1. $(E_1): 2x - y + 2 = 0$ ve $(E_2): x + 2y - z - 4 = 0$ düzlemlerinin arakesitinin denklemini bulunuz.

Çözüm

I.yol: $\left.\begin{array}{r} 2x - y + 2 = 0 \\ x + 2y - z - 4 = 0 \end{array}\right\}$ denklem sistemi arakesitin denklemi olarak verilebilir. Bu yazılım, "bu denklem sistemini sağlayan noktaların kümesi" anlamına gelir ki; bu da "arakesit üzerindeki noktaların kümesi" demektir.

II.yol: (E_1) ve (E_2) düzlemlerinin arakesiti bu düzlemlerden her birinin normal vektörüne dik olur.

Arakesitin doğrultu vektörü $\vec{d} = (x, y, z)$ olsun.

(E_1)'in normal vektörü $\overrightarrow{n_1} = (2, -1, 0)$;

(E_2)'nin normal vektörü $\overrightarrow{n_2} = (1, 2, -1)$ 'dir.

$\overrightarrow{n_1} \cdot \vec{d} = 0$ ve $\overrightarrow{n_2} \cdot \vec{d} = 0$ olmalıdır.

$$\left.\begin{array}{r} (x, y, z) \cdot (2, -1, 0) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (1, 2, -1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{array}\right\}$$

Burada 3 bilinmeyenli 2 denklem bulunduğundan, bilinmeyenlerden birine keyfi değer verilebilir.

$x = k$ olsun.

y=2k ve z=5k olur.

$\vec{d} = (x, y, z) = (1, 2, 5)$ alınabilir.

$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 2 = 0 \\ x + 2y - z - 4 = 0 \end{array}\right\}$ sistemini sağlayan herhangi bir nokta da, yine bilinmeyenlerden biri yerine keyfi bir değer konularak bulunabilir.

$x = 0$ alınırsa, y=2 ve z=0 olur.

Arakesit,

$\ell : (x, y, z) = (0, 2, 0) + k \cdot (1, 2, 5)$ ya da

$\ell : \frac{x}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z}{5}$ olarak bulunur.

III.yol: (E_1) ve (E_2) düzlemlerinin arakesiti $\left.\begin{array}{r} 2x - y + 2 = 0 \\ x + 2y - z - 4 = 0 \end{array}\right\}$ sistemini sağlayan (x, y, z) üçlülerinin kümesidir. Bu üçlüleri bulalım:

Denklem sistemi 3 bilinmeyenli 2 denklemden oluşmaktadır. Bilinmeyenlerden birine keyfi değer verilebilir.

$x = k$ alınırsa, y=2k+2 ve z=5k olur.

$k = \frac{x}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z}{5}$ olup arakesit,

$\ell : \frac{x}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z}{5}$ olarak bulunur.

2. $(E_1): x = 0$ ve $(E_2): 2x + y - 2z - 3 = 0$ düzlemlerinin arakesitinin denklemini bulunuz.

Çözüm

$\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 2x + y - 2z - 3 = 0 \end{array}\right\}$ sistemini sağlayan (x, y, z) üçlülerinin kümesini bulacağız.

Burada 3 bilinmeyenli 2 denklem bulunmaktadır. Bilinmeyenlerden biri $x = 0$ olarak bellidir.

$z = k$ alınırsa, y=2k+3 olur.

$k = \frac{y - 3}{2} = \frac{z}{1}$ olup arakesit,

$\ell : x = 0,\ \frac{y - 3}{2} = \frac{z}{1}$ olarak bulunur.

3. $(E_1): x - y + z - 2 = 0$ ve $(E_2): 2x + 2y - z + 4 = 0$ düzlemlerinin arakesitinin denklemini bulunuz.

Çözüm

$\left.\begin{array}{r} x - y + z - 2 = 0 \\ 2x + 2y - z + 4 = 0 \end{array}\right\}$ sistemini sağlayan (x, y, z) üçlülerinin kümesini bulacağız.

$x = k$ olsun.

$\left.\begin{array}{r} y + z = 2 - k \\ 2y - z = 4 - 2k \end{array}\right\} \Rightarrow y = 6 - 3k$, z=8-4k olur.

$k = \frac{x}{1} = \frac{y - 6}{-3} = \frac{z - 8}{-4}$ olup arakesit,

$\ell : \frac{x}{1} = \frac{y - 6}{-3} = \frac{z - 8}{-4}$ olarak bulunur.

4. $A(1, 0, -1)$ noktası ve $\ell_1 : \frac{x}{1} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z + 2}{2}$ doğrusunun belirttiği (E_1) düzlemi ile,

$A(1, 0, -1)$ noktası ve $\ell_2 : \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z}{3}$ doğrusunun belittiği (E_2) düzleminin arakesitinin denklemini bulunuz.

Çözüm

I.yol: (E_1) ve (E_2) düzlemlerinin ayrı ayrı denklemleri bulunarak, bunların arakesitinin denklemi 1., 2. ve 3. soruların çözümünde olduğu gibi bulunur.

II.yol: ℓ_1 doğrusunun (E_2) düzlemini kestiği nokta $B(x_1,y_1,z_1)$; ℓ_2 doğrusunun (E_1) düzlemini kestiği nokta $C(x_2,y_2,z_2)$ olsun.

$\frac{x_1}{1} = \frac{y_1-2}{-1} = \frac{z_1+2}{2} = k_1$;

$\frac{x_2-1}{2} = \frac{y_2+1}{1} = \frac{z_2}{3} = k_2$ olsun.

$B(k_1,-k_1+2,2k_1-2)$ ve $C(2k_2+1,k_2-1,3k_2)$

olur. $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ vektörleri doğrusal bağımlıdır.

$\overrightarrow{AB}=(k_1-1,-k_1+2,2k_1-1)$ ve

$\overrightarrow{AC}=(2k_2,k_2-1,3k_2+1)$ olduğundan,

$\frac{k_1-1}{2k_2} = \frac{-k_1+2}{k_2-1} = \frac{2k_1-1}{3k_2+1}$ yazılır.

Ortadaki oranı (1) ile genişletip soldakine ve (2) ile genişletip sağdakine eklersek,

$\frac{1}{3k_2-1} = \frac{3}{5k_2-1} \Rightarrow k_2 = \frac{1}{2}$ elde edilir.

$\overrightarrow{AC}=(1,-\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ olur. Arakesitin doğrultu vektörü $\vec{d}=(2,-1,5)$ olarak alınabilir.

Arakesit,

$\ell:(x,y,z)=(1,0,-1)+k\cdot(2,-1,5)$ ya da

$\ell: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{5}$ olarak bulunur.

Bir de düzlem denklemi yazalım:

5. $A(1,0,-1)$ noktası ile $\ell: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{2}$ doğrusunun belirttiği (E) düzleminin denklemini yazınız.

Çözüm

ℓ doğrusu üzerinde $B(0,2,-2)$ ve $C(2,0,2)$ noktalarını alalım.

$\overrightarrow{AB}=(-1,2,-1)$ ve $\overrightarrow{AC}=(1,0,3)$ olur.

(E) düzleminin normal vektörü $\vec{n}=(x,y,z)$ ise;

$$\left.\begin{array}{r}(x,y,z)\cdot(-1,2,-1)=0\\(x,y,z)\cdot(1,0,3)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}-x+2y-z=0\\x+3z=0\end{array}\right\}$$

$z=k$ alınırsa, $x=-3k$ ve $y=-k$ olur.

$\vec{n}=(x,y,z)=(-3,-1,1)$ alınabilir.

Buna göre; düzlemin denklemi

$-3x-y+z+k=0$ biçimindedir. $A(1,0,-1)$ noktası bu denklemi sağlayacağından $k=4$ olur.

Düzlemin denklemi de;

$(E): -3x-y+z+4=0$ ya da,

$(E): 3x+y-z-4=0$ olarak bulunur.