sağlaması gereken koşulları bulunuz.

13. $f: R^2 \to R^2,\ f(x,y) = (2x - y, x + 2y)$ fonksiyonu veriliyor.

a. $f(2,3) = ?$ **b.** $f^{-1}(3,4) = ?$

c. $(fofof)(-1,1) = ?$ **d.** $(fof)(x,y) = ?$

14. En geniş tanım kümesinde $y = f(x)$ fonksiyonu için $2f(x) - 3 = \frac{f(x) - 1}{x - 1}$ dir.

a. $f^{-1}(1) = ?$ **b.** $f^{-1}(2) = ?$ **c.** $f(1) = ?$

15. a. $f\left(\frac{2x+3}{2-x}\right) = 4x - 1$ ve $g(2x-1) = \frac{x+1}{x-1}$ ise $(f^{-1}og)(3) = ?$

b. $f\left(\frac{2x}{x-2}\right) = \frac{x+2}{x}$ ve $g\left(\frac{x-1}{2x}\right) = \frac{x}{x+1}$ ise $(g^{-1}of)(1) = ?$

c. $f(4x^2 + 2x) = 2x - 1$ ve $g(x-3) = x^2 - 5x + 6$ ise $(gof^{-1})(-1) = ?$

d. $f\left(\frac{2x-4}{x+3}\right) = \frac{x+2}{x-1}$ ve $g\left(\frac{x+2}{x+1}\right) = \frac{1+x}{2-x}$ ise $(gof)^{-1}(2) = ?$

16. a. $f(1-x) = \frac{2x+1}{x-1}$ ise $f^{-1}(x) = ?$

b. $f\left(\frac{3-4x}{x+2}\right) = 2 - x$ ise $f^{-1}(x) = ?$

17. a. $f(x) = 5 - 2x$ ve $(fog)(x) = 1 - 6x$ ise $g(x) = ?$

b. $f(x) = 4x - 1$ ve $(gof)(x) = 8x - 1$ ise $g(x) = ?$

c. $(gof)(x) = 2x + 3$ ve $f^{-1}(x) = 2x - 1$ ise $g(x) = ?$

d. $(fog)(x) = 6x - 2$ ve $f^{-1}(x) = 2x + 1$ ise $g(x) = ?$

18. a. $f(x) = 2x - 3$ ve $(fog)(x) = x^2 - x - 1$ ise $g(1) = ?$

b. $f(x) = \frac{4x-5}{2x-1}$ ve $(gof)(x) = 2x - 1$ ise $g^{-1}(3) = ?$

c. $f(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$ ve $(gof)(x) = 2x^2 - 4x - 1$ ise $g(4) = ?$

19. a. $(fog)(x) = 4x + 5$ ve $(gof^{-1})(x) = x + 4$ ise $g(x) = ?$

b. $(fog^{-1})(x) = 5 - 2x$ ve $(gof)(x) = 7 - 8x$ ise $f(x) = ?$

c. $(gof)(x) = 4x + 1$ ve $(gof^{-1})(x) = x + 4$ ise $f(x) = ?$

d. $(fogof)(x) = x - 3$ ve $(gofog)(x) = 2 - x$ ise $f(x) = ?$

20. $f: R \to R,\ f(x) = 2x - 1$ ve $g: R \to R,\ g(x) = ax + b$ olmak üzere; $fog = gof$ eşitliğini sağlayan g fonksiyonlarında a ve b arasındaki bağıntıyı bulunuz. Bundan yararlanarak, $fog = gof$ eşitliğinin $f^{-1} = g$ olmasına yetmediğini gösteriniz.

21. $f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ ve $g=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & d & b \end{pmatrix}$ permütasyon fonksiyonları veriliyor.

Aşağıda verilen eşitlikleri sağlayan h fonksiyonlarını bulunuz.

a. $h = fog$ **b.** $foh = g$ **c.** $hog = f$

d. $gohof = f^{-1}$ **e.** $gofoh = g^{-1}$ **f.** $hogof = f^{-1}$

22. a. $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ve $gof=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ise $g = ?$

b. $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ve $fog=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ise $g = ?$

23. $fogoh=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $foh=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ve

$g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ olduğuna göre f fonksiyonunu bulunuz.

24. $f: R \to R,\quad f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<1 \text{ ise} \\ 4x-1 & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

a. $f^{-1}(7)$ kaçtır? **b.** $f^{-1}(x)$i bulunuz.

25. a. $f: R \to R,\ f(x) = 2x-1$ ise $f(2x)$'i $f(x)$ cinsinden yazınız.

b. $f: R \to R,\ f(x) = 2^{2x-1}$ ise $f(3x)$'i $f(x)$ cinsinden yazınız.

c. $f: R \to R,\ f(x) = 3^{x+1}$ ise $f(x+3)$'ü $f(x+1)$ cinsinden yazınız.

d. $f: A \to R,\ f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ ise $f(x+1)$'i $f(x)$ cinsinden yazınız.

e. $f: A \to R,\ f(x) = \dfrac{x+2}{2x}$ ise $f(3x)$'i $f(2x)$ cinsinden yazınız.

f. $f: R-\{1\} \to R-\{2\},\ f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$ ise $f^{-1}(x)$'i $f(x)$ cinsinden yazınız.

26. $f=\{(0,1),(1,-1),(2,2),(3,0)\}$

$g=\{(0,-1),(1,2),(2,0),(3,1),(4,3)\}$

fonksiyonları veriliyor.

a. $f+g$ **b.** $f-g$ **c.** $3f+2g$ **d.** $f \cdot g$

e. $\dfrac{f}{g}$ **f.** $\dfrac{f-2g}{2f+g}$ **g.** fog **h.** gof

fonksiyonlarını bulunuz.

27. $f: R \to R,\quad f(x)=\begin{cases} 2 & x<0 \text{ ise} \\ x-2 & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$ ve

$g: R \to R,\quad g(x)=\begin{cases} 2x+3 & x<3 \text{ ise} \\ 1-3x & x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonları veriliyor.

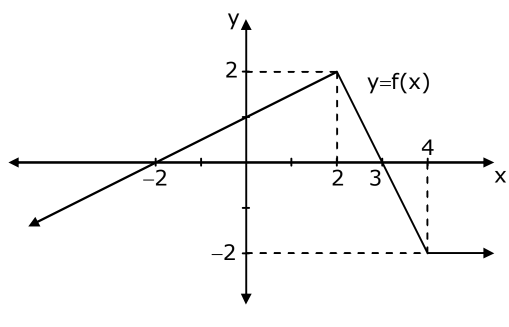
a. $(2f+g)(2) = ?$ **b.** $(f-2g)(4) = ?$

c. $(f \cdot g)(-1) = ?$ **d.** $\left(\dfrac{f}{g}\right)(1) = ?$

e. $f+g = ?$ **f.** $f-g = ?$

g. $f \cdot g = ?$ **h.** $\dfrac{f}{g} = ?$

28. $f: R \to R,\ y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



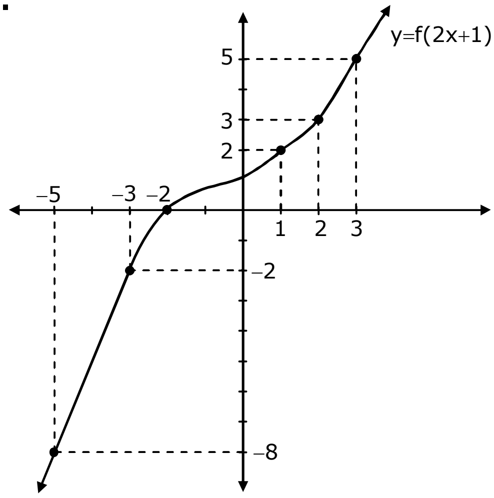
Aşağıda belirtilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $y = g(x) = f(x)+1$ **b.** $y = g(x) = 2f(x)$

c. $y = g(x) = f(x+2)$ **d.** $y = g(x) = f(x-1)$

e. $y = g(x) = f(x+1)-1$ **f.** $y = g(x) = -f(x)$

29.



$f: R \to R,\ \ y = f(x)$ olmak üzere,

$y = f(2x+1)$ in grafiği yukarıda verilmiştir.

a. $f(3) = ?$ **b.** $f^{-1}(0) = ?$ **c.** $f^{-1}(-2) = ?$

d. $f\left[f(3x-1)\right] + 4 = f^{-1}(5)$ eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

30. 29. soruda verilen grafiğin, $y = f^{-1}(2-x)$'in grafiği olduğunu varsayarak aşağıdakileri yanıtlayınız.

a. $f(2) = ?$ **b.** $f(3) = ?$ **c.** $f^{-1}(4) = ?$

d. $f\left[f(2x-1)\right] + f^{-1}(0) = f^{-1}(-1) + f^{-1}(1)$

eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

31. f ve g, A'dan B'ye herhangi iki fonksiyondur.

a. B'den C'ye h fonksiyonu bire bir ve $h \circ f = h \circ g$ ise $f = g$ olduğunu ispatlayınız.

b. C'den A'ya h fonksiyonu örten ve $g \circ h = f \circ h$ ise $f = g$ olduğunu ispatlayınız.

32. $f: A \to B$ ve $g: B \to C$ fonksiyonlardır.

a. $g \circ f$ bire bir ise f'nin de bire bir olduğunu;

b. gof örten ise g'nin de örten olduğunu ispatlayınız.