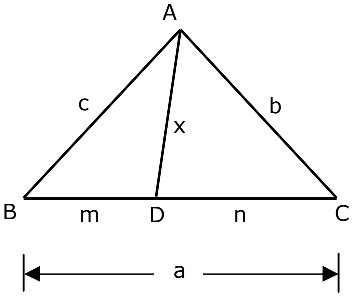
Stewart Teoremi



Bir ABC üçgeninde;

$|AB| = c$, $|AC| = b$, $D \in [BC]$, $|BD| = m$,

$|DC| = n$ ve $|AD| = x$ olmak üzere,

$$x^2 = \frac{b^2m + c^2n}{a} - m \cdot n$$

eşitliği geçerlidir.

İspat

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + (\frac{m}{m+n})^2 \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{2m}{m+n}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ (1)

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = x^2$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = c^2$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (m+n)^2$, (2)

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)$ (3)

(2) ve (3), (1)'de yerlerine konulursa;

$x^2 = c^2 + \frac{m^2}{(m+n)^2} \cdot (m+n)^2 + \frac{2m}{m+n} \cdot \left[-\frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)\right]$

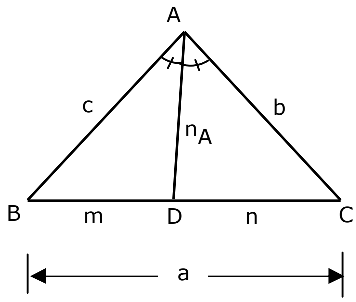
$\Rightarrow x^2 = c^2 + m^2 - \frac{m}{a} \cdot a^2 - \frac{m}{a} \cdot c^2 + \frac{m}{a} \cdot b^2$

$\Rightarrow x^2 = \frac{ac^2 - mc^2 + mb^2}{a} + m^2 - m \cdot a$

$\Rightarrow x^2 = \frac{(a-m)c^2 + mb^2}{a} - m(a-m)$

$\Rightarrow x^2 = \frac{mb^2 + nc^2}{a} - m \cdot n$ elde edilir.

Bir İç Açıortayın Uzunluğu



Bir ABC üçgeninde;

$|AB| = c$, $|AC| = b$, $D \in [BC]$, $|BD| = m$, $|DC| = n$

$|AD| = n_A$ ve $[AD]$ açıortay olmak üzere,

$$n_A^2 = b \cdot c - m \cdot n$$

eşitliği geçerlidir.

İspat

İç Açıortay Teoreminden;

$\frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|CA|} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{c}{b}$ yazılır.

$\frac{m}{n} = \frac{c}{b} \Rightarrow n = \frac{mb}{c}$ olur. n'nin bu değeri Stewart Formülünde kesir kısmındaki yerine konulurken, a yerine $m+n$ ve x yerine de n_A konulabilir:

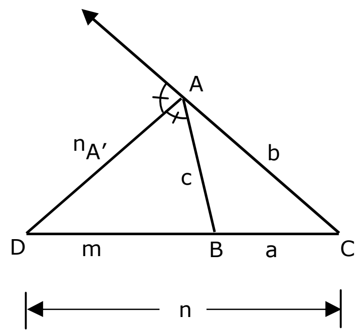
$\Rightarrow x^2 = \frac{m \cdot b^2 + n \cdot c^2}{m+n} - m \cdot n$

$\Rightarrow x^2 = \frac{m \cdot b^2 + \frac{m \cdot b}{c} \cdot c^2}{m + \frac{m \cdot b}{c}} - m \cdot n$

$\Rightarrow n_A^2 = b \cdot c - m \cdot n$

elde edilir.

Bir Dış Açıortayın Uzunluğu



Bir ABC üçgeninde;

$|AB| = c$, $|AC| = b$, $D \in [CB$, $|BD| = m$, $|DC| = n$

$|AD| = n_{A'}$ ve $[AD]$ dış açıortay olmak üzere,

$$n_{A'}^2 = m \cdot n - b \cdot c$$

eşitliği geçerlidir.

İspat

ADC üçgenine Stewart Teoremini uygulayalım:

$$c^2 = \frac{n_{A'}^2 \cdot a + b^2 \cdot m}{n} - m \cdot a$$

$$\Rightarrow n \cdot c^2 = n_{A'}^2 \cdot a + b^2 \cdot m - m \cdot n \cdot a$$

$$\Rightarrow n_{A'}^2 = \frac{n \cdot c^2 - m \cdot b^2}{a} + m \cdot n \quad (1) \text{ olur.}$$

Dış Açıortay Teoreminden;

$\frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|CA|} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{c}{b}$ yazılır.

$\frac{m}{n} = \frac{c}{b} \Rightarrow n = \frac{mb}{c}$ olur. n’nin bu değeri (1) eşitliğinde kesir kısmındaki yerine konulurken, a yerine de $n - m$ konulursa;

$$n_{A'}^2 = \frac{\frac{m \cdot b}{c} \cdot c^2 - m \cdot b^2}{\frac{m \cdot b}{c} - m} + m \cdot n$$

$$\Rightarrow n_{A'}^2 = m \cdot n - b \cdot c$$

elde edilir.